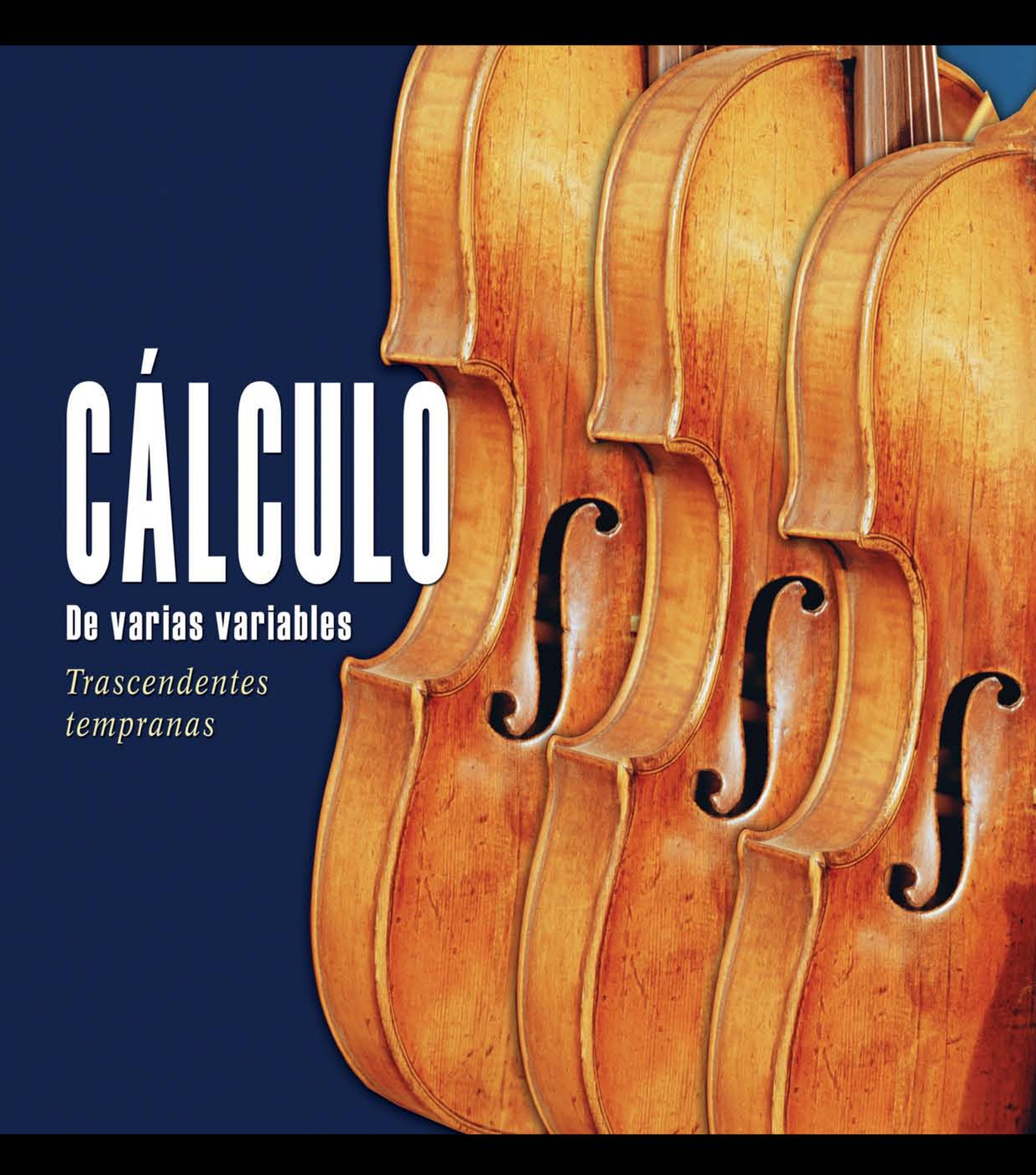
EDICIÓN REVISADA



JAMES STEWART Sexta edición

CÁLCULO

DE VARIAS VARIABLES

Trascendentes tempranas

SEXTA EDICIÓN
(Edición revisada)

JAMES STEWART

McMASTER UNIVERSITY

Traducción:

Jorge Humberto Romo M.
Traductor Profesional

Revisión técnica:

Dr. Ernesto Filio López
Unidad Profesional Interdisciplinaria
en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

M. en C. Manuel Robles Bernal
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Instituto Politécnico Nacional



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



***Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas*, Sexta edición**
James Stewart

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Héctor Enrique Galindo Iturribarría

Director editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director editorial:
Lilia Moreno Olvera

Editor de desarrollo:
Sergio R. Cervantes González

Coordinador de preprensa:
Alejandro A. Gómez Ruiz

Editor de producción:
Timoteo Eliosa García

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Ilustrador:
Brian Betsill

Diseño de portada:
Irene Morris

Imagen de portada:
© M.Neugebauer/zefa/Corbis

Composición tipográfica:
Servicios Editoriales 6Ns, S.A. de C.V.

Traducido del libro *Multivariable Calculus: Early Trascendentals*, Sixth Edition.
Publicado en inglés por Thomson/Brooks/Cole
© 2008
ISBN: 0-495-01172-X

Datos para catalogación bibliográfica
Cálculo de varias variables:
Trascendentes tempranas
Sexta edición
ISBN-13: 978-607-481-318-0
ISBN-10: 607-481-318-3

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

PARA SALLY Y DON

PARA ALAN Y SHARON

PARA KELLY, KIM Y CALLUM

PARA JACKIE Y NINO

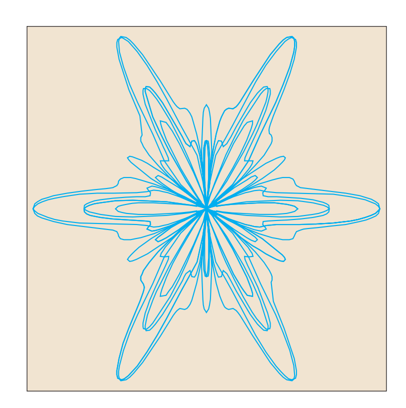
CONTENIDO

Prefacio ix

Al estudiante xv



10 ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES 620



10.1 Curvas definidas por ecuaciones paramétricas 621

Proyecto de laboratorio ▪ Círculos que corren alrededor de círculos 629

10.2 Cálculo con curvas paramétricas 630

Proyecto de laboratorio ▪ Curvas de Bézier 639

10.3 Coordenadas polares 639

10.4 Áreas y longitudes en coordenadas polares 650

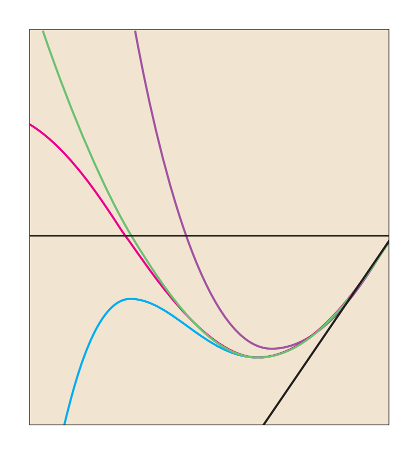
10.5 Secciones cónicas 654

10.6 Secciones cónicas en coordenadas polares 662

Repaso 669

Problemas adicionales 672

11 SUCESIONES Y SERIES INFINITAS 674



11.1 Sucesiones 675

Proyecto de laboratorio ▪ Sucesiones logísticas 687

11.2 Series 687

11.3 La prueba de la integral y estimaciones de las sumas 697

11.4 Pruebas por comparación 705

11.5 Series alternantes 710

11.6 Convergencia absoluta y las pruebas de la razón y la raíz 714

11.7 Estrategia para probar series 721

11.8 Series de potencias 723

11.9 Representaciones de las funciones como series de potencias 728

11.10 Series de Taylor y de Maclaurin 734

Proyecto de laboratorio ▪ Un límite escurridizo 748

Redacción de proyecto ▪ Cómo descubrió Newton la serie binomial 748

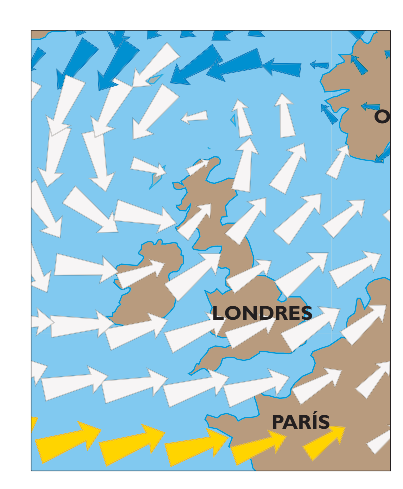
11.11 Aplicaciones de los polinomios de Taylor 749

Proyecto de aplicación ▪ Radiación proveniente de las estrellas 757

Repaso 758

Problemas adicionales 761

12 VECTORES Y LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO 764



12.1 Sistemas coordenados tridimensionales 765

12.2 Vectores 770

12.3 Producto punto 779

12.4 Producto cruz 786

Proyecto para un descubrimiento ▪ Geometría de un tetraedro 794

12.5 Ecuaciones de líneas y planos 794

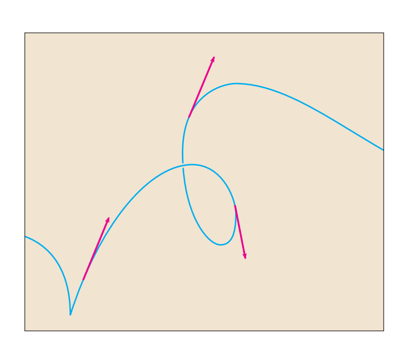
Proyecto de laboratorio ▪ Tres dimensiones en perspectiva 804

12.6 Cilindros y superficies cuadráticas 804

Repaso 812

Problemas adicionales 815

13 FUNCIONES VECTORIALES 816



13.1 Funciones vectoriales y curvas en el espacio 817

13.2 Derivadas e integrales de funciones vectoriales 824

13.3 Longitud de arco y curva 830

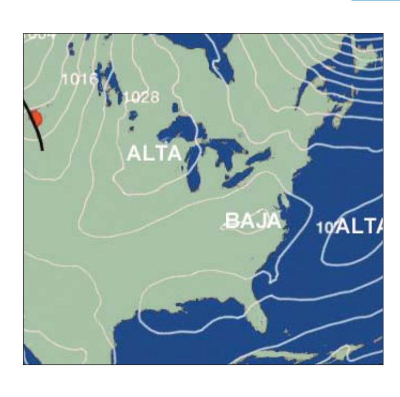
13.4 Movimiento en el espacio: velocidad y aceleración 838

Proyecto de aplicación ▪ Leyes de Kepler 848

Repaso 849

Problemas adicionales 852

14 DERIVADAS PARCIALES 854



14.1 Funciones de varias variables 855

14.2 Límites y continuidad 870

14.3 Derivadas parciales 878

14.4 Planos tangentes y aproximaciones lineales 892

14.5 Regla de la cadena 901

14.6 Derivadas direccionales y su vector gradiente 910

14.7 Valores máximos y mínimos 922

Proyecto de aplicación ■ Diseño de un camión de volteo 933

Proyecto para un descubrimiento ■ Aproximaciones cuadráticas y puntos críticos 933

14.8 Multiplicadores de Lagrange 934

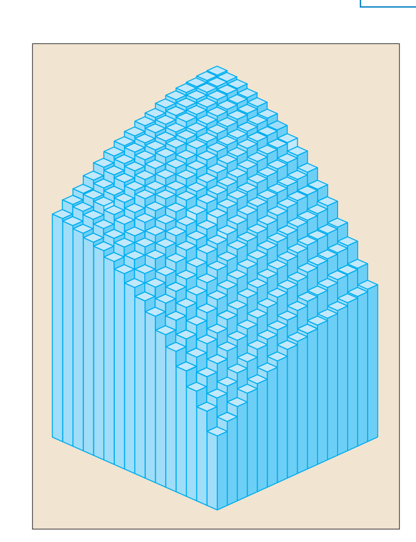
Proyecto de aplicación ■ Ciencia para cohetes 941

Proyecto de aplicación ■ Optimización de turbinas hidráulicas 943

Repaso 944

Problemas adicionales 948

15 INTEGRALES MÚLTIPLES 950



15.1 Integrales dobles sobre rectángulos 951

15.2 Integrales iteradas 959

15.3 Integrales dobles sobre regiones generales 965

15.4 Integrales dobles en coordenadas polares 974

15.5 Aplicaciones de las integrales dobles 980

15.6 Integrales triples 990

Proyecto para un descubrimiento ■ Volúmenes de hiperesferas 1000

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas 1000

Proyecto para un descubrimiento ■ Intersección de tres cilindros 1005

15.8 Integrales triples en coordenadas esféricas 1005

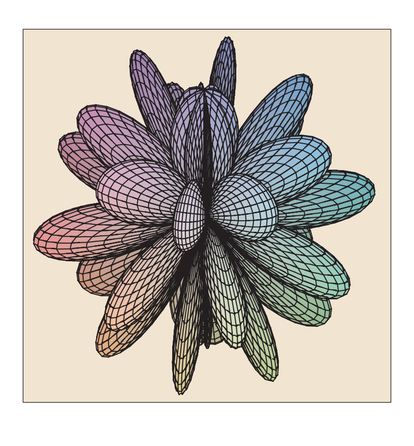
Proyecto de aplicación ■ Carrera de objetos circulares 1012

15.9 Cambio de variables en integrales múltiples 1012

Repaso 1021

Problemas adicionales 1024

16 CÁLCULO VECTORIAL 1026



16.1 Campos vectoriales 1027

16.2 Integrales de línea 1034

16.3 Teorema fundamental de las integrales de línea 1046

16.4 Teorema de Green 1055

16.5 Rotacional y divergencia 1061

16.6 Superficies paramétricas y sus áreas 1070

16.7 Integrales de superficie 1081

16.8 Teorema de Stokes 1092

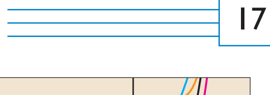
Redacción de proyecto ■ Tres hombres y dos teoremas 1098

16.9 Teorema de la divergencia 1099

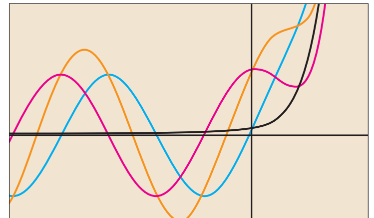
16.10 Resumen 1105

Repaso 1106

Problemas adicionales 1109



ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN 1110



17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden 1111

17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas 1117

17.3 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden 1125

17.4 Soluciones en forma de series 1133

Repaso 1137

APÉNDICES A1

F Pruebas de teoremas A2

H Números complejos A5

i Respuestas a ejercicios impares A13

ÍNDICE A41

PÁGINAS DE REFERENCIA

PREFACIO

> Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El problema del lector puede ser modesto, pero desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas; si lo resuelve por sí solo puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento.
>
> GEORGE POLYA

El arte de enseñar, dijo Mark Van Doren, es el arte de ayudar en un descubrimiento. He tratado de escribir un libro que ayude a estudiantes a descubrir el cálculo, por su poder práctico y sorprendente belleza. En esta edición, al igual que en las primeras cinco ediciones, mi meta es expresar al estudiante un sentido de la utilidad del cálculo y desarrollar competencia técnica en él, pero también me esfuerzo en dar alguna apreciación de la belleza intrínseca de esta materia. Es indudable que Newton experimentó una sensación de triunfo cuando hizo sus grandes descubrimientos. Mi deseo es que el estudiante comparta en algo esa emoción.

El énfasis está en entender conceptos. Creo que casi todos estamos de acuerdo en que éste debe ser el objetivo principal de aprender cálculo. De hecho, el ímpetu para el actual movimiento de reforma del cálculo provino de la Conferencia de Tulane de 1986, que formuló como su primera recomendación:

Concentrarse en entender conceptos

He tratado de poner en práctica esta meta a través de la *regla de tres*: "Los temas deben presentarse de manera geométrica, numérica y algebraica." La visualización, la experimentación numérica y gráfica, y otros métodos, han cambiado de modo fundamental la forma en que enseñamos el razonamiento conceptual. Más recientemente, la regla de tres se ha expandido para convertirse en la *regla de cuatro* al resaltar también el punto de vista verbal, o descriptivo.

Al escribir la sexta edición, mi promesa ha sido que es posible lograr la comprensión de conceptos y retener todavía las mejores tradiciones del cálculo tradicional. El libro contiene elementos de reforma, pero dentro del contexto de un currículo tradicional.

VERSIONES ALTERNATIVAS

He escrito otros libros de cálculo que podrían ser preferidos por algunos profesores. Casi todos ellos vienen en versiones de una variable y de varias variables.

- *Cálculo,* sexta edición, es semejante al presente libro con excepción de que las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas se tratan en el segundo semestre.
- *Cálculo esencial* es un libro mucho más breve (800 páginas), aun cuando contiene casi todos los temas del presente libro. La brevedad relativa se alcanza por medio de exposiciones más breves de algunos temas y poniendo algunos elementos en el sitio web.
- *Cálculo esencial: trascendentes tempranas* se asemeja al *Cálculo esencial,* pero las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas se tratan en el capítulo 3.

- *Cálculo: conceptos y contextos,* tercera edición, destaca la comprensión de conceptos con más vehemencia incluso que este libro. El tratamiento de temas no es enciclopédico, y el material sobre funciones trascendentes y sobre ecuaciones paramétricas se entrelaza en todo el libro, en lugar de tratarlo en capítulos separados.

- *Cálculo: primeros vectores* introduce vectores y funciones vectoriales en el primer semestre y los integra en todo el libro. Es apropiado para estudiantes que toman cursos de ingeniería y física de modo concurrente con cálculo.

LO NUEVO EN LA SEXTA EDICIÓN

Veamos a continuación algunos de los cambios para la sexta edición de *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas:*

- Las secciones 11.10 y 11.11 se unen en una sola. Previamente, yo había descrito la serie del binomio en su propia sección para destacar su importancia, pero me enteré que algunos profesores estaban omitiendo esta sección, de modo que decidí incorporar la serie del binomio en la 11.10.
- El material en coordenadas cilíndricas y esféricas (antes sección 12.7) se movió al capítulo 15, donde se introduce en el contexto de la evaluación de las integrales triples.
- Se han agregado nuevas frases y notas marginales para aclarar la exposición.
- Se han vuelto a dibujar nuevas figuras.
- Los datos en ejemplos y ejercicios se han actualizado para ser más oportunos.
- Se han incluido pasos adicionales en algunos de los problemas existentes.
- Más del 25% de los ejercicios de cada uno de los capítulos es nuevo. He aquí algunos de mis favoritos: 11.11.30, 14.5.44 y 14.8.20-21.
- También hay algunos buenos problemas nuevos en las secciones de problemas adicionales. Observen, por ejemplo, el problema 24 de la página 763.
- El Tools for Enriching Calculus (TEC) se ha rediseñado por completo y está accesible en el Internet en www.stewartcalculus.com. Ahora incluye lo que llamamos visuales, que son breves animaciones de diversas figuras del texto. Véase la descripción en la página xi.

SECCIONES

EJERCICIOS CONCEPTUALES

La forma más importante de favorecer la comprensión de conceptos es por medio de los problemas que dejamos de tareas, para cuyo fin hemos ideado diversos tipos de problemas. Algunos conjuntos de ejercicios empiezan con peticiones para que el estudiante explique los significados de los conceptos básicos de la sección. (Véase, por ejemplo, los primeros ejercicios de las secciones 14.2 y 14.3.) Del mismo modo, todas las secciones de repaso empiezan con una *revisión de conceptos* y *preguntas de verdadero-falso*. Otros ejercicios someten a prueba la comprensión de conceptos mediante gráficas o tablas (vea ejercicios 10.1.24–27, 11.10.2, 13.2.1–2, 13.3.33–37, 14.1.1–2, 14.1.30–38, 14.3.3–10, 14.6.1–2, 14.7.3–4, 15.1.5–10, 16.1.11–18, 16.2.17–18 y 16.3.1–2)).

CONJUNTO DE EJERCICIOS CALIFICADOS Cada uno de los conjuntos de ejercicios se califica cuidadosamente, avanzando desde ejercicios básicos de conceptos y problemas para desarrollo de habilidades hasta problemas de mayor grado de dificultad que comprenden aplicaciones y pruebas.

DATOS REALES Mis ayudantes y yo hemos pasado mucho tiempo en bibliotecas, en empresas y oficinas gubernamentales, y buscando información real en Internet para presentar, motivar e ilustrar los conceptos de cálculo. Como resultado de esto, muchos de los problemas y ejercicios hablan de funciones definidas por esta información numérica o gráficas. Por ejemplo, las funciones de dos variables son ilustradas por una tabla de valores del índice de viento frío como una función de la temperatura y la velocidad del viento (ejemplo 2 de la sección 14.1). Las derivadas parciales son introducidas en la sección 14.3 con la revisión de una columna en una tabla de valores del índice de calor (temperatura percibida del aire) como una función de la temperatura actual y la humedad relativa. Este ejemplo está conectado con las aproximaciones lineales (ejemplo 3 de la sección 14.4). Las derivadas direccionales se introducen en la sección 14.6, utilizando un mapa de curvas de temperatura para estimar la razón de cambio de la temperatura de Reno en dirección a Las Vegas. Las integrales dobles son usadas para estimar el promedio de nevadas en Colorado durante el 20 y 21 de diciembre de 2006 (ejemplo 4 de la sección 15.1). Los campos vectoriales son introducidos en la sección 16.1 a través de representaciones actuales de los campos vectoriales de los patrones de la velocidad del viento en la bahía de San Francisco.

PROYECTOS Un modo de interesar a estudiantes y hacerlos lectores activos es hacerlos trabajar (quizá en grupos) en proyectos prolongados que den la sensación de un logro importante cuando se terminen. He incluido cuatro clases de proyectos: *Proyectos de aplicación* que comprenden aplicaciones diseñadas para apelar a la imaginación de estudiantes. El proyecto después de la sección 14.8 utiliza los multiplicadores de Lagrange para determinar la masa de las tres etapas del lanzamiento de un cohete, así como también minimizar la masa total mientras el cohete alcanza la velocidad deseada. Los *Proyectos de laboratorio* se refieren a tecnología; el que sigue de la sección 10.2 muestra cómo usar curvas de Bézier para diseñar formas que representan letras para una impresora láser. Los *Proyectos para un descubrimiento* exploran aspectos de la geometría: tetraédrica (después de la sección 12.4), hiperesferas (después de la sección 15.6) e intersecciones de tres cilindros (después de la sección 15.7). La *Redacción de un proyecto*, después de la sección 17.8 explora los orígenes históricos y físicos del teorema de Green y del teorema de Stokes y la interacción de los hombres involucrados.

TECNOLOGÍA La disponibilidad de tecnología no hace menos importante, sino más importante, entender claramente los conceptos que son las bases de las imágenes que aparecen en pantalla. Cuando se usan en forma adecuada, las calculadoras de gráficas y las computadoras son poderosas herramientas para descubrir y entender esos conceptos. Este texto se puede usar con o sin tecnología y aquí uso dos símbolos especiales para indicar con claridad cuándo se requiere un tipo particular de máquina. El icono indica un ejercicio que en forma definitiva requiere el uso de esta tecnología, pero no es para indicar que no se puede usar también en los otros ejemplos. El símbolo CAS se reserva para problemas en los que se requieren todos los recursos de un sistema computarizado de álgebra (como Derive, Maple, Mathematica, o TI-89/92). Con todo, la tecnología no deja obsoletos al lápiz y papel. A veces son preferibles los cálculos y dibujos hechos manualmente para ilustrar y reforzar algunos conceptos. Tanto profesores como estudiantes necesitan desarrollar la capacidad de decidir cuándo es apropiada la mano o una máquina.

TOOLS FOR ENRICHING CALCULUS El TEC es un compañero de este libro de texto y está pensado para enriquecer y complementar su contenido. (Ahora está accesible por Internet en www.stewartcalculus.com.) Creado por Harvey Keynes, Dan Clegg, Hubert Hohn y por mí, el TEC utiliza un método de descubrimiento y exploración. En algunas secciones de este libro en donde la tecnología es particularmente apropiada, los iconos situados a los márgenes dirigen a estudiantes a módulos del TEC que dan un ambiente de laboratorio en el que pueden explorar el tema en formas diferentes y a niveles diferentes. *Visual* son animaciones de figuras del texto;

Module son actividades más elaboradas e incluyen ejercicios. Los profesores pueden escoger participar en varios niveles diferentes, que van desde simplemente estimular al estudiante a usar Visual y Module para exploración independiente, hasta asignar ejercicios específicos de los incluidos en cada Module, o para crear ejercicios adicionales, laboratorios, y proyectos que hacen uso de Visual y Module.

El TEC también incluye *Homework Hints* para ejercicios representativos (por lo general de números impares) en cada una de las secciones de este libro, indicados al imprimir en rojo el número del ejercicio. Estas sugerencias suelen presentarse en forma de preguntas y tratan de imitar un asistente efectivo de enseñanza al funcionar como profesor particular silencioso. Los ejercicios están construidos para no revelar más de la solución real de lo que es el mínimo necesario para avanzar más.

WEBASSIGN MEJORADO

La tecnología está teniendo impacto en la forma en que se asignan tareas a estudiantes, sobre todo en grupos numerosos. El uso de tareas en línea es creciente y su interés depende de la facilidad de uso, precisión en calificación y confiabilidad. Con la sexta edición hemos estado trabajando con la comunidad de cálculo y WebAssign para crear un sistema de tareas en línea. Hasta 70% de los ejercicios de cada sección son asignables a tareas en línea, incluyendo formatos de respuesta libre, opción múltiple y partes diversas. Algunas preguntas son problemas de partes diversas sobre simulaciones de los Module del TEC.

El sistema también incluye *ejemplos activos*, en los que los estudiantes son guiados en el material didáctico paso a paso por ejemplos del texto, con vínculos al libro de texto y soluciones en video.

PÁGINA WEB
www.stewartcalculus.com

Este sitio se ha renovado y ahora incluye lo siguiente:

- Repaso de álgebra
- Miente mi Calculadora y la Computadora me Dijo
- Historia de las matemáticas, con vínculos a los mejores sitios web históricos
- Temas adicionales (completos con conjuntos de ejercicios): series de Fourier, fórmulas para el resto del semestre en series de Taylor, rotación de ejes
- Problemas archivados (ejercicios de práctica que aparecieron en ediciones anteriores, junto con sus soluciones)
- Problemas de desafío (algunos de las secciones de *Problemas adicionales* de ediciones anteriores)
- Vínculos, para temas en particular, a fuentes externas de la Web
- Las Tools for Enriching Calculus (TEC), Module, Visual y Homework Hints

CONTENIDO

10 ■ Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Este capítulo introduce curvas paramétricas y polares y aplica los métodos del cálculo a ellas. Las curvas paramétricas son apropiadas para proyectos de laboratorio; las dos que aquí se presentan comprenden familias de curvas y curvas de Bézier. Un breve tratamiento de secciones cónicas en coordenadas polares prepara el camino para las leyes de Kepler en el capítulo 13.

11 ■ Sucesiones y series infinitas

Las pruebas de convergencia tienen justificaciones intuitivas (véase página 697) así como pruebas formales. Las estimaciones numéricas de sumas de series están basadas en cuál prueba se usó para demostrar una convergencia. El énfasis está en la serie y polinomios de Taylor y sus aplicaciones a la física. Las estimaciones de error incluyen los de aparatos de gráficas.

12 ■ Vectores y la geometría del espacio

El material tridimensional de geometría analítica y vectores está dividido en dos capítulos. El capítulo 12 trata con vectores, producto punto y producto cruz, líneas, planos y superficies.

13 ■ Funciones vectoriales

Este capítulo cubre funciones valuadas como vectores, sus derivadas e integrales, la longitud y curvatura de un espacio de curvas y la velocidad y la aceleración a lo largo de ese espacio, terminando en las leyes de Kepler.

14 ■ Derivadas parciales

Funciones de dos o más variables son estudiadas de forma verbal, numérica, visual y desde el punto de vista algebraico. En particular, introduzco las derivadas parciales examinando una columna específica en una tabla de valores del índice de calor (percibido en la temperatura del aire) como una función de la temperatura actual y de la humedad relativa. Las derivadas parciales son empleadas para estimar curvas en mapas de temperatura, presión y nevadas.

15 ■ Integrales múltiples

Los mapas de contorno y la regla del punto medio, son utilizados para estimar el promedio de nevadas y de temperaturas en regiones dadas. Las integrales dobles y triples son empleadas para calcular probabilidades, áreas y superficies, y (en proyectos) volúmenes de hiperesferas y de la intersección de tres cilindros. Las coordenadas cilíndricas y esféricas son introducidas en el contexto de la evaluación de las integrales dobles y triples.

16 ■ Cálculo vectorial

Los campos vectoriales son introducidos a través de ilustraciones de los campos de velocidad del viento y sus patrones en la bahía de San Francisco. Se hace énfasis en las similitudes con el teorema fundamental para integrales de línea, el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

17 ■ Ecuaciones diferenciales de segundo orden

A partir de las ecuaciones diferenciales de primer orden, vistas en el capítulo 9, este capítulo final trata con las ecuaciones diferenciales de segundo orden, sus aplicaciones en la vibración de resortes, circuitos eléctricos y solución de series.

MATERIAL AUXILIAR

Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas, sexta edición, está apoyado por un conjunto completo de materiales auxiliares creados bajo mi dirección. Cada parte se ha diseñado para mejorar la comprensión del estudiante y para facilitar una enseñanza creativa.

MATERIAL DE APOYO PARA EL PROFESOR

Este libro cuenta con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio a clientes en las siguientes direcciones de correo electrónico:

Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
Cengage Learning Pacto Andino	clientes.pactoandino@cengage.com

Los recursos disponibles se encuentran disponibles en el sitio web del libro:

http://latinoamerica.cengage.com/stewart6

Las direcciones de los sitios web referidas en el texto no son administradas por Cengage Learning Latinoamérica, por lo que ésta no es responsable de los cambios o actualizaciones de las mismas.

REVISIÓN DE LA SEXTA EDICIÓN

Marilyn Belkin, *Villanova University*
Philip L. Bowers, *Florida State University*
Amy Elizabeth Bowman, *University of Alabama in Huntsville*
M. Hilary Davies, *University of Alaska Anchorage*
Frederick Gass, *Miami University*
Paul Triantafilos Hadavas, *Armstrong Atlantic State University*
Nets Katz, *Indiana University Bloomington*
James McKinney, *California State Polytechnic University, Pomona*
Martin Nakashima, *California State Polytechnic University, Pomona*
Lila Roberts, *Georgia College and State University*

He sido muy afortunado por haber trabajado con algunos de los mejores editores de matemáticas en el negocio por más de dos décadas: Ron Munro, Harry Campbell, Craig Barth, Jeremy Hayhurst, Gary Ostedt y ahora, Bob Pirtle. Bob continúa en esta tradición de editores quienes mientras escuchan consejos y ofrecen una amplia ayuda, confían en mis instintos y me permiten escribir los libros que deseo escribir.

JAMES STEWART

AGRADECIMIENTOS

Asimismo, deseamos agradecer la valiosa colaboración de los profesores: Dr. Manuel Álvarez Blanco, MSc. José Ignacio Cuevas Gonzáles y MSc. Eduardo Fernandini Capurro, Profesores Principales del Área de Ciencias, de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (UPC) miembro del grupo Laureate International Universities, en la revisión de esta sexta edición en español.

ATENTAMENTE,

LOS EDITORES.

AL ESTUDIANTE

Leer un libro de cálculo es diferente a leer un periódico o una novela, o incluso un libro de física. No se desanime si tiene que leer un pasaje más de una vez para entenderlo. Debe tener lápiz, papel y calculadora a la mano para bosquejar un diagrama o hacer un cálculo.

Algunos estudiantes empiezan por tratar sus problemas de tarea y leen el texto sólo si se atoran en un ejercicio. Sugiero que un plan mucho mejor es leer y entender una sección del texto antes de abordar los ejercicios. En particular, el estudiante debe leer las definiciones para ver los significados exactos de los términos. Y antes de leer cada ejemplo, sugiero que llegue hasta la solución y trate de resolver el problema por sí mismo. Obtendrá mucho más de ver la solución si lo hace así.

Parte de la meta de este curso es capacitar al estudiante para pensar de una manera lógica. Aprenda a escribir las soluciones de los ejercicios de un modo enlazado y paso a paso con frases explicativas, no sólo una hilera de ecuaciones o fórmulas desconectadas.

Las respuestas a los ejercicios de números impares aparecen al final de este libro, en el apéndice I. Algunos ejercicios piden una explicación verbal o interpretación o descripción. En estos casos no una sola forma correcta de expresar la respuesta, de modo que no se preocupe por no hallar la respuesta definitiva. Además, a veces hay varias formas diferentes en las cuales se expresa una respuesta numérica o algebraica, de modo que si su respuesta difiere de la mía no suponga de inmediato que está en un error. Por ejemplo, si la respuesta dada en la parte final de este libro es $\sqrt{2} - 1$ y usted obtiene $1/(1 + \sqrt{2})$, entonces tiene razón y racionalizar el denominador demostrará que las respuestas son equivalentes.

El icono indica un ejercicio que definitivamente requiere el uso ya sea de una calculadora de gráficas o una computadora con software de gráficas. Con todo, esto no significa que los aparatos de gráficas no se puedan usar para comprobar el trabajo en los otros ejercicios. El símbolo CAS se reserva para problemas en los que se requieren todos los recursos de un sistema computarizado de álgebra (como el Derive, Maple, Mathematica, o la TI-89/92). También encontrará el símbolo ⊘ que advierte para no cometer un error. He puesto este símbolo en márgenes en situaciones donde he observado que una gran parte de mis estudiantes tienden a cometer el mismo error.

Al *Tools for Enriching Calculus*, que es compañero de este libro, se hace referencia mediante el símbolo **TEC** y se puede tener acceso al mismo en www.stewartcalculus.com. Dirige al estudiante a módulos en los que puede explorar aspectos de cálculo para los que la computadora es particularmente útil. El TEC también da *Homework Hints* para ejercicios representativos que están indicados con un número de ejercicio impreso en rojo: **15.** Estas sugerencias de tarea hacen preguntas al estudiante que le permiten avanzar hacia una solución sin dar en realidad su respuesta. El lector tiene que seguir cada una de las sugerencias de una manera activa con papel y lápiz para trabajar los detalles. Si una sugerencia en particular no lo hace capaz de resolver un problema, puede hacer *clic* para ver la siguiente sugerencia.

Recomiendo que conserve este libro como referencia después que termine el curso. Debido a que es probable que el lector olvide algunos de los detalles específicos del cálculo, el libro servirá como un útil recordatorio cuando necesite usar cálculo en cursos subsiguientes. También, como este libro contiene más material del que se puede cubrir en cualquier curso, puede servir como un valioso recurso para cualquier científico o ingeniero.

El cálculo es una materia extraordinaria, justamente considerada como uno de los mayores logros de la mente humana. Espero que el lector descubra que no es sólo útil sino también intrínsecamente hermoso.

JAMES STEWART



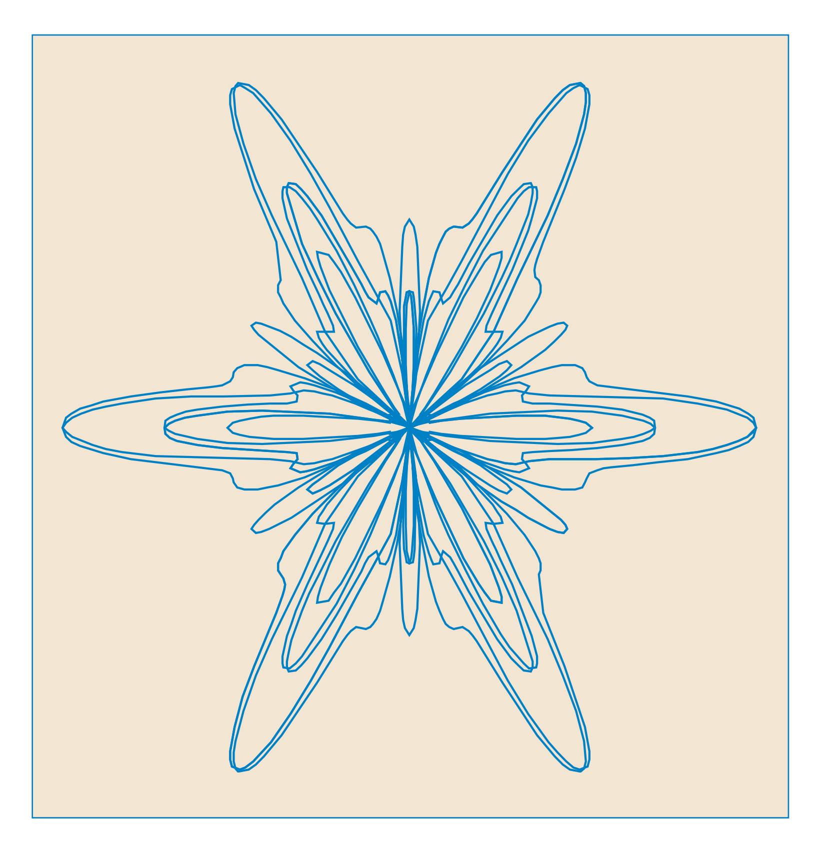
CÁLCULO

DE VARIAS VARIABLES

Trascendentes tempranas

10

ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES



Las ecuaciones paramétricas y coordenadas polares hacen posible la descripción de una amplia variedad de nuevas curvas, algunas prácticas, algunas hermosas, algunas extravagantes, algunas extrañas.

Hasta el momento se han descrito curvas planas dando a y como una función de x $[y = f(x)]$ o x como una función de y $[x = g(y)]$ o dando una relación entre x y y que define a y implícitamente como una función de x $[f(x, y) = 0]$. En este capítulo se analizan dos nuevos métodos para describir curvas.

Algunas curvas, como la cicloide, se manejan mejor cuando x y y se dan en términos de una tercera variable t llamada parámetro $[x = f(t),\ y = g(t)]$. Otras curvas, como la cardioide, tienen su descripción más conveniente cuando se usa un nuevo sistema coordenado, llamado sistema de coordenadas polares.

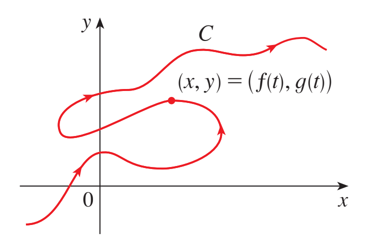


FIGURA 1

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C mostrada en la figura 1. Es imposible describir C por una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C no pasa la prueba de la línea vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo y, por lo tanto, se puede escribir $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Tal par de ecuaciones suele ser una forma conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.

Suponga que x y y se dan como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que se puede representar en un sistema coordenado. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, a la cual se le llama **curva paramétrica**. El parámetro t no necesariamente representa el tiempo y, de hecho, se podría usar una letra distinta a t para el parámetro. Pero en muchas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota el tiempo y, por lo tanto, se puede interpretar a $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Bosqueje e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUCIÓN Cada valor de t da un punto sobre la curva, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, si $t = 0$, en tal caso $x = 0$, $y = 1$; así, el punto correspondiente es $(0, 1)$. En la figura 2 se grafican los puntos (x, y) determinados por varios valores del parámetro y se unen para producir una curva.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

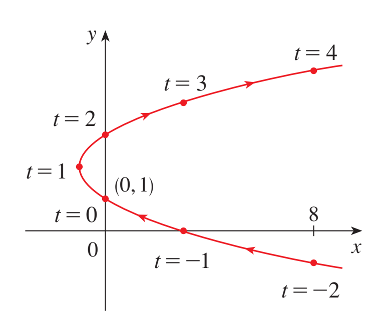


FIGURA 2

Una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas, se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas a medida que se incrementa t. Note que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen a intervalos de tiempo iguales, pero no a iguales distancias. Esto es porque la partícula desacelera y después acelera a medida que aumenta t.

Según se observa de la figura 2, la curva trazada por la partícula puede ser una parábola. Esto se puede confirmar al eliminar el parámetro t como sigue. Se obtiene $t = y - 1$ de la segunda ecuación y se sustituye en la primera. Esto da

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y, por lo tanto, la curva representada por las ecuaciones paramétricas es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$. □

■ Esta ecuación en x y y describe *dónde* ha estado la partícula, pero no dice *cuándo* es que la partícula estuvo en un punto en particular. Las ecuaciones paramétricas tienen una ventaja: dicen *cuándo* estuvo la partícula en un punto. También indican la *dirección* del movimiento.

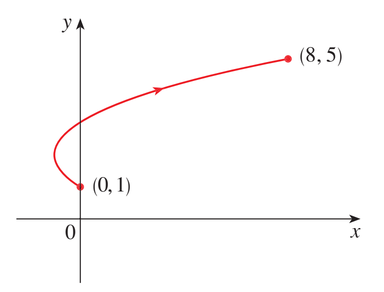


FIGURA 3

En el ejemplo 1 el parámetro t fue irrestricto, así que se supone que t podría ser cualquier número real. Pero algunas veces t se restringe a estar en un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

mostrada en la figura 3 es la parte de la parábola del ejemplo 1 que empieza en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La cabeza de flecha indica la dirección en la que se traza la curva cuando t crece de 0 a 4.

En general, la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tiene **punto inicial** $(f(a), g(a))$ y **punto terminal** $(f(b), g(b))$.

V EJEMPLO 2 ¿Qué curva se representa mediante las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

SOLUCIÓN Si se grafican los puntos, la curva parece un círculo. Esta impresión se confirma al eliminar t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Así, el punto (x, y) se mueve en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Observe que en este ejemplo el parámetro t se puede interpretar como el ángulo (en radianes) mostrado en la figura 4. Cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve una vez alrededor del círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en el punto (1, 0).

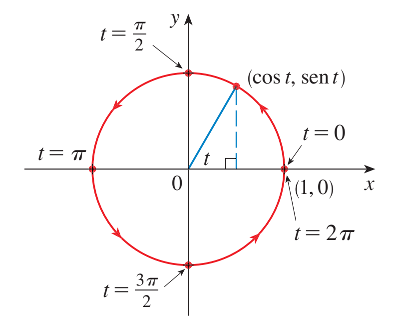


FIGURA 4

□

EJEMPLO 3 ¿Qué curva se representa mediante las ecuaciones paramétricas? $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

SOLUCIÓN De nuevo se tiene

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

de modo que las ecuaciones paramétricas representan el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Pero cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ comienza en (0, 1) y se mueve *dos veces* alrededor del círculo en la dirección de las manecillas del reloj como se indica en la figura 5. □

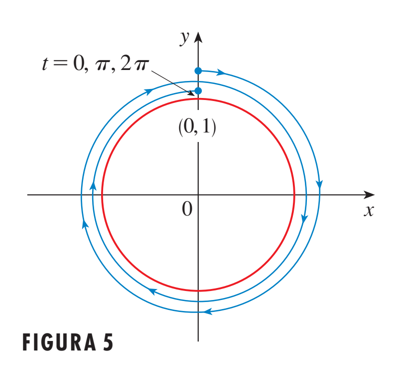


FIGURA 5

En los ejemplos 2 y 3 se muestra que los diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden representar la misma curva. Así, se distingue entre una *curva*, que es un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica*, en la cual los puntos se trazan de una manera particular.

EJEMPLO 4 Encuentre ecuaciones paramétricas para el círculo con centro (h, k) y radio r.

SOLUCIÓN Si toma las ecuaciones del círculo unitario del ejemplo 2 y multiplica por r las expresiones para x y y, obtiene $x = r\cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Se puede verificar que estas ecuaciones representan un círculo con radio r y centrar el origen trazado en sentido contrario a las manecillas del reloj. Ahora desplace h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y para obtener ecuaciones paramétricas del círculo (figura 6) con centro (h, k) y radio r:

$$x = h + r\cos t \qquad y = k + r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \geqslant 2\pi$$

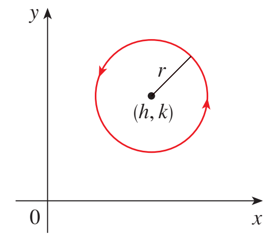


FIGURA 6
$x = h + r\cos t,\ y = k + r \operatorname{sen} t$

□

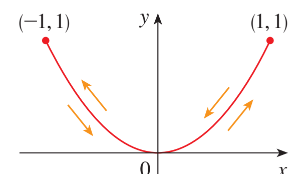


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Bosqueje la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUCIÓN Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ y, por lo tanto, el punto (x, y) se mueve sobre la parábola $y = x^2$. Sin embargo, note también que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant x \leqslant 1$; así, las ecuaciones paramétricas representan sólo la parte de la parábola para la cual $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Debido a que sen t es periódica, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se mueve en vaivén de manera infinita a lo largo de la parábola de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$. (Véase figura 7.) □

TEC Module 10.1A da una animación de la relación entre movimiento a lo largo de una curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ y el movimiento a lo largo de las gráficas de f y g como funciones de t. Con un clic en TRIG se obtiene la familia de curvas paramétricas

$$x = a\cos bt \qquad y = c \operatorname{sen} dt$$

Si elige $a = b = c = d = 1$ y da clic en START, se verá cómo las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ se relacionan con el círculo del ejemplo 2. Si elige $a = b = c = 1$, $d = 2$, verá gráficas como en la figura 8. Si se da clic en animación ó movimiento t hacia la derecha, se puede ver del código de colores cómo el movimiento de las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} 2t$ corresponde al movimiento a lo largo de la curva paramétrica, la cual se llama **figura de Lissajous.**

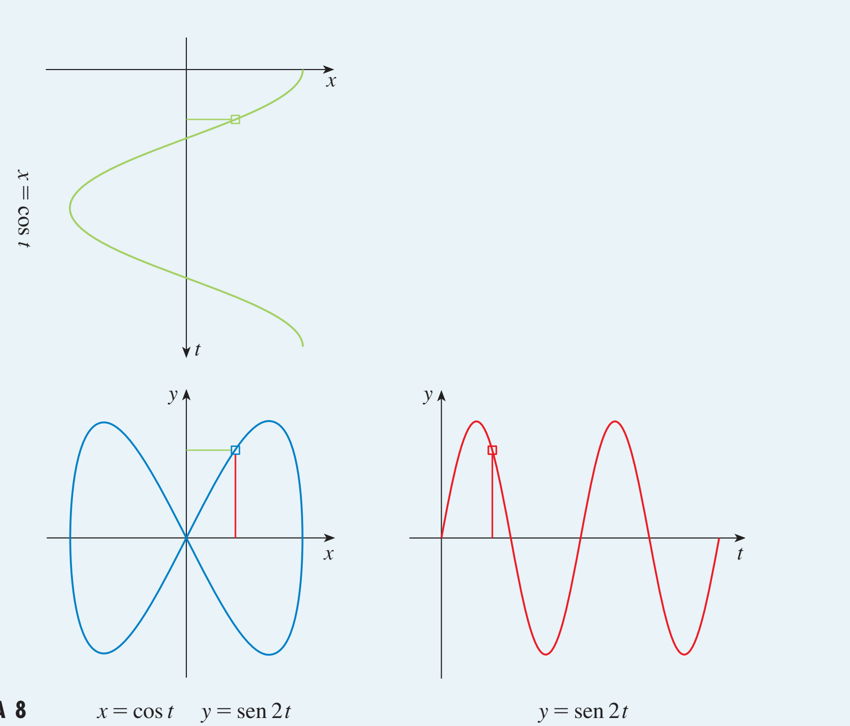


FIGURA 8 $x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \operatorname{sen} 2t$

DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN

La mayor parte de las calculadoras y los programas de graficación se pueden usar para graficar curvas definidas por ecuaciones paramétricas. De hecho, es instructivo observar una curva paramétrica que es dibujada con una calculadora, porque los puntos se trazan en orden a medida que se incrementan los valores de parámetro correspondientes.

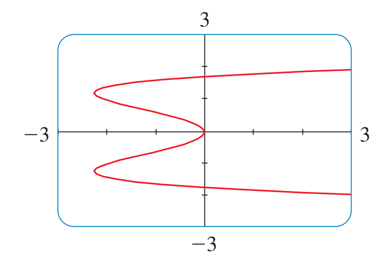


FIGURA 9

EJEMPLO 6 Emplee un dispositivo de graficación para trazar la curva $x = y^4 + 3y^2$.

SOLUCIÓN Si se permite que el parámetro sea $t = y$, en seguida se tienen las ecuaciones

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

Al usar estas ecuaciones paramétricas para trazar la curva, se obtiene la figura 9. Sería posible resolver la ecuación dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como cuatro funciones de x y graficarlas de forma individual, pero las ecuaciones paramétricas proveen un método más fácil. □



En general, si se requiere hacer la gráfica de una ecuación de la forma $x = g(y)$, se pueden usar las ecuaciones paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe también que las curvas con ecuaciones $y = f(x)$ (aquellas con las que se está más familiarizado, gráficas de funciones) se pueden considerar también como curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Los dispositivos de graficación son particularmente útiles cuando se bosquejan curvas complicadas. Por ejemplo, las curvas mostradas en las figuras 10, 11 y 12, serían virtualmente imposibles de producir a mano.

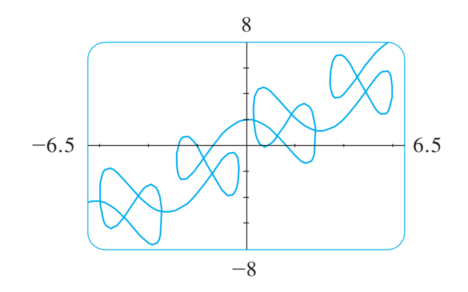


FIGURA 10
$x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$
$y = t + 2 \cos 5t$

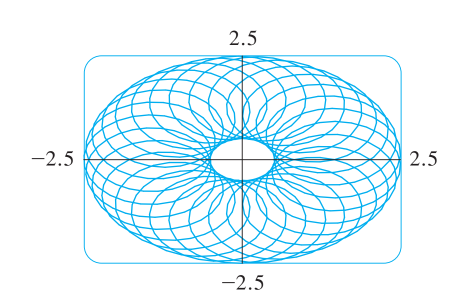


FIGURA 11
$x = 1.5 \cos t - \cos 30t$
$y = 1.5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 30t$

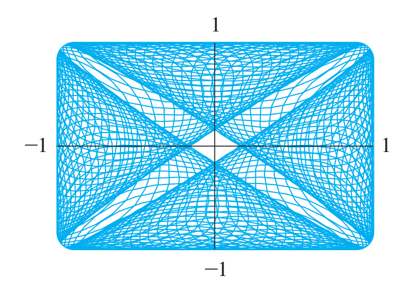


FIGURA 12
$x = \operatorname{sen}(t + \cos 100t)$
$y = \cos(t + \operatorname{sen} 100t)$

Uno de los usos más importantes de las curvas paramétricas es en el diseño auxiliado por computadora (CAD). En el proyecto de laboratorio después de la sección 10.2, se investigarán curvas paramétricas especiales, llamadas **curvas de Bézier**, que se usan de manera extensa en manufactura, en particular en la industria automotriz. Estas curvas se usan también para especificar formas de letras y otros símbolos en impresoras láser.

LA CICLOIDE

TEC Una animación en Module 10.1B, muestra cómo se forma la cicloide cuando se mueve el círculo.

EJEMPLO 7 La curva trazada por un punto P sobre la circunferencia de un círculo cuando el círculo rueda a lo largo de una recta se llama **cicloide** (véase fig. 13). Si el círculo tiene radio r y rueda a lo largo del eje x, y si una posición de P está en el origen, determine las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

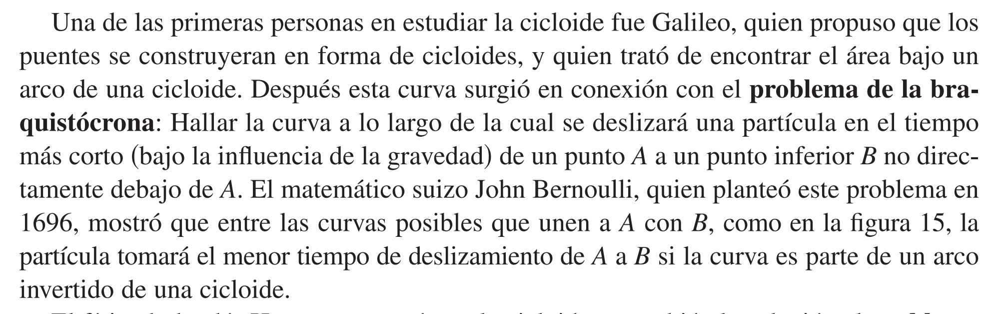


FIGURA 13

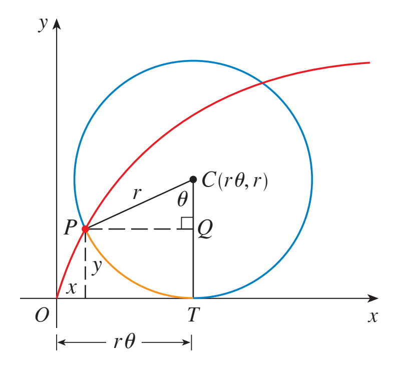


FIGURA 14

SOLUCIÓN Se elige como parámetro el ángulo de rotación θ del círculo ($\theta = 0$ cuando P está en el origen). Suponga que el círculo ha girado θ radianes. Debido a que el círculo ha estado en contacto con la línea, se ve de la figura 14, que la distancia que ha rodado desde el origen es

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Por lo tanto, el centro del círculo es $C(r\theta, r)$. Sean (x, y) las coordenadas de P. Por lo tanto, de la figura 14 se ve que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta)$$

Debido a eso, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

1 $$x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = r(1 - \cos \theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco de la cicloide viene de una rotación del círculo y, por lo tanto, se describe mediante $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Aunque las ecuaciones 1 se derivaron de la figura 14, que ilustra el caso donde $0 < \theta < \pi/2$, se puede ver que estas ecuaciones aún son válidas para otros valores de θ (véase el ejercicio 39).

Aunque es posible eliminar el parámetro θ de las ecuaciones 1, la ecuación cartesiana resultante en x y y es muy complicada y no es conveniente para trabajar como las ecuaciones paramétricas. □

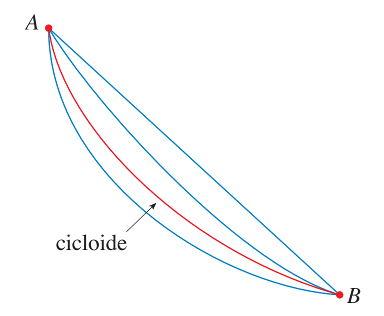


FIGURA 15

Una de las primeras personas en estudiar la cicloide fue Galileo, quien propuso que los puentes se construyeran en forma de cicloides, y quien trató de encontrar el área bajo un arco de una cicloide. Después esta curva surgió en conexión con el **problema de la braquistócrona**: Hallar la curva a lo largo de la cual se deslizará una partícula en el tiempo más corto (bajo la influencia de la gravedad) de un punto A a un punto inferior B no directamente debajo de A. El matemático suizo John Bernoulli, quien planteó este problema en 1696, mostró que entre las curvas posibles que unen a A con B, como en la figura 15, la partícula tomará el menor tiempo de deslizamiento de A a B si la curva es parte de un arco invertido de una cicloide.

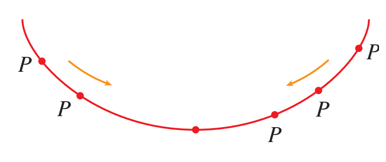


FIGURA 16

El físico holandés Huygens mostró que la cicloide es también la solución al **problema de la tautócrona**; es decir, sin importar dónde se coloque una partícula P en una cicloide invertida, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase fig. 16). Huygens propuso que los relojes de péndulo (que él inventó) oscilaran en arcos cicloidales, porque en tal caso el péndulo tarda el mismo tiempo en completar una oscilación si oscila por un arco amplio o pequeño.

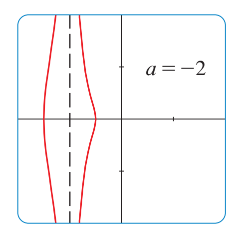
FAMILIAS DE CURVAS PARAMÉTRICAS

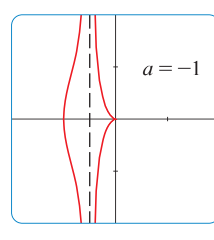
V EJEMPLO 8 Investigue la familia de curvas con ecuaciones paramétricas

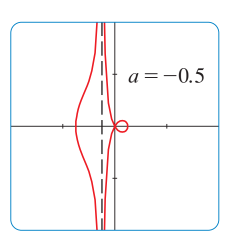
$$x = a + \cos t \qquad y = a \tan t + \operatorname{sen} t$$

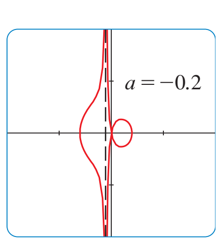
¿Qué tienen en común estas curvas? ¿Cómo cambia la curva cuando se incrementa a?

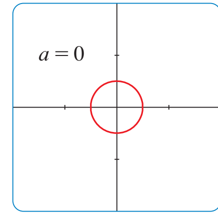
SOLUCIÓN Se emplea un dispositivo de graficación para producir las gráficas para los casos $a = -2, -1, -0.5, -0.2, 0, 0.5, 1$ y 2 mostradas en la figura 17. Observe que todas estas curvas (excepto el caso $a = 0$) tienen dos ramas, y ambas se aproximan a la asíntota vertical $x = a$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o la derecha.

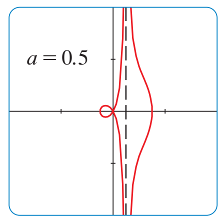


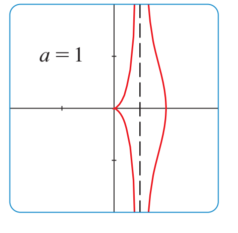












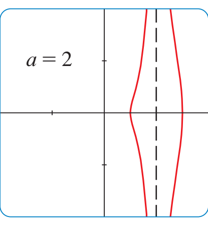


FIGURA 17 Miembros de la familia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \operatorname{sen} t$, graficados en el rectángulo de visión $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Cuando $a < -1$, ambas ramas son uniformes, pero cuando a llega a -1, la rama derecha adquiere un punto definido, llamado *cúspide*. Para a entre -1 y 0 la cúspide se vuelve un bucle, que se vuelve más grande conforme a se aproxima a 0. Cuando $a = 0$, ambas ramas se juntan y forman un círculo (véase el ejemplo 2). Para a entre 0 y 1, la rama izquierda tiene un bucle, que se contrae para volverse una cúspide cuando $a = 1$. Para $a > 1$, las ramas se alisan de nuevo y, cuando a se incrementa más, se vuelven menos curvas. Observe que las curvas con a positiva son reflexiones respecto al eje y de las curvas correspondientes con a negativa.

Estas curvas se llaman **concoides de Nicomedes** en honor del erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la de una concha de un caracol o de un mejillón. □

10.1 EJERCICIOS

1–4 Bosqueje la curva por medio de las ecuaciones paramétricas para trazar puntos. Indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando crece t.

1. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 4t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

2. $x = 2 \cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

3. $x = 5 \operatorname{sen} t, \quad y = t^2, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^t - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

5–10
(a) Bosqueje la curva usando las ecuaciones paramétricas para trazar puntos. Indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando aumenta t.
(b) Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 3t - 5, \quad y = 2t + 1$

6. $x = 1 + t, \quad y = 5 - 2t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 3$

7. $x = t^2 - 2, \quad y = 5 - 2t, \quad -3 \leqslant t \leqslant 4$

8. $x = 1 + 3t, \quad y = 2 - t^2$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

10. $x = t^2, \quad y = t^3$

11–18
(a) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.
(b) Bosqueje la curva e indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando crece el parámetro.

11. $x = \operatorname{sen} \theta, \quad y = \cos \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = 4 \cos \theta, \quad y = 5 \operatorname{sen} \theta, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^t - 1, \quad y = e^{2t}$

15. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

16. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geqslant 1$

17. $x = \operatorname{senh} t, \quad y = \cosh t$

18. $x = 2\cosh t, \quad y = 5\,\text{senh}\, t$

19–22 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo especificado.

19. $x = 3 + 2\cos t, \quad x = 1 + 2\,\text{sen}\, t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

20. $x = 2\,\text{sen}\, t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

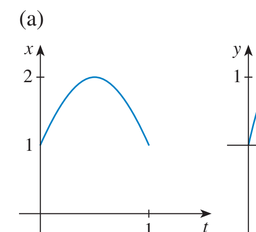
21. $x = 5\,\text{sen}\, t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

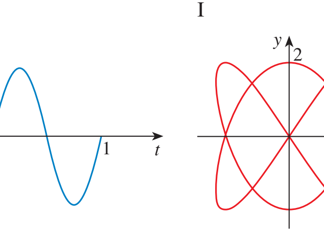
22. $x = \text{sen}\, t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

23. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el intervalo de f es $[1, 4]$ y el de g es $[2, 3]$. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?

24. Compare las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $g(t)$ en (a)-(d) con las curvas paramétricas I-IV. Dé razones para sus elecciones.

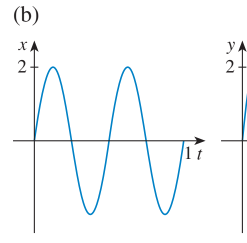
(a)

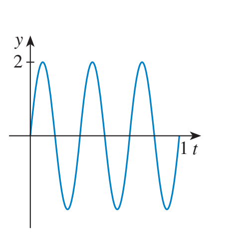




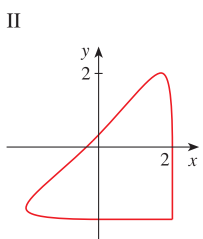
I

(b)

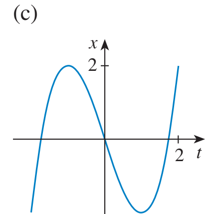


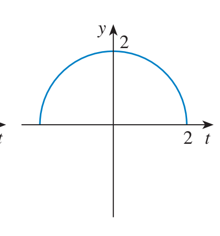


II

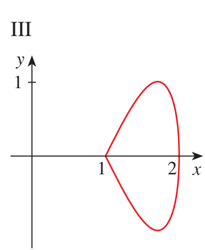


(c)

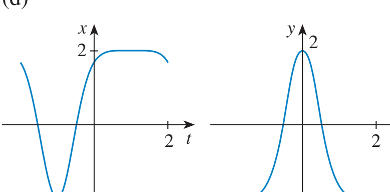


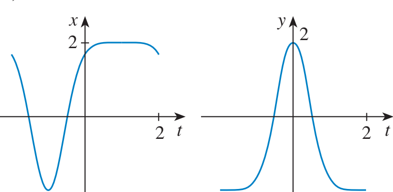


III

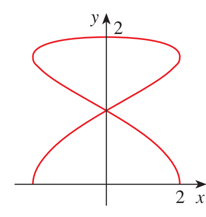


(d)



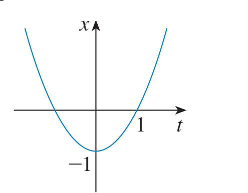


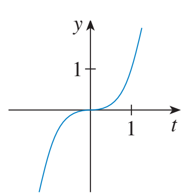
IV



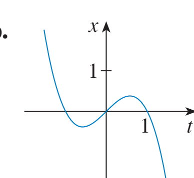
25–27 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando crece t.

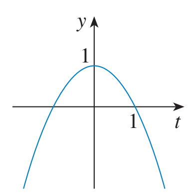
25.



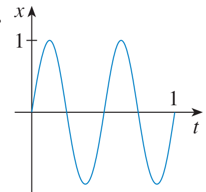


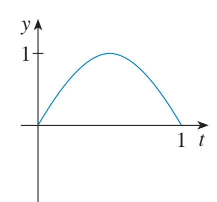
26.





27.





28. Compare las ecuaciones paramétricas con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No use un dispositivo de graficación.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

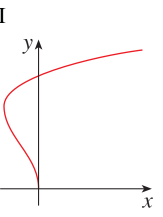
(c) $x = \text{sen}\, 2t, \quad y = \text{sen}\,(t + \text{sen}\, 2t)$

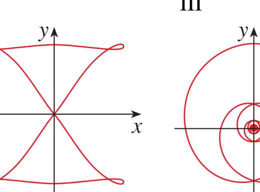
(d) $x = \cos 5t, \quad y = \text{sen}\, 2t$

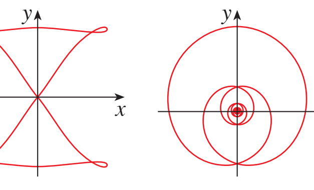
(e) $x = t + \text{sen}\, 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\text{sen}\, 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$

I II III

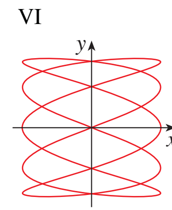






IV V VI





29. Grafique la curva $x = y - 3y^3 + y^5$.

30. Grafique las curvas $y = x^5$ y $x = y(y - 1)^2$ y encuentre sus puntos de intersección correctos hasta un decimal.

31. (a) Muestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de línea que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para representar el segmento de línea de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

32. Use un dispositivo de graficación y el resultado del ejercicio 31(a) para dibujar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

33. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo del círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ en la manera descrita.

(a) Una vez en el sentido de las manecillas del reloj, empezando en (2, 1)

(b) Tres veces en sentido contrario de las manecillas del reloj, empezando en (2, 1)

(c) La mitad en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en (0, 3)

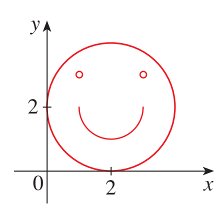
34. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia*: modifique las ecuaciones de un círculo del ejemplo 2.]

(b) Use estas ecuaciones paramétricas para hacer la gráfica de la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.

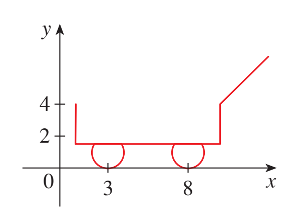
(c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse cuando varía b?

35–36 Use calculadora de gráficas o computadora para reproducir la figura.

35.



36.



37–38 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas. ¿Cómo difieren?

37. (a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

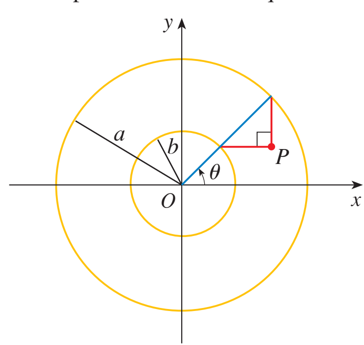
39. Deduzca las ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Sea P un punto a una distancia d del centro de un círculo de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo rueda a lo largo de una recta se llama **trocoide**. (Considere el movimiento de un punto sobre el rayo de una rueda de bicicleta.) La cicloide es el caso especial de una trocoide con $d = r$. Si se emplea el mismo parámetro θ que para la cicloide, y si se supone que la línea es el eje x y $\theta = 0$ cuando P está en uno de sus puntos mínimos, muestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

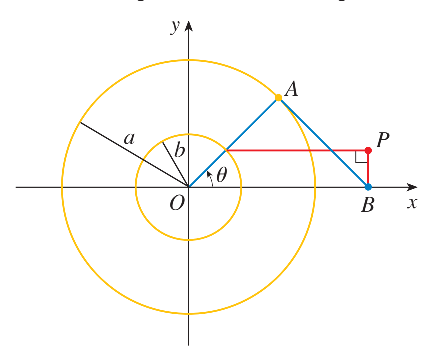
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Bosqueje la trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

41. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva que consta de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. Después elimine el parámetro e identifique la curva.



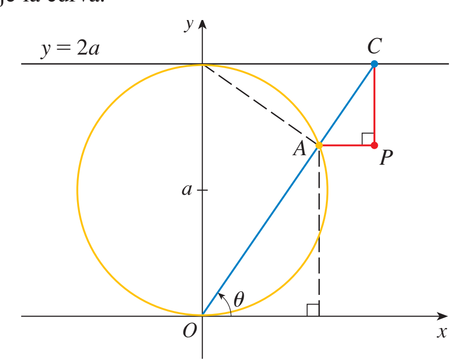
42. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consta de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. El segmento de línea AB es tangente al círculo más grande.



43. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste en todas las posiciones posibles del punto P en la figura. Muestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

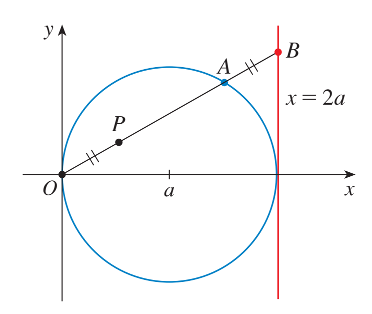
$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$$

Bosqueje la curva.



44. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consta de las posiciones posibles del punto P en la figura, donde $|OP| = |AB|$. Bosqueje la curva. (Esta curva se llama **cisoide de Diocles** en honor al sabio griego Diocles, quien introdujo la cisoide como un método gráfico para construir el lado de un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo específico.)

(b) Use la descripción geométrica de la curva para trazar manualmente un bosquejo burdo de la curva. Compruebe su trabajo con el uso de las ecuaciones paramétricas para graficar la curva.



45. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(a) Grafique las trayectorias de ambas partículas. ¿Cuántos puntos de intersección hay?

(b) ¿Algunos de estos puntos de intersección son *puntos de colisión*? En otras palabras, ¿están las partículas alguna vez en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, determine los puntos de colisión.

(c) Describa lo que sucede si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Si un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo a un ángulo α arriba de la horizontal y se supone que la resistencia del aire es insignificante, en tal caso su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2).

(a) Si se dispara una pistola con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo la bala colisionará con el suelo? ¿A qué distancia de la pistola chocará con el suelo? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala?

(b) Use un dispositivo de graficación para comprobar sus respuestas para el inciso (a). Después grafique la trayectoria del proyectil para otros valores del ángulo α con la finalidad de ver dónde choca con el suelo. Resuma sus hallazgos.

(c) Muestre que la trayectoria es parabólica mediante la eliminación del parámetro.

47. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma cuando se incrementa c? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

48. Las **curvas de catástrofe cola de golondrina** se definen mediante las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Grafique varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común estas curvas? ¿Cómo cambian cuando se incrementa c?

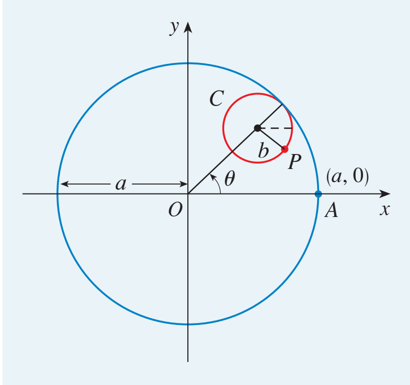
49. Las curvas con ecuaciones $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ se llaman **figuras de Lissajous**. Investigue cómo varían estas curvas cuando varían a, b y n. (Tome a n como un entero positivo).

50. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas. Empiece por hacer que c sea un entero positivo y ver lo que ocurre a la forma cuando c aumenta. Luego explore algunas de las posibilidades que se presentan cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO

CÍRCULOS QUE CORREN ALREDEDOR DE CÍRCULOS

En este proyecto se investigan familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que se generan por el movimiento de un punto sobre un círculo que rueda dentro o fuera de otro círculo.



TEC Examine Module 10.1B para ver cómo se forman las hipocicloides y epicicloides mediante el movimiento de círculos rodantes.

1. Una **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P sobre un círculo C de radio b cuando C rueda en el interior de un círculo con centro O y radio a. Muestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se elige como en la figura, en consecuencia las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right)$$

2. Use un dispositivo de graficación (o la gráfica interactiva del Module TEC 10.1B) para dibujar las gráficas de hipocicloides con a un entero positivo y $b = 1$. ¿Cómo afecta el valor de a a la gráfica? Muestre que si se toma $a = 4$, en tal caso las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se reducen a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\operatorname{sen}^3\theta$$

Esta curva se llama **hipocicloide de cuatro vértices** o **astroide**.

3. Ahora pruebe $b = 1$ y $a = n/d$, una fracción donde n y d no tienen factor común. Primero sea $n = 1$ e intente determinar gráficamente el efecto del denominador d en la forma de la gráfica. Entonces n varía mientras se mantiene a d constante. ¿Qué sucede cuando $n = d + 1$?

4. ¿Qué sucede si $b = 1$ y a es irracional? Experimente con un número irracional como $\sqrt{2}$ o $e - 2$. Tome valores cada vez más grandes para θ y especule acerca de lo que sucedería si se graficara la hipocicloide para todos los valores reales de θ.

5. Si el círculo C rueda en el *exterior* del círculo fijo, la curva trazada por P se llama **epicicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

6. Investigue las formas posibles para epicicloides. Use métodos similares para los problemas 2–4.

10.2 CÁLCULO CON CURVAS PARAMÉTRICAS

Una vez visto cómo representar ecuaciones paramétricas, ahora se aplican métodos de cálculo a estas curvas paramétricas. En particular, se resuelven problemas relacionados con tangentes, área, longitud de arco y área de superficie.

TANGENTES

En la sección anterior se vio que algunas curvas definidas por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ se pueden expresar también, al eliminar el parámetro, en la forma $y = F(x)$. (Véase en el ejercicio 67 las condiciones generales bajo las que esto es posible.) Si se sustituye $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en la ecuación $y = F(x)$, se obtiene

$$g(t) = F(f(t))$$

y, de esa manera, si g, F y f son derivables, la regla de la cadena da

$$g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t)$$

Si $f'(t) \neq 0$, se puede resolver $F'(x)$:

$$F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)} \tag{1}$$

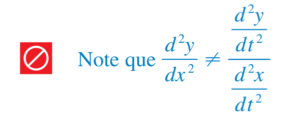
Puesto que la pendiente de la tangente a la curva $y = F(x)$ en $(x, F(x))$ es $F'(x)$, la ecuación 1 permite hallar tangentes a curvas paramétricas sin tener que eliminar el parámetro. Si se emplea la notación de Leibniz, se puede reescribir la ecuación 1 en una forma que se recuerda con facilidad:

■ Si se considera que una curva paramétrica es trazada por una partícula móvil, en tal caso dy/dt y dx/dt son las velocidades vertical y horizontal de la partícula, y la fórmula 2 dice que la pendiente de la tangente es la relación de estas velocidades.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0 \tag{2}$$

Se puede ver de la ecuación 2 que la curva tiene una tangente horizontal cuando $dy/dt = 0$ (siempre que $dx/dt \neq 0$) y tiene una tangente vertical cuando $dx/dt = 0$ (tomando en cuenta que $dy/dt \neq 0$). Esta información es útil para bosquejar curvas paramétricas.

Según se sabe del capítulo 4, también es útil considerar d^2y/dx^2. Esto se puede hallar si se reemplaza y por dy/dx en la ecuación 2:



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

EJEMPLO 1 Una curva C se define por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.
(a) Muestre que C tiene dos tangentes en el punto (3, 0) y encuentre sus ecuaciones.
(b) Determine los puntos en C donde la tangente es horizontal o vertical.
(c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
(d) Bosqueje una curva.

SOLUCIÓN
(a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ cuando $t = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$. Por lo tanto, el punto (3, 0) en C surge de dos valores del parámetro, $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$. Esto indica que C se cruza a sí misma en (3, 0). Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

la pendiente de la tangente cuando $t = \pm\sqrt{3}$ es $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$, de modo que las ecuaciones de las tangentes en (3, 0) son

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

(b) C tiene una tangente horizontal cuando $dy/dx = 0$, es decir, cuando $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. Puesto que $dy/dt = 3t^2 - 3$, esto sucede cuando $t^2 = 1$, es decir, $t = \pm 1$. Los puntos correspondientes en C son $(1, -2)$ y $(1, 2)$. C tiene una tangente vertical cuando $dx/dt = 2t = 0$, es decir, $t = 0$. (Note que $dy/dt \neq 0$). El punto correspondiente en C es (0, 0).



(c) Para determinar la concavidad, se calcula la segunda derivada:

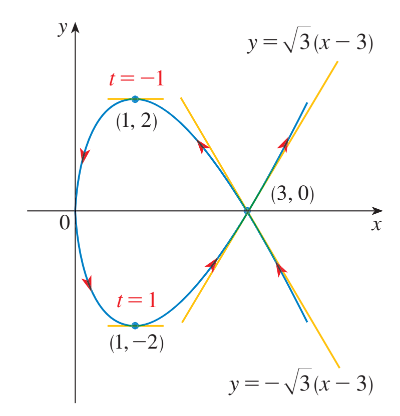


FIGURA 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

La curva es cóncava hacia arriba cuando $t > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $t < 0$.
(d) Con la información de los incisos (b) y (c), se bosqueja C en la figura 1. □

V EJEMPLO 2
(a) Encuentre la tangente a la cicloide $x = r(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ en el punto donde $\theta = \pi/3$. (Véase el ejemplo 7 en la sección 10.1).
(b) ¿En qué puntos la tangente es horizontal? ¿Cuándo es vertical?

SOLUCIÓN
(a) La pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\,\text{sen}\,\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se tiene

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, la pendiente de la tangente es $\sqrt{3}$ y su ecuación es

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad \sqrt{3}\,x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

La tangente se bosqueja en la figura 2.

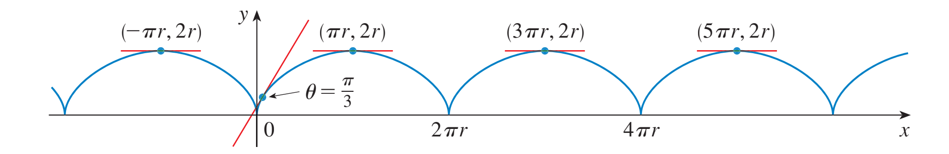


FIGURA 2

(b) La tangente es horizontal cuando $dy/dx = 0$, lo que ocurre cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $1 - \cos\theta \neq 0$, es decir, $\theta = (2n - 1)\pi$, n un entero. El punto correspondiente en la cicloide es $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Cuando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ como $dy/d\theta$ son 0. En la gráfica se ve que hay tangentes verticales en esos puntos. Esto se puede comprobar por medio de la regla de l'Hospital como sigue:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Un cálculo similar muestra que $dy/dx \to -\infty$ cuando $\theta \to 2n\pi^-$, así que de hecho hay tangentes verticales cuando $\theta = 2n\pi$, es decir, cuando $x = 2n\pi r$. □

ÁREAS

Se sabe que el área bajo la curva $y = F(x)$ de a a b es $A = \int_a^b F(x)\,dx$, donde $F(x) \geqslant 0$. Si la curva está dada por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, en tal caso se puede adaptar la fórmula anterior por medio de la regla de sustitución para integrales definidas como sigue:

■ Los límites de integración para t se encuentran como siempre con la regla de la sustitución. Cuando $x = a$, t es α o β. Cuando $x = b$, t es el valor restante.

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{o bien} \quad \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

V EJEMPLO 3 Encuentre el área bajo un arco de la cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad y = r(1 - \cos\theta).$$

(Véase fig. 3.)

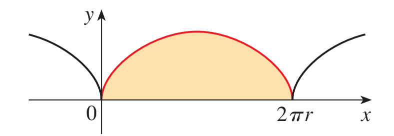


FIGURA 3

■ El resultado del ejemplo 3 dice que el área bajo un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo rodante que genera la cicloide (véase el ejemplo 7 en la sección 10.1). Galileo conjeturó este resultado, pero el matemático francés Roberval y el matemático italiano Torricelli lo demostraron primero.

SOLUCIÓN Un arco de la cicloide está dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Al usar la regla de sustitución con $y = r(1 - \cos\theta)$ y $dx = r(1 - \cos\theta)\, d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi r} y\, dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta)\, r(1 - \cos\theta)\, d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2\, d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\ &= r^2\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\, 2\theta\right]_0^{2\pi} = r^2\left(\tfrac{3}{2} \cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

□

LONGITUD DE ARCO

Ya se sabe cómo hallar la longitud L de una curva C dada en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 8.1.3 dice que si F' es continua, entonces

3
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Suponga que C se puede describir también mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, donde $dx/dt = f'(t) > 0$. Esto significa que C es cruzada una vez, de izquierda a derecha, cuando t se incrementa de α a β y $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Al sustituir la fórmula 2 en la fórmula 3 y usar la regla de sustitución, se obtiene

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\, \frac{dx}{dt}\, dt$$

Puesto que $dx/dt > 0$, se tiene

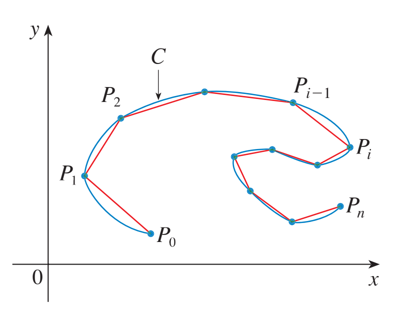


FIGURA 4

4
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Incluso si C no se puede expresar en la forma $y = F(x)$, la fórmula 4 aún es válida pero se obtiene por aproximaciones poligonales. Se divide el intervalo de parámetro $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de igual amplitud Δt. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los puntos finales de estos subintervalos, después $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de los puntos $P_i(x_i, y_i)$ que yacen en C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ se aproxima a C (véase fig. 4).

Como en la sección 8.1, se define la longitud L de C como el límite de las longitudes de estos polígonos de aproximación cuando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

El teorema del valor medio, cuando se aplica a f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, da un número t_i^* en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Si se establece que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, esta ecuación se convierte en

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\, \Delta t$$

De manera similar, cuando se aplica a g, el teorema del valor medio da un número t_i^{**} en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\,\Delta t$$

Debido a eso,

$$\begin{aligned}|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\Delta t]^2}\\ &= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\,\Delta t\end{aligned}$$

y, de este modo,

5 $$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\,\Delta t$$

La suma en (5) se asemeja a una suma de Riemann para la función $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ pero no es exactamente una suma de Riemann porque $t_i^* \neq t_i^{**}$ en general. Sin embargo, si f' y g' son continuas, se puede demostrar que el límite en (5) es el mismo que si t_i^* y t_i^{**} fueran iguales, a saber,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

Así, con la notación de Leibniz, se tiene el siguiente resultado, que tiene la misma forma que (4).

6 TEOREMA Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde f' y g' son continuas en $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde α hasta β, por lo tanto la longitud de C es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Observe que la fórmula del teorema 6 es consistente con las fórmulas generales $L = \int ds$ y $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ de la sección 8.1.

EJEMPLO 4 Si se usa la representación del círculo unitario dado en el ejemplo 2 en la sección 10.1,

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = -\operatorname{sen} t$ y $dy/dt = \cos t$, así que el teorema 6 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como se esperaba. Si, por otro lado, se usa la representación dada en el ejemplo 3 de la sección 10.1,

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = 2\cos 2t$, $dy/dt = -2\operatorname{sen} 2t$, y la integral del teorema 6 da

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 2t}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi$$

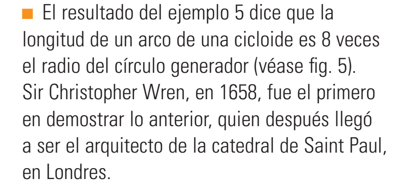
Observe que la integral da dos veces la longitud de arco del círculo, porque cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ cruza el círculo dos veces. En general, al hallar la longitud de una curva C a partir de una representación paramétrica, se tiene que ser cuidadoso para asegurar que C es cruzada sólo una vez cuando t se incrementa de α a β. □

V EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de un arco de la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 3 se ve que un arco se describe mediante el intervalo de parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Puesto que

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r\operatorname{sen}\theta$$

se tiene


El resultado del ejemplo 5 dice que la longitud de un arco de una cicloide es 8 veces el radio del círculo generador (véase fig. 5). Sir Christopher Wren, en 1658, fue el primero en demostrar lo anterior, quien después llegó a ser el arquitecto de la catedral de Saint Paul, en Londres.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}\, d\theta = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

Para evaluar esta integral, se usa la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con $\theta = 2x$, que da $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. Debido a que $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se tiene $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$ y, de este modo, $\operatorname{sen}(\theta/2) \geq 0$. Por lo tanto,

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(\theta/2)} = 2\left|\operatorname{sen}(\theta/2)\right| = 2\operatorname{sen}(\theta/2)$$

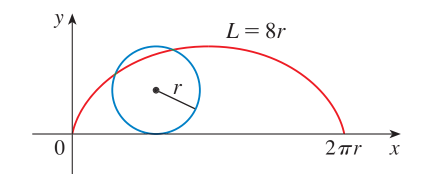


FIGURA 5

y, de esta manera, $\quad L = 2r\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\big[-2\cos(\theta/2)\big]_0^{2\pi}$

$$= 2r[2 + 2] = 8r$$ □

ÁREA DE SUPERFICIE

En la misma forma que para la longitud de arco, se puede adaptar la fórmula 8.2.5 a fin de obtener una fórmula para el área de superficie. Si la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, se hace girar respecto al eje x, donde f', g' son continuas y $g(t) \geqslant 0$, entonces el área de la superficie resultante está dada por

7 $$S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Las fórmulas simbólicas generales $S = \int 2\pi y\, ds$ y $S = \int 2\pi x\, ds$ (fórmulas 8.2.7 y 8.2.8) aún son válidas, pero para curvas paramétricas se usa

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EJEMPLO 6 Muestre que el área de superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

SOLUCIÓN La esfera se obtiene al girar el semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

respecto al eje x. Por lo tanto, de la fórmula 7, se obtiene

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r \operatorname{sen} t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2$$

□

10.2 EJERCICIOS

1–2 Encuentre dy/dx.

1. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t^2 + t$

2. $x = 1/t, \quad y = \sqrt{t}\, e^{-t}$

3–6 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

3. $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 + t; \quad t = -1$

4. $x = t - t^{-1}, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

5. $x = e^{\sqrt{t}}, \quad y = t - \ln t^2; \quad t = 1$

6. $x = \cos \theta + \operatorname{sen} 2\theta, \quad y = \operatorname{sen} \theta + \cos 2\theta; \quad \theta = 0$

7–8 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado por dos métodos: (a) sin eliminar el parámetro y (b) eliminando primero el parámetro.

7. $x = 1 + \ln t, \ y = t^2 + 2; \quad (1, 3)$

8. $x = \tan \theta, \ y = \sec \theta; \quad (1, \sqrt{2})$

9–10 Encuentre una ecuación de la(s) tangente(s) a la curva en el punto dado. Después grafique la curva y la(s) tangente(s).

9. $x = 6 \operatorname{sen} t, \ y = t^2 + t; \quad (0, 0)$

10. $x = \cos t + \cos 2t, \ y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t; \quad (-1, 1)$

11–16 Determine dy/dx y d^2y/dx^2. ¿Para qué valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

11. $x = 4 + t^2, \quad y = t^2 + t^3$

12. $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

13. $x = t - e^t, \quad y = t + e^{-t}$

14. $x = t + \ln t, \quad y = t - \ln t$

15. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

17–20 Encuentre los puntos sobre la curva donde la tangente es horizontal a la vertical. Si cuenta con un dispositivo de graficación, grafique la curva para comprobar su trabajo.

17. $x = 10 - t^2, \quad y = t^3 - 12t$

18. $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad y = 2t^3 + 3t^2 + 1$

19. $x = 2 \cos \theta, \quad y = \operatorname{sen} 2\theta$

20. $x = \cos 3\theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta$

21. Use una gráfica para estimar las coordenadas del el punto de la extrema derecha de la curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. Después use el cálculo para encontrar las coordenadas exactas.

22. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto más bajo y el de la extrema izquierda en la curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. Luego encuentre las coordenadas exactas.

23–24 Grafique la curva en un rectángulo de visión que muestre todos los aspectos importantes de la curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Muestre que la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t \cos t$ tiene dos tangentes en $(0, 0)$ y encuentre sus ecuaciones. Bosqueje la curva.

26. Grafique la curva $x = \cos t + 2 \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$ para descubrir en dónde se cruza a sí misma. Determine las ecuaciones de ambas tangentes en ese punto.

27. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la trocoide $x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta$, $y = r - d \cos \theta$ en términos de θ. (Véase el ejercicio 40 en la sección 10.1.)

(b) Muestre que si $d < r$, en tal caso la trocoide no tiene una tangente vertical.

28. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$ en términos de θ. (Las astroides se exploran en el proyecto de laboratorio de la página 629.)

(b) ¿En qué puntos la tangente es horizontal o vertical?

(c) ¿En qué puntos la tangente tiene pendiente 1 o -1?

29. ¿En qué puntos sobre la curva $x = 2t^3$, $y = 1 + 4t - t^2$ tiene pendiente 1 la línea tangente?

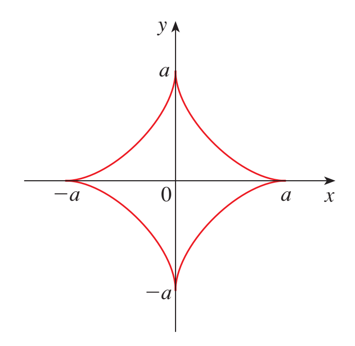
30. Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que pasa por el punto $(4, 3)$.

31. Use las ecuaciones paramétricas de una elipse, $x = a \cos \theta$, $y = b \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, para hallar el área que encierra.

32. Encuentre el área acotada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y.

33. Encuentre el área por el eje x y la curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

34. Encuentre el área de la región encerrada por la astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$. (Las astroides se exploran en el proyecto de laboratorio en la página 629).



35. Determine el área bajo un arco de la trocoide del ejercicio 40 en la sección 10.1 para el caso $d < r$.

36. Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada por el bucle de la curva en el ejemplo 1.
(a) Encuentre el área de $\mathcal{R}$.
(b) Si $\mathcal{R}$ se hace girar respecto al eje x, encuentre el volumen del sólido resultante.
(c) Encuentre el centroide de $\mathcal{R}$.

37–40 Establezca una integral que represente la longitud de la curva. A continuación use su calculadora para hallar la longitud correcta a cuatro lugares decimales.

37. $x = t - t^2, \quad y = \frac{4}{3}t^{3/2}, \quad 1 \leq t \leq 2$

38. $x = 1 + e^t, \quad y = t^2, \quad -3 \leq t \leq 3$

39. $x = t + \cos t, \quad y = t - \mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

40. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t + 1}, \quad 1 \leq t \leq 5$

41–44 Determine la longitud de la curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$

42. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leq t \leq 3$

43. $x = \dfrac{t}{1 + t}, \quad y = \ln(1 + t), \quad 0 \leq t \leq 2$

44. $x = 3\cos t - \cos 3t, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}\, 3t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

45–47 Grafique la curva y encuentre su longitud.

45. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

46. $x = \cos t + \ln\left(\tan \frac{1}{2}t\right), \quad y = \mathrm{sen}\, t, \quad \pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

47. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad -8 \leq t \leq 3$

48. Estime la longitud del bucle de la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud de la curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leq t \leq 6$.

50. En el ejercicio 43 de la sección 10.1 se pidió deducir las ecuaciones paramétricas $x = 2a\cot\theta$, $y = 2a\,\mathrm{sen}^2\theta$ para la curva llamada bruja de María Agnesi. Use la regla de Simpson con $n = 4$ para estimar la longitud del arco de esta curva dado por $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

51–52 Encuentre la distancia recorrida por una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo de tiempo dado. Compare con la longitud de la curva.

51. $x = \mathrm{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leq t \leq 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

53. Muestre que la longitud total de la elipse $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = b\cos\theta$, $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\, d\theta$$

donde e es la excentricidad de la elipse $\left(e = c/a\right.$, donde $\left.c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

54. Encuentre la longitud total de la astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$, donde $a > 0$.

CAS **55.** (a) Grafique la **epitrocoide** con ecuaciones

$$x = 11\cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11\,\mathrm{sen}\, t - 4\,\mathrm{sen}(11t/2)$$

¿Qué intervalo de parámetro da la curva completa?
(b) Use su CAS para determinar la longitud aproximada de esta curva.

CAS **56.** Una curva llamada **espiral de Cornu** se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\, du$$

$$y = S(t) = \int_0^t \mathrm{sen}(\pi u^2/2)\, du$$

donde C y S son las funciones de Fresnel que se introdujeron en el capítulo 5.
(a) Grafique esta curva. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$?
(b) Determine la longitud de la espiral de Cornu del origen al punto con valor de parámetro t.

57–58 Establezca una integral que represente el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x. A continuación use su calculadora para hallar el área superficial correcta a cuatro lugares decimales.

57. $x = 1 - te^t, \quad y = (t^2 + 1)e^t, \quad 0 \leq t \leq 1$

58. $x = \mathrm{sen}^2 t, \quad y = \mathrm{sen}\, 3t, \quad 0 \leq t \leq \pi/3$

59–61 Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x.

59. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

60. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

61. $x = a\cos^3\theta, \quad y = a\,\mathrm{sen}^3\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

---

62. Grafique la curva

$$x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta$$

Si esta curva se hace girar respecto al eje x, encuentre el área de la superficie resultante. (Use su gráfica para ayudar a determinar el intervalo de parámetro correcto.)

63. Si la curva

$$x = t + t^3 \qquad y = t - \frac{1}{t^2} \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2$$

se hace girar respecto al eje x, use su calculadora para estimar el área de la superficie resultante hasta tres decimales.

64. Si el arco de la curva en el ejercicio 50 se hace girar respecto al eje x, estime el área de la superficie resultante por medio de la regla de Simpson con $n = 4$.

65–66 Encuentre el área superficial generada al hacer girar la curva dada respecto al eje y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

---

67. Si f' es continua y $f'(t) \neq 0$ para $a \leqslant t \leqslant b$, muestre que la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, se puede escribir en la forma $y = F(x)$. [*Sugerencia*: muestre que f^{-1} existe.]

68. Use la fórmula 2 para deducir la fórmula 7 a partir de la fórmula 8.2.5 para el caso en el que la curva se puede representar en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.

69. La **curvatura** en el punto P de una curva se define como

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación de la línea tangente en P, como se muestra en la figura. Así, la curvatura es el valor absoluto de la tasa de cambio de ϕ con respecto a la longitud de arco. Se puede considerar como una medida de la tasa de cambio de dirección de la curva en P y se estudiará con mayor detalle en el capítulo 13.

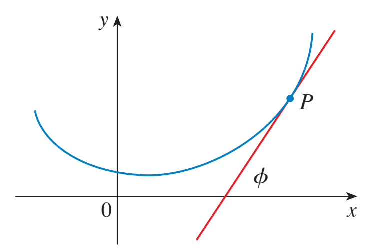
(a) Para una curva paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduzca la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t, así que $\dot{x} = dx/dt$. [*Sugerencia*: use $\phi = \tan^{-1}(dy/dx)$ y la fórmula 2 para hallar $d\phi/dt$. Después use la regla de la cadena para determinar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando una curva $y = f(x)$ como la curva paramétrica $x = x$, $y = f(x)$, con parámetro x, muestre que la fórmula del inciso (a) se convierte en

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



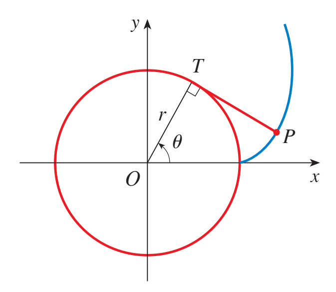
70. (a) Use la fórmula del ejercicio 69(b) para hallar la curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.
(b) ¿En qué punto la parábola tiene curvatura máxima?

71. Con la fórmula del ejercicio 69(a) determine la curvatura de la cicloide $x = \theta - \mathrm{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ en la parte superior de uno de sus arcos.

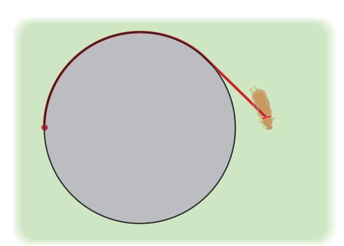
72. (a) Muestre que la curvatura en cada punto de una recta es $\kappa = 0$.
(b) Muestre que la curvatura en cada punto de un círculo de radio r es $\kappa = 1/r$.

73. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa. La curva trazada por el punto P al final de la cuerda se llama **involuta** del círculo. Si el círculo tiene radio r y centro O y la posición inicial de P es $(r, 0)$, y si el parámetro θ se elige como en la figura, muestre que las ecuaciones paramétricas de la envolvente son

$$x = r(\cos\theta + \theta\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad y = r(\mathrm{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Una vaca está atada a un silo con radio r mediante una cuerda lo suficientemente larga para alcanzar el lado opuesto del silo. Encuentre el área disponible para el apacentamiento de la vaca.



PROYECTO DE LABORATORIO

CURVAS DE BÉZIER

Las **curvas de Bézier** se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran en honor al matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), quien trabajó en la industria automotriz. Una curva de Béizer cúbica se determina mediante cuatro **puntos de control**, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y se define mediante las ecuaciones paramétricas.

$$x = x_0(1 - t)^3 + 3x_1t(1 - t)^2 + 3x_2t^2(1 - t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1 - t)^3 + 3y_1t(1 - t)^2 + 3y_2t^2(1 - t) + y_3t^3$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = (x_3, y_3)$, así que la curva empieza en P_0 y termina en P_3.

1. Grafique la curva de Bézier con puntos de control $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$ en seguida, en la misma pantalla, grafique segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. (El ejercicio 31 en la sección 10.1 muestra cómo hacer esto). Observe que los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva; ésta empieza en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.
2. De la gráfica del problema 1 se ve que la tangente en P_0 pasa por P_1 y la tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.
3. Intente producir una curva de Bézier con un bucle cambiando el segundo punto de control en el problema 1.
4. Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra C.
5. Formas más complicadas se pueden representar al juntar dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si se desea unir estos dos trozos de manera uniforme, en tal caso las tangentes en P_3 deben corresponder y, por lo tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar en esta línea tangente común. Con este principio, determine los puntos de control para un par de curvas de Bézier que representan la letra S.

10.3 COORDENADAS POLARES

Un sistema coordenado representa un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general se usan coordenadas cartesianas, que son las distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí se describe un sistema de coordenadas introducido por Newton, llamado **sistema coordenado polar**, que es más conveniente para muchos propósitos.

Se elige un punto en el plano que se llama **polo** (u origen) y se identifica con O. Luego se dibuja un rayo (semirrecta) que empieza en O llamado **eje polar**. Este eje se traza por lo común horizontalmente a la derecha, y corresponde al eje x positivo en coordenadas cartesianas.

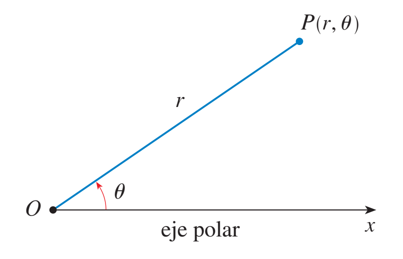


FIGURA 1

Si P es cualquier otro punto en el plano, sea r la distancia de O a P y sea θ el ángulo (medido por lo regular en radianes) entre el eje polar y la recta OP como en la figura 1 por lo tanto el punto P se representa mediante otro par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman **coordenadas polares** de P. Se usa la convención de que un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje polar y negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si $P = O$, entonces $r = 0$ y se está de acuerdo en que $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.

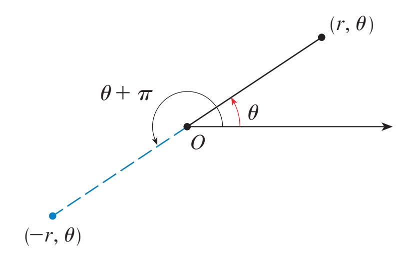
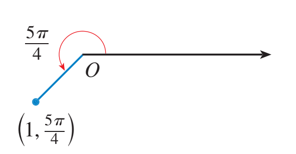


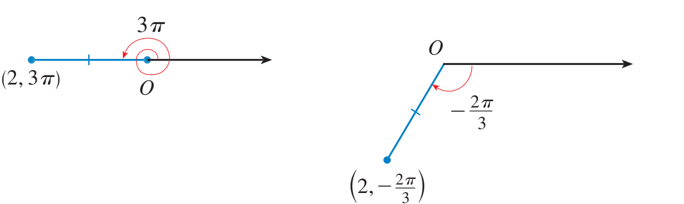
FIGURA 2

Se extiende el significado de las coordenadas polares (r, θ) al caso en que r es negativa estando de acuerdo en que, como en la figura 2, los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están en la misma línea que pasa por O y a la misma distancia $|r|$ de O, pero en lados opuestos de O. Si $r > 0$, el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el cuadrante del lado opuesto del polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

EJEMPLO 1 Grafique los puntos cuyas coordenadas polares son:
(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos se grafican en la figura 3. En el inciso (d) el punto $(-3, 3\pi/4)$ se localiza a tres unidades del polo en el cuarto cuadrante porque el ángulo $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante y $r = -3$ es negativa. □





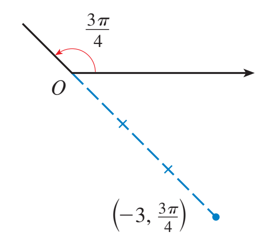
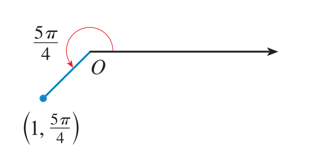
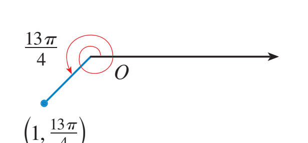


FIGURA 3

En el sistema coordenado cartesiano, todo punto tiene sólo una representación, pero en el sistema de coordenadas polares cada punto tiene muchas representaciones. Por ejemplo, el punto $(1, 5\pi/4)$ del ejemplo 1(a) se podría escribir como $(1, -3\pi/4)$ o $(1, 13\pi/4)$ o $(-1, \pi/4)$. (Véase fig. 4.)





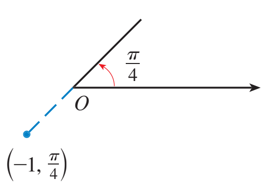


FIGURA 4

De hecho, puesto que una rotación completa en sentido contrario a las manecillas del reloj está dada por un ángulo 2π, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) se representa también por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero.

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas se puede ver en la figura 5, en la que el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces, de la figura, se tiene



$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen } \theta = \frac{y}{r}$$

y, de este modo,

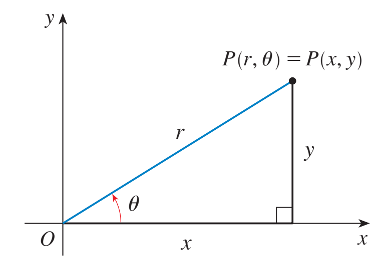


FIGURA 5

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r \text{ sen } \theta$$

Aunque las ecuaciones 1 se dedujeron de la figura 5, que ilustra el caso donde $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$, estas ecuaciones son válidas para todos los valores de r y θ. (Véase la definición general de sen θ y cos θ en el apéndice D.)

Las ecuaciones 1 permiten hallar las coordenadas cartesianas de un punto cuando se conocen las coordenadas polares. Para determinar r y θ cuando se conocen x y y, se usan las ecuaciones

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

que se pueden deducir de las ecuaciones 1, o simplemente leer de la figura 5.

EJEMPLO 2 Convierta el punto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares a cartesianas.

SOLUCIÓN Puesto que $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, las ecuaciones 1 dan

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, el punto es $(1, \sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas. □

EJEMPLO 3 Represente el punto con coordenadas cartesianas $(1, -1)$ en términos de coordenadas polares.

SOLUCIÓN Si se elige r como positiva, en tal caso las ecuaciones 2 dan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Puesto que el punto $(1, -1)$ se localiza en el cuarto cuadrante, se puede elegir $\theta = -\pi/4$ o $\theta = 7\pi/4$. Así, una respuesta posible es $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; otra es $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$. □

NOTA Las ecuaciones 2 no determinan de manera única a θ cuando se dan x y y porque cuando se incrementa θ en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cada valor de $\tan\theta$ ocurre dos veces. Por lo tanto, al convertir de coordenadas cartesianas a polares, no es suficiente hallar r y θ que satisfacen las ecuaciones 2. Como en el ejemplo 3, se debe elegir θ de modo que el punto (r, θ) está en el cuadrante correcto.

CURVAS POLARES

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$, o de manera más general $F(r, \theta) = 0$, consta de los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

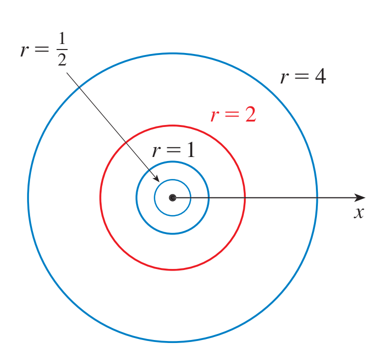


FIGURA 6

EJEMPLO 4 ¿Qué curva representa la ecuación polar $r = 2$?

SOLUCIÓN La curva consta de todos los puntos (r, θ) con $r = 2$. Puesto que r representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 2$ representa la circunferencia con centro O y radio 2. En general, la ecuación $r = a$ representa una circunferencia con centro O y radio $|a|$. (Véase fig. 6.) □

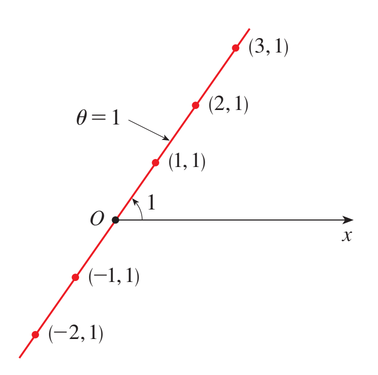


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Bosqueje la curva polar $\theta = 1$.

SOLUCIÓN Esta curva consta de los puntos (r, θ) tal que el ángulo polar θ es 1 radián. Es la recta que pasa por O y forma un ángulo de 1 radián con el eje polar (véase figura 7). Observe que los puntos $(r, 1)$ sobre la línea con $r > 0$ están en el primer cuadrante, mientras que aquellos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante. □

EJEMPLO 6
(a) Trace la curva con la ecuación polar $r = 2 \cos \theta$.
(b) Encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

SOLUCIÓN
(a) En la figura 8 se encuentran los valores de r para algunos valores convenientes de θ y se grafican los puntos correspondientes (r, θ). Después se unen estos puntos para bosquejar la curva, que parece un círculo. Se han usado sólo valores de θ entre 0 y π, puesto que si se permite que θ se incremente más allá de π, se obtienen de nuevo los mismos puntos.

θ	$r = 2 \cos \theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

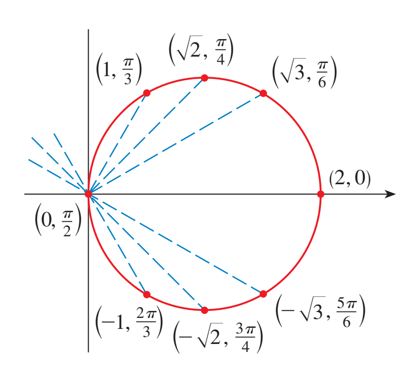


FIGURA 8
Tabla de valores y gráfica de $r = 2 \cos \theta$

(b) Para convertir la ecuación en una ecuación cartesiana se usan las ecuaciones 1 y 2. De $x = r \cos \theta$ se tiene $\cos \theta = x/r$, de modo que la ecuación $r = 2 \cos \theta$ se convierte en $r = 2x/r$, que da

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Al completar el cuadrado, se obtiene

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que es una ecuación de un círculo con centro $(1, 0)$ y radio 1. □

■ En la figura 9 se muestra una ilustración geométrica de que el círculo del ejemplo 6 tiene la ecuación $r = 2 \cos \theta$. El ángulo OPQ es un ángulo recto ¿por qué?, de esa manera, $r/2 = \cos \theta$.

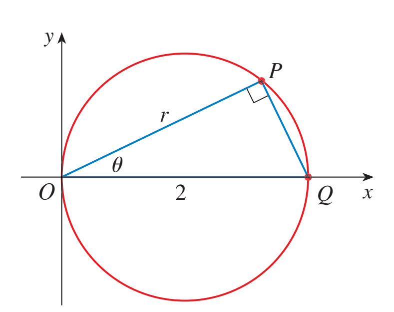


FIGURA 9

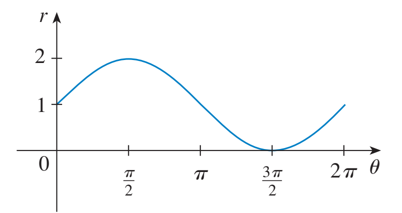


FIGURA 10
$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

V EJEMPLO 7 Bosqueje la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

SOLUCIÓN En lugar de graficar puntos como en el ejemplo 6, se bosqueja primero la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ en coordenadas *cartesianas* en la figura 10, desplazando la curva seno hacia arriba una unidad. Esto permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, se ve que cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) se incrementa de 1 a 2, de modo que se bosqueja la parte correspondiente de la curva polar de la figura 11(a). Cuando θ se incrementa de $\pi/2$ a π, la figura 10 muestra que r disminuye de 2 a 1, así que se bosqueja la parte siguiente de la curva como en la figura 11(b). Cuando θ se incrementa de π a $3\pi/2$, r disminuye de 1 a 0, como se muestra en el inciso (c). Por último, cuando θ se incrementa de $3\pi/2$ a 2π, r se incrementa de 0 a 1 como se muestra en el inciso (d). Si se permite que θ se incremente por encima de 2π o disminuya más allá de 0, simplemente se volvería a trazar la trayectoria. Si se juntan las partes de la curva de la figura 11(a)–(d), se bosqueja la curva completa del inciso (e). Se llama **cardioide** porque tiene forma de corazón.

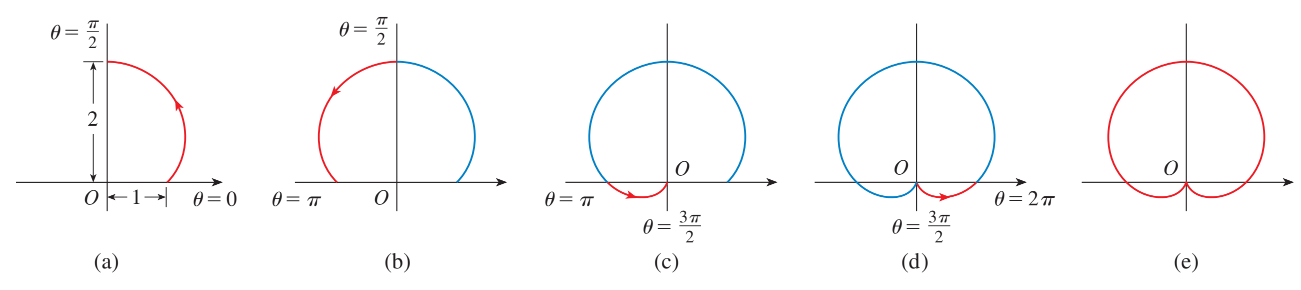
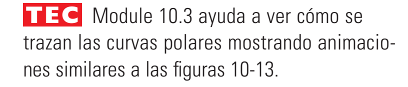


FIGURA 11
Etapas para bosquejar la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

□

EJEMPLO 8 Bosqueje la curva $r = \cos 2\theta$



Module 10.3 ayuda a ver cómo se trazan las curvas polares mostrando animaciones similares a las figuras 10-13.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 7, primero se bosqueja $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, en coordenadas cartesianas en la figura 12. Cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/4$, se observa en la figura 12 que r disminuye de 1 a 0 y, de este modo, se dibuja la porción correspondiente de la curva polar de la figura 13 (indicada por ①). Cuando θ se incrementa de $\pi/4$ a $\pi/2$, r va de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde O se incrementa de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante esta porción de la curva polar (indicada por ②) se ubica en el lado opuesto del polo en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza en forma similar, con flechas y números que indican el orden en el cual se trazan las porciones. La curva resultante tiene cuatro bucles y se llama **rosa de cuatro hojas**.

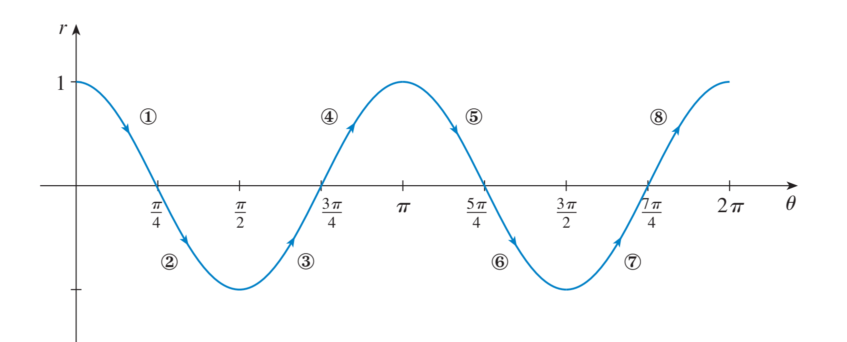


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ en coordenadas cartesianas

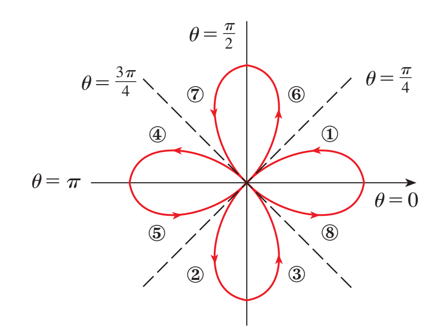


FIGURA 13
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$

□

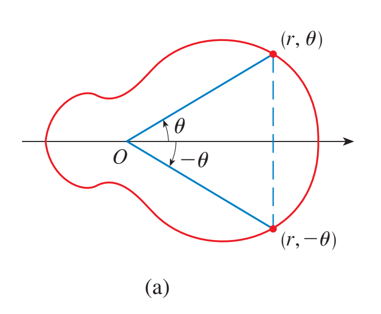
SIMETRÍA

Cuando se bosquejan curvas polares, a veces es útil aprovechar la simetría. Las tres reglas siguientes se explican mediante la figura 14.

(a) Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje polar.

(b) Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\theta + \pi$, la curva es simétrica respecto al polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si se hace girar 180º respecto al origen).

(c) Si la ecuación sigue igual cuando se reemplaza θ por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto a la línea vertical $\theta = \pi/2$.



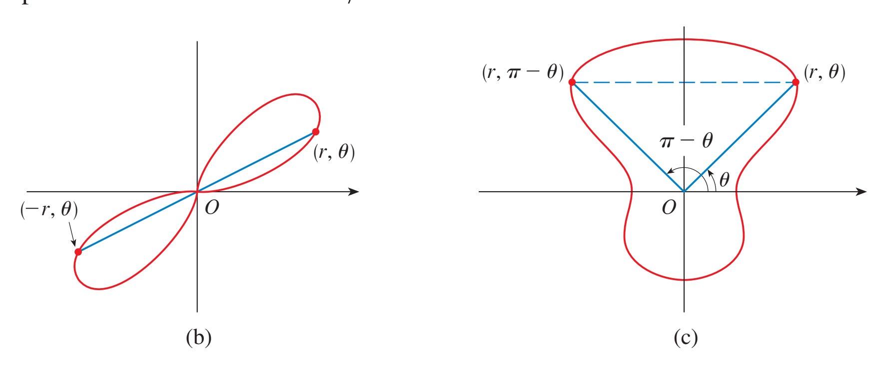


FIGURA 14

Las curvas bosquejadas en los ejemplos 6 y 8 son simétricas respecto al eje polar, puesto que $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Las curvas de los ejemplos 7 y 8 son simétricas respecto a $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. La rosa de cuatro hojas también es simétrica respecto al polo. Estas propiedades de simetría se podrían haber usado para bosquejar las curvas. En el ejemplo 6, sólo se requiere hacer la gráfica de los puntos para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y reflejar después respecto al eje polar para obtener el círculo completo.

TANGENTES A CURVAS POLARES

Para hallar una línea tangente a una curva polar $r = f(\theta)$ se considera a θ como un parámetro y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Entonces, con el método para hallar pendientes de curvas paramétricas (ecuación 10.2.2) y la regla del producto, se tiene

3
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Se localizan tangentes horizontales al determinar los puntos donde $dy/d\theta = 0$ (siempre que $dx/d\theta \neq 0$). Del mismo modo, se localizan tangentes verticales en los puntos donde $dx/d\theta = 0$ (siempre que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que si se están buscando líneas tangentes en el polo, en tal caso $r = 0$ y la ecuación 3 se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \text{si} \qquad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

En el ejemplo 8 se encontró que $r = \cos 2\theta = 0$ cuando $\theta = \pi/4$ o $3\pi/4$. Esto significa que las líneas $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (o $y = x$ y $y = -x$) son líneas tangentes a $r = \cos 2\theta$ en el origen.

EJEMPLO 9

(a) Para la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ del ejemplo 7, encuentre la pendiente de la línea tangente cuando $\theta = \pi/3$.
(b) Encuentre los puntos sobre la cardioide donde la línea tangente es horizontal o vertical.

SOLUCIÓN Al utilizar la ecuación 3 con $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\,\cos\theta - (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

(a) La pendiente de la tangente en el punto donde $\theta = \pi/3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Debido a eso, hay tangentes horizontales en los puntos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ y tangentes verticales en $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. Cuando $\theta = 3\pi/2$, tanto $dy/d\theta$ como $dx/d\theta$ son 0, así que se debe tener cuidado. Al usar la regla de l'Hospital, se tiene

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\operatorname{sen}\theta}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

Por simetría,
$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

En estos términos que hay una línea tangente vertical en el polo (véase fig. 15). □

FIGURA 15
Rectas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

NOTA En lugar de tener que recordar la ecuación 3, se podría usar el método empleado para deducirla. Como ilustración, en el ejemplo 9 se pudo haber escrito

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Por lo tanto se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que es equivalente a la expresión previa.

TRAZO DE GRÁFICAS DE CURVAS POLARES CON DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN

Aunque es útil poder bosquejar a mano curvas polares simples, se necesita usar una calculadora o computadora cuando se tiene ante sí una curva tan complicada como la que se muestra en la figura 16 y 17.

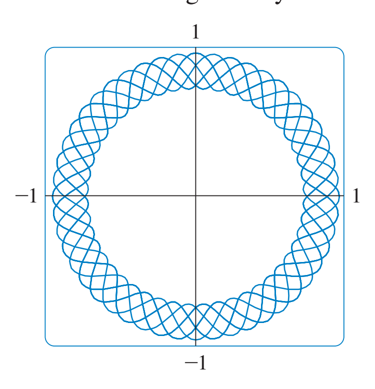


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$

1.7
−1.9
1.9
−1.7

FIGURA 17
$r = \operatorname{sen}^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Algunos dispositivos de graficación tienen comandos que permiten graficar de manera directa curvas polares. Con otras máquinas se requiere convertir primero a ecuaciones paramétricas. En este caso se toma la ecuación polar $r = f(\theta)$ y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algunas máquinas requieren que el parámetro se llame t en vez de θ.

EJEMPLO 10 Grafique la curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUCIÓN Se supone que el dispositivo de graficación no tiene un comando de graficación polar integrado. En este caso se necesita trabajar con las ecuaciones paramétricas correspondientes, que son

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

En cualquier caso, se necesita determinar el dominio para θ. Así, se hace la pregunta: ¿cuántas rotaciones completas se requieren hasta que la curva comience a repetirse por sí misma? Si la respuesta es n, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

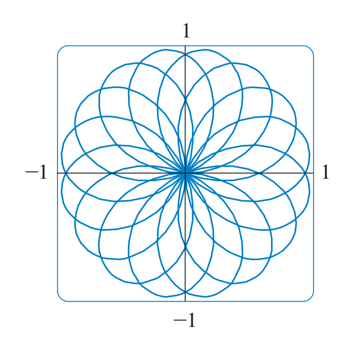


FIGURA 18
$r = \text{sen}(8\theta/5)$

■ En el ejercicio 55, se pidió demostrar en forma analítica lo que ya se había descubierto a partir de las gráficas de la figura 19.

y, por lo tanto, se requiere que $16n\pi/5$ sea un múltiplo par de π. Esto ocurrirá primero cuando $n = 5$. En consecuencia, se grafica la curva completa si se especifica que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Al cambiar de θ a t, se tienen las ecuaciones

$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \text{sen}(8t/5)\,\text{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

y en la figura 18 se muestra la curva resultante. Observe que esta rosa tiene 16 bucles. □

V EJEMPLO 11 Investigue la familia de curvas polares dada por $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$. ¿Cómo cambia la forma cuando cambia c? (Estas curvas se llaman **limaçons**, por la palabra francesa para caracol, debido a la forma de las curvas para ciertos valores de c.)

SOLUCIÓN En la figura 19 se muestran gráficas dibujadas por computadora para varios valores de c. Para $c > 1$ hay un bucle que se hace pequeño cuando disminuye c. Cuando $c = 1$ el bucle desaparece y la curva se convierte en la cardioide que se bosquejó en el ejemplo 7. Para c entre 1 y $\frac{1}{2}$ la cúspide de la cardioide desaparece y se convierte en un "hoyuelo". Cuando c disminuye de $\frac{1}{2}$ a 0, el limaçon tiene forma de óvalo. Este óvalo se vuelve más circular cuando $c \to 0$ y cuando $c = 0$ la curva es justo el círculo $r = 1$.

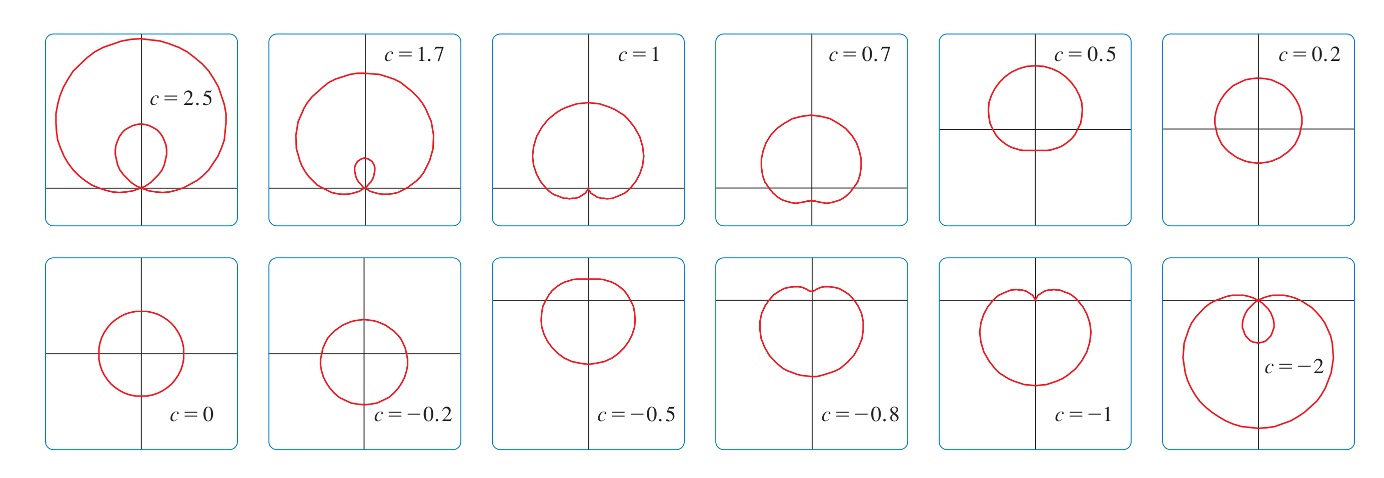


FIGURA 19
Miembros de la familia de caracoles $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$

Las demás partes de la figura 19 muestran que c se vuelve negativa, las formas cambian en orden inverso. De hecho, estas curvas son reflexiones respecto al eje horizontal de las curvas correspondientes con c positiva. □

10.3 EJERCICIOS

1–2 Grafique el punto cuyas coordenadas polares se dan. Después encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y uno con $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3–4 Grafique el punto cuyas coordenadas polares se dan. Luego, determine las coordenadas cartesianas del punto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5–6 Se dan las coordenadas cartesianas de un punto.
(i) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.
(ii) Determine las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r < 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. (a) $(2, -2)$ (b) $(-1, \sqrt{3})$

6. (a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(1, -2)$

7–12 Bosqueje la región en el plano que consta de los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $r \geqslant 0, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

9. $0 \leqslant r < 4, \quad -\pi/2 \leqslant \theta < \pi/6$

10. $2 < r \leqslant 5, \quad 3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encuentre la distancia entre los puntos con coordenadas polares $(2, \pi/3)$ y $(4, 2\pi/3)$.

14. Obtenga una fórmula para la distancia entre los puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

15–20 Identifique la curva mediante la determinación de una ecuación cartesiana para la curva..

15. $r = 2$

16. $r \cos\theta = 1$

17. $r = 3 \operatorname{sen}\theta$

18. $r = 2 \operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$

19. $r = \csc\theta$

20. $r = \tan\theta \sec\theta$

21–26 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

21. $x = 3$

22. $x^2 + y^2 = 9$

23. $x = -y^2$

24. $x + y = 9$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$

26. $xy = 4$

27–28 Para cada una de las curvas descritas, decida mediante qué ecuación, polar o cartesiana, se expresaría con más facilidad. Después escriba una ecuación para la curva.

27. (a) Una línea por el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.
(b) Una línea vertical por el punto (3, 3)

28. (a) Un círculo con radio 5 y centro (2, 3)
(b) Un círculo centrado en el origen con radio 4

29–48 Bosqueje la curva con la ecuación polar dada.

29. $\theta = -\pi/6$

30. $r^2 - 3r + 2 = 0$

31. $r = \operatorname{sen}\theta$

32. $r = -3\cos\theta$

33. $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta), \quad \theta \geqslant 0$

34. $r = 1 - 3\cos\theta$

35. $r = \theta, \quad \theta \geqslant 0$

36. $r = \ln\theta, \quad \theta \geqslant 1$

37. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

38. $r = \cos 5\theta$

39. $r = 2\cos 4\theta$

40. $r = 3\cos 6\theta$

41. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$

42. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

43. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

44. $r^2 = \cos 4\theta$

45. $r = 2\cos(3\theta/2)$

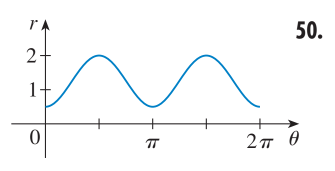
46. $r^2\theta = 1$

47. $r = 1 + 2\cos 2\theta$

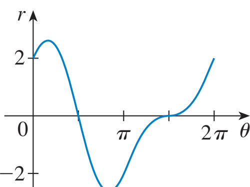
48. $r = 1 + 2\cos(\theta/2)$

49–50 En la figura se muestra la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas. Empléela para bosquejar la curva polar correspondiente.


49.



50.



51. Demuestre que la curva polar $r = 4 + 2\sec\theta$ (llamada **concoide**) tiene a la línea $x = 2$ como una asíntota vertical mostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} x = 2$. Use este hecho para ayudar a bosquejar la concoide.

52. Demuestre que la curva $r = 2 - \csc\theta$ (también una concoide) tiene a la línea $y = -1$ como una asíntota horizontal mostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} y = -1$. Use este hecho para ayudar a bosquejar la concoide.

53. Muestre que la curva $r = \operatorname{sen}\theta \ \tan\theta$ (llamada **cisoide de Diocles**) tiene la línea $x = 1$ como una asíntota vertical. Demuestre también que la curva yace por completo dentro de la tira vertical $0 \leqslant x < 1$. Use estos hechos para ayudar a bosquejar la cisoide.

54. Bosqueje la curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

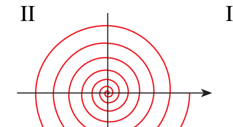
55. (a) En el ejemplo 11 las gráficas hacen pensar que el caracol $r = 1 + c \operatorname{sen}\theta$ tiene un bucle interno cuando $|c| > 1$. Demuestre que esto es cierto y determine los valores de θ que corresponden al bucle interior.
(b) De la figura 19 se ve que el limaçon pierde su hoyuelo cuando $c = \frac{1}{2}$. Demuestre esto.

56. Compare las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No use un dispositivo de graficación.)

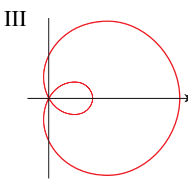
(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(c) $r = \cos(\theta/3)$
(d) $r = 1 + 2\cos\theta$
(e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$
(f) $r = 1 + 2\operatorname{sen} 3\theta$

I

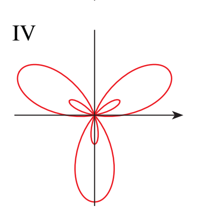
II



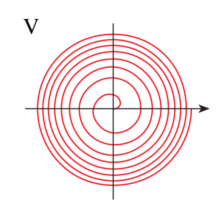
III



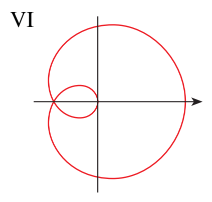
IV



V



VI



57–62 Encuentre la pendiente de la línea tangente a la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.

57. $r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/6$

58. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

59. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

60. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

61. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

62. $r = 1 + 2\theta \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$

63–68 Determine los puntos sobre la curva dada donde la tangente es horizontal o vertical.

63. $r = 3 \cos \theta$

64. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

65. $r = 1 + \cos \theta$

66. $r = e^{\theta}$

67. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

68. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

69. Muestre que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, donde $ab \neq 0$, representa un círculo, y encuentre su centro y radio.

70. Demuestre que las curvas $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a \cos \theta$ se cortan en ángulos rectos.

71–76 Use un dispositivo de graficación para trazar la curva polar. Elija el intervalo de parámetro para asegurarse de que produce la curva completa.

71. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

72. $r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$ (hipopede o grillete de caballo)

73. $r = e^{\operatorname{sen} \theta} - 2 \cos(4\theta)$ (curva de mariposa)

74. $r = \operatorname{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

75. $r = 2 - 5 \operatorname{sen}(\theta/6)$

76. $r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$

77. ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

78. Emplee una gráfica para estimar la coordenada y de los puntos superiores de la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Después use el cálculo para hallar el valor exacto.

79. (a) Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo. ¿Cómo se relaciona el número de bucles con n?
(b) ¿Qué sucede si la ecuación del inciso (a) se sustituye por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

80. Las ecuaciones $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, donde c es un número real y n es un entero positivo, definen una familia de curvas. ¿Cómo cambia la gráfica cuando aumenta n? ¿Cómo cambia cuando cambia c? Ilustre graficando suficientes miembros de la familia para apoyar sus conclusiones.

81. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares

$$r = \frac{1 - a \cos \theta}{1 + a \cos \theta}$$

Investigue cómo cambia la gráfica cuando cambia el número a. En particular, se deben identificar los valores de transición de a para los cuales cambia la forma básica de la curva.

82. El astrónomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudió la familia de curvas con ecuaciones polares

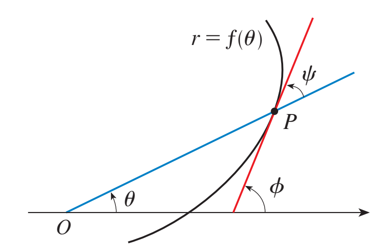
$$r^4 - 2c^2r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

donde a y c son números reales positivos. Estas curvas se llaman **óvalos de Cassini**, aun cuando son ovaladas para ciertos valores de a y c. (Cassini pensó que estas curvas podrían representar a las órbitas planetarias mejor que las elipses de Kepler). Investigue la variedad de formas que pueden tener estas curvas. En particular, ¿cómo se relacionan entre sí a y c cuando la curva se divide en dos partes?

83. Sea P cualquier punto (excepto el origen) en la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es el ángulo entre la línea tangente en P y la línea radial OP, muestre que

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugerencia:* Observe que $\psi = \phi - \theta$ en la figura.]



84. (a) Use el ejercicio 83 para mostrar que el ángulo entre la línea tangente y la línea radial es $\psi = \pi/4$ en cada punto sobre la curva $r = e^{\theta}$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y las líneas tangentes en los puntos donde $\theta = 0$ y $\pi/2$.
(c) Demuestre que cualquier curva polar $r = f(\theta)$ con la propiedad de que el ángulo ψ entre la línea radial y la línea tangente es una constante debe ser de la forma $r = Ce^{k\theta}$, donde C y k son constantes.

10.4 ÁREAS Y LONGITUDES EN COORDENADAS POLARES

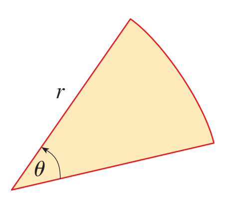


FIGURA 1

En esta sección se desarrolla la fórmula para el área de una región cuyo límite está dado por una ecuación polar. Se necesita usar la fórmula para el área de un sector de un círculo

1 $$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

donde, como en la figura 1, r es el radio y θ es la medida en radianes del ángulo central. La fórmula 1 se deduce del hecho de que el área de un sector es proporcional a su ángulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. (Véase también el ejercicio 35 en la sección 7.3.)

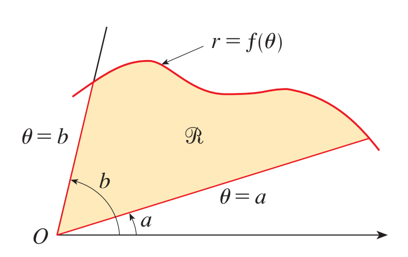


FIGURA 2

Sea $\mathcal{R}$ la región, ilustrada en la figura 2, acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función continua positiva y donde $0 < b - a \leqslant 2\pi$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con puntos finales $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e igual amplitud $\Delta\theta$. Estos rayos $\theta = \theta_i$ dividen a $\mathcal{R}$ en regiones más pequeñas con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si se elige θ_i^* en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, entonces el área ΔA_i de la i-ésima región se aproxima mediante el área del sector de un círculo con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $(f(\theta_i^*))$. (Véase fig. 3.)

Así, de la fórmula 1 se tiene

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

y, de este modo, una aproximación al área total A de $\mathcal{R}$ es

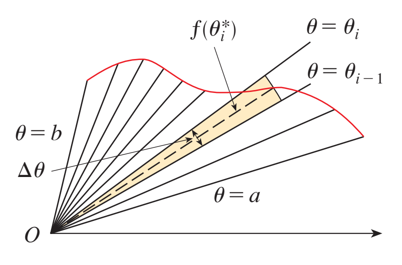


FIGURA 3

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

Se ve de la figura 3 que la aproximación en (2) mejora cuando $n \to \infty$. Pero las sumas en (2) son sumas de Riemann para la función $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, por eso,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Parece plausible (y de hecho se puede demostrar) que la fórmula para el área A de la región polar $\mathcal{R}$ es

3 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

La fórmula 3 con frecuencia se expresa como

4 $$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta$$

con el conocimiento de que $r = f(\theta)$. Note la similitud entre las fórmulas 1 y 4.

Cuando se aplica la fórmula 3 o 4, es útil considerar que el área es barrida por un rayo rotatorio a través de O que empieza con ángulo a y termina con ángulo b.

V EJEMPLO 1 Determine el área encerrada por un bucle de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN La curva $r = \cos 2\theta$ se bosquejó en el ejemplo 8 de la sección 10.3. Observe en la figura 4 que la región encerrada por el bucle derecho es barrida por un rayo que gira de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Por lo tanto, la fórmula 4 da

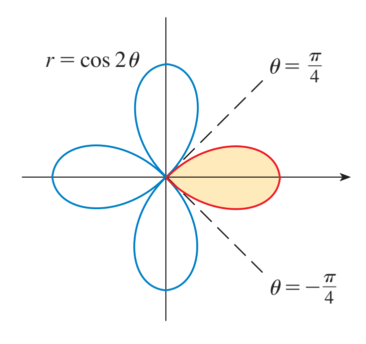


FIGURA 4

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ □

V EJEMPLO 2 Determine el área de la región que yace dentro del círculo $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

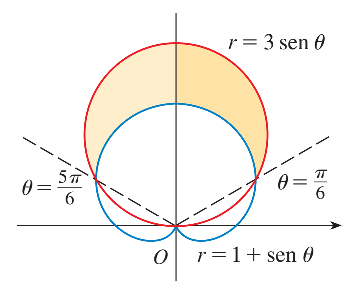


FIGURA 5

SOLUCIÓN La cardioide (véase el ejemplo 7 en la sección 10.3) y el círculo se bosquejan en la figura 5 y se sombrea la región deseada. Los valores de a y b en la fórmula 4 se determinan al hallar los puntos de intersección de las dos curvas. Se cortan cuando $3 \operatorname{sen} \theta = 1 + \operatorname{sen} \theta$, que da $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$, de modo que $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. El área deseada se encuentra restando el área dentro de la cardioide entre $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$ del área dentro del círculo de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Así,

$$A = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen} \theta)^2\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta$$

Puesto que la región es simétrica respecto al eje vertical $\theta = \pi/2$, se puede escribir

$$A = 2\left[\tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta - \tfrac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta\right]$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2\operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4\cos 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\, d\theta \qquad \left[\text{porque } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\right]$$

$$= 3\theta - 2\operatorname{sen} 2\theta + 2\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi$$ □

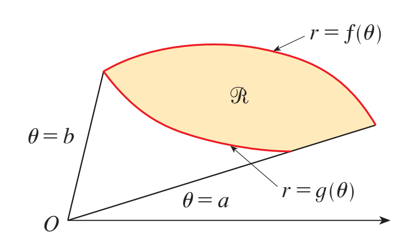


FIGURA 6

En el ejemplo 2 se ilustra el procedimiento para hallar el área de la región acotada por dos curvas polares. En general, sea $\mathcal{R}$ una región, como se ilustra en la figura 6, que está acotada por curvas con ecuaciones polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$, donde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ y $0 < b - a \leqslant 2\pi$. El área A de $\mathcal{R}$ se encuentra restando el área interna $r = g(\theta)$ del área dentro de $r = f(\theta)$, así que por medio de la fórmula 3 se tiene

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2\, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_a^b \left([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\right) d\theta$$

PRECAUCIÓN El hecho de que un solo punto tenga muchas representaciones en coordenadas polares, dificulta a veces hallar todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Por ejemplo, es obvio de la figura 5 que el círculo y la cardioide tienen tres puntos de intersección; sin embargo, en el ejemplo 2 se resolvieron las ecuaciones $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y se hallaron sólo dos puntos $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. El origen es también un punto de intersección, pero no se puede determinar resolviendo las ecuaciones de las curvas porque el origen no tiene representación simple en coordenadas polares que satisfaga ambas ecuaciones. Observe que, cuando se representa como $(0, 0)$ o $(0, \pi)$, el origen satisface a $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y, de tal manera, yace en el círculo; cuando se representa como $(0, 3\pi/2)$, satisface a $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y, por consiguiente, está en la cardioide. Considere dos puntos que se mueven a lo largo de las curvas cuando el valor de parámetro θ se incrementa de 0 a 2π. En una curva el origen se alcanza en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; en la otra curva se alcanza en

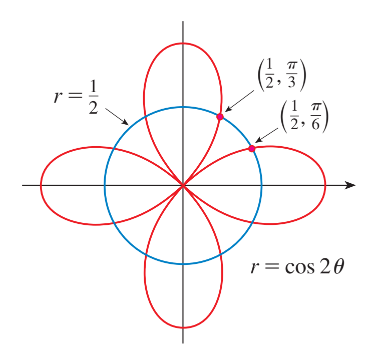


FIGURA 7

$\theta = 3\pi/2$. Los puntos no chocan en el origen porque llegan a él en diferentes tiempos, pero las curvas se cortan allí.

Así, para hallar *todos* los puntos de intersección de dos curvas polares, se recomienda dibujar las gráficas de ambas curvas. Es especialmente conveniente usar una calculadora o computadora como medio auxiliar para esta tarea.

EJEMPLO 3 Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si se resuelven las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$, se obtiene $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Así, los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen ambas ecuaciones son $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Se han hallado cuatro puntos de intersección: $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Sin embargo, se puede ver de la figura 7 que las curvas tienen otros cuatro puntos de intersección; a saber, $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Éstos se pueden hallar por medio de simetría o al notar que otra ecuación del círculo es $r = -\frac{1}{2}$ y resolviendo después las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\frac{1}{2}$. □

LONGITUD DE ARCO

Para hallar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, se considera a θ como un parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Al usar la regla del producto y derivar con respecto a θ, se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta$$

así, con $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta \\ &\quad + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\text{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\end{aligned}$$

Si se supone que f' es continua, se puede usar el teorema 10.2.6 para escribir la longitud de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Por lo tanto, la longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, es

5 $$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

V EJEMPLO 4 Determine la longitud de la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN La cardioide se muestra en la figura 8. (Se bosqueja en el ejemplo 7 de la sección 10.3.) Su longitud total está dada por el intervalo de parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, así que la fórmula 5 da

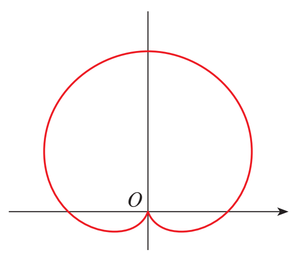


FIGURA 8
$r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \operatorname{sen} \theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \operatorname{sen} \theta}\, d\theta$$

Se podría evaluar esta integral al multiplicar y dividir el integrando por $\sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}$, o se podría usar un sistema algebraico computacional. En cualquier caso, se encuentra que la longitud de la cardioide es $L = 8$. □

10.4 EJERCICIOS

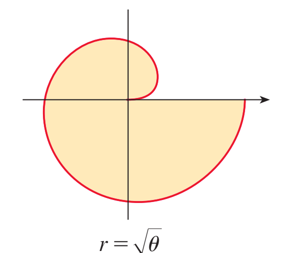
1–4 Encuentre el área de la región que está acotada por la curva dada y yace en el sector especificado.

1. $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$ **2.** $r = e^{\theta/2}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$

3. $r = \operatorname{sen} \theta$, $\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3$ **4.** $r = \sqrt{\operatorname{sen} \theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$

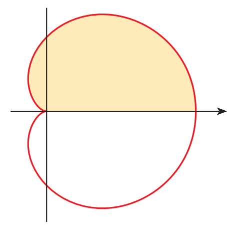
5–8 Encuentre el área de la región sombreada.

5.



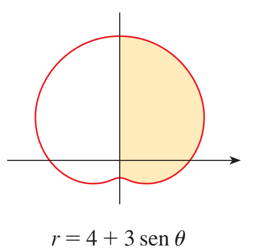
$r = \sqrt{\theta}$

6.



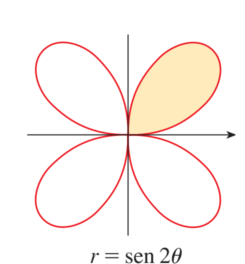
$r = 1 + \cos \theta$

7.



$r = 4 + 3 \operatorname{sen} \theta$

8.



$r = \operatorname{sen} 2\theta$

9–14 Bosqueje la curva y calcule el área que encierra ésta.

9. $r = 3 \cos \theta$ **10.** $r = 3(1 + \cos \theta)$

11. $r^2 = 4 \cos 2\theta$ **12.** $r = 2 - \operatorname{sen} \theta$

13. $r = 2 \cos 3\theta$ **14.** $r = 2 + \cos 2\theta$

15–16 Bosqueje la curva y calcule el área que encierra ésta.

15. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} 6\theta$ **16.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 3 \operatorname{sen} 9\theta$

17–21 Determine el área de la región encerrada por un bucle de la curva.

17. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **18.** $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

19. $r = 3 \cos 5\theta$ **20.** $r = 2 \operatorname{sen} 6\theta$

21. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ (bucle interno).

22. Calcule el área encerrada por el bucle de la **estrofoide** $r = 2 \cos \theta - \sec \theta$.

23–28 Encuentre el área de la región que yace dentro de la primera curva y fuera de la segunda.

23. $r = 2 \cos \theta$, $r = 1$ **24.** $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$, $r = 1$

25. $r^2 = 8 \cos 2\theta$, $r = 2$ **26.** $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$, $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

27. $r = 3 \cos \theta$, $r = 1 + \cos \theta$

28. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$, $r = 2 - \operatorname{sen} \theta$

29–34 Determine el área de la región localizada dentro de ambas curvas.

29. $r = \sqrt{3} \cos \theta$, $r = \operatorname{sen} \theta$

30. $r = 1 + \cos \theta$, $r = 1 - \cos \theta$

31. $r = \operatorname{sen} 2\theta$, $r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2 \cos \theta$, $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$

33. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

34. $r = a \operatorname{sen} \theta$, $r = b \cos \theta$, $a > 0$, $b > 0$

35. Obtenga el área que está dentro del bucle más grande y fuera del más pequeño del limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$.

36. Calcule el área entre un bucle grande y el bucle pequeño cerrado de la curva $r = 1 + 2 \cos 3\theta$.

37–42 Determine los puntos de intersección de las siguientes curvas.

37. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$, $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

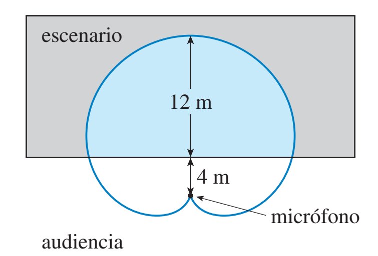
38. $r = 1 - \cos \theta$, $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

39. $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$, $r = 1$ **40.** $r = \cos 3\theta$, $r = \operatorname{sen} 3\theta$

41. $r = \operatorname{sen} \theta$, $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **42.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

43. Los puntos de intersección de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y el bucle en espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, no se pueden determinar de manera exacta. Use un dispositivo de graficación para hallar valores aproximados de θ en los que se cruzan. Después use estos valores para estimar el área que yace dentro de ambas curvas.

44. Cuando se graban programas en vivo, es frecuente que los ingenieros de sonido utilicen un micrófono con fonocaptor en forma de cardioide porque suprime ruido de la audiencia. Suponga que el micrófono se coloca a 4 m del frente del escenario (como en la figura) y la frontera de la región de captación óptima está dada por el cardioide $r = 8 + 8 \operatorname{sen}\theta$, donde r se mide en metros y el micrófono está en la pértiga. Los músicos desean conocer el área que tendrán en el escenario dentro del campo óptimo de captación del micrófono. Conteste esta pregunta.



45–48 Encuentre la longitud exacta de la curva polar.

45. $r = 3 \operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

46. $r = e^{2\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

47. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $r = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

49–52 Por medio de una calculadora, determine la longitud de la curva correcta hasta cuatro decimales.

49. $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$

50. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

51. $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$

52. $r = 1 + \cos(\theta/3)$

53–54 Grafique la curva y determine su longitud.

53. $r = \cos^4(\theta/4)$

54. $r = \cos^2(\theta/2)$

55. (a) Use la fórmula 10.2.7 para mostrar que el área de la superficie generada al hacer girar la curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

(donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$) respecto al eje polar es

$$S = \int_a^b 2\pi r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

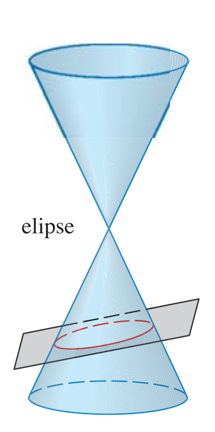
(b) Use la fórmula del inciso (a) para hallar el área de superficie generada al hacer girar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ respecto al eje polar.

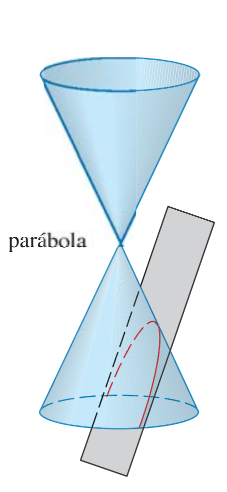
56. (a) Encuentre una fórmula para el área de la superficie generada al hacer girar la curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ (donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$), respecto a la línea $\theta = \pi/2$.

(b) Calcule el área de superficie generada al hacer girar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ respecto a la línea $\theta = \pi/2$.

10.5 SECCIONES CÓNICAS

En esta sección se dan definiciones geométricas de parábolas, elipses e hipérbolas, y se deducen sus ecuaciones estándar. Se llaman **secciones cónicas**, o **cónicas**, porque resultan de cortar un cono con un plano, como se muestra en la figura 1.





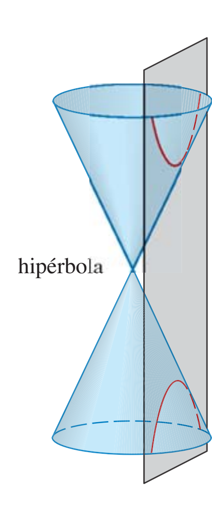


FIGURA 1
Cónicas

FIGURA 2

PARÁBOLAS

Una **parábola** es el conjunto de puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo F (llamado **foco**) y una línea fija (llamada **directriz**). Esta definición se ilustra mediante la figura 2. Observe que el punto a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola; se llama **vértice**. La línea a través del foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola.

En el siglo XVI Galileo mostró que la trayectoria de un proyectil disparado al aire a un ángulo respecto al suelo, es una parábola. Desde entonces, las formas parabólicas se han usado en el diseño de faros de automóvil, telescopios reflectores y puentes suspendidos. (Véase en el problema 18 de la página 268 la propiedad de reflexión de parábolas que las hace tan útiles.)

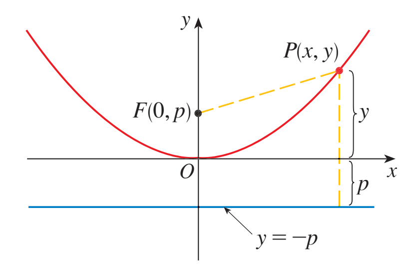


FIGURA 3

Se obtiene una ecuación particularmente simple para una parábola si se coloca su vértice en el origen y su directriz paralela al eje x como en la figura 3. Si el foco está en el punto $(0, p)$, entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la parábola, por lo tanto la distancia de P al foco es

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y la distancia de P a la directriz es $|y + p|$. (En la figura 3 se ilustra el caso donde $p > 0$.) La propiedad definitoria de una parábola es que estas distancias son iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Se obtiene una ecuación equivalente al elevar al cuadrado y simplificar:

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$

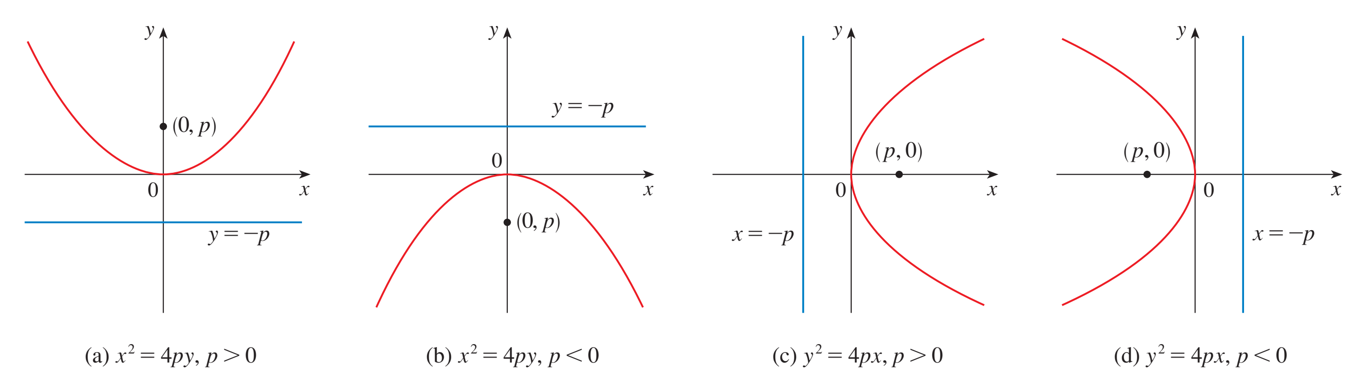
$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

1 Una ecuación de la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es

$$x^2 = 4py$$

Si se escribe $a = 1/(4p)$, entonces la ecuación estándar de una parábola (1) se convierte en $y = ax^2$. Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$ [véase fig. 4, incisos (a) y (b)]. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque (1) permanece sin cambio cuando se sustituye por $-x$.



(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ (b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ (c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ (d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

FIGURA 4

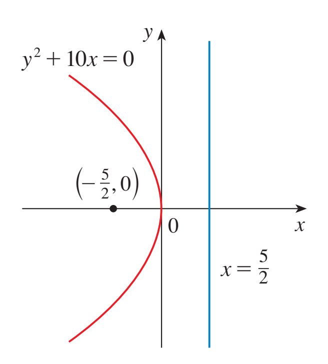


FIGURA 5

Si se intercambian x y y en (1), se obtiene

2 $$y^2 = 4px$$

que es una ecuación de la parábola con foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$. (Intercambiar x y y equivale a reflejar respecto a la diagonal $y = x$.) La parábola se abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$ [véase fig. 4, incisos (c) y (d)]. En ambos casos, la gráfica es simétrica con respecto al eje x, que es el eje de la parábola.

EJEMPLO 1 Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 10x = 0$ y bosqueje la gráfica.

SOLUCIÓN Si se escribe la ecuación como $y^2 = -10x$ y se compara con la ecuación 2, se ve que $4p = -10$, de modo que $p = -\frac{5}{2}$. Así, el foco es $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{5}{2}$. El bosquejo se muestra en la figura 5. □

ELIPSES

Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano y la suma de sus distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (véase fig. 6). Estos dos puntos fijos se llaman **focos** (plural de **lugar geométrico**). Una de las leyes de Kepler es que las órbitas de los planetas en el sistema solar son elipses con el Sol en un foco.

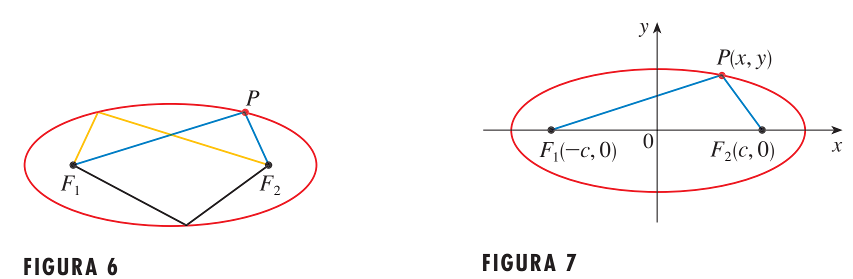


FIGURA 6

FIGURA 7

A fin de obtener la ecuación más simple para una elipse, se colocan los focos en el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ como en la figura 7, de modo que el origen esté a la mitad entre los focos. Sea $2a > 0$ la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos, en este caso $p(x, y)$ es un punto de la elipse cuando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

es decir, $$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o bien $$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, se tiene

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que se simplifica a $$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

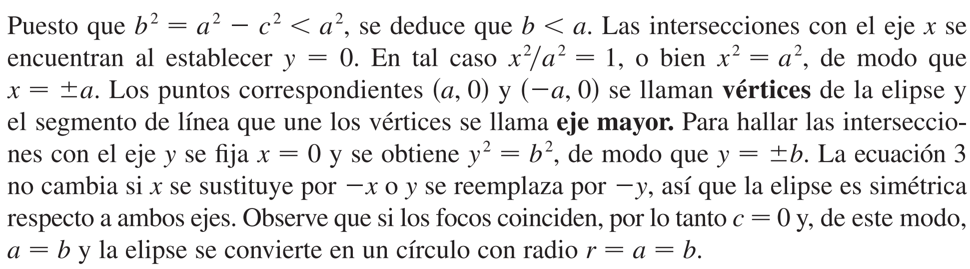
De nuevo se eleva al cuadrado:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

que se transforma en $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Del triángulo F_1F_2P de la figura 7 se ve que $2c < 2a$, así que $c < a$, por lo tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniencia, sea $b^2 = a^2 - c^2$. Después la ecuación de la elipse se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ o, si ambos lados se dividen entre a^2b^2,

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$


Puesto que $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. Las intersecciones con el eje x se encuentran al establecer $y = 0$. En tal caso $x^2/a^2 = 1$, o bien $x^2 = a^2$, de modo que $x = \pm a$. Los puntos correspondientes $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llaman **vértices** de la elipse y el segmento de línea que une los vértices se llama **eje mayor.** Para hallar las intersecciones con el eje y se fija $x = 0$ y se obtiene $y^2 = b^2$, de modo que $y = \pm b$. La ecuación 3 no cambia si x se sustituye por $-x$ o y se reemplaza por $-y$, así que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes. Observe que si los focos coinciden, por lo tanto $c = 0$ y, de este modo, $a = b$ y la elipse se convierte en un círculo con radio $r = a = b$.

Se resume el análisis como sigue (véase también fig. 8).

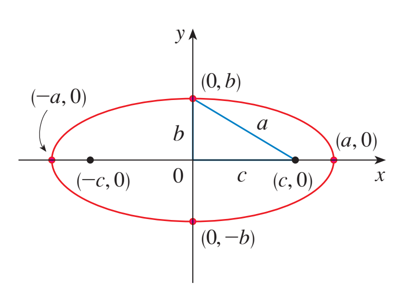


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b$

$\boxed{4}$ La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$$

tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$.

Si los focos de una elipse se localizan en el eje y en $(0, \pm c)$, entonces se puede hallar su ecuación al intercambiar x y y en (4). (Véase fig. 9.)

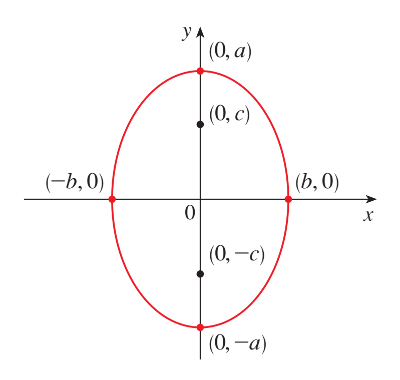


FIGURA 9
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a \geq b$

$\boxed{5}$ La elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geq b > 0$$

tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$.

V EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

SOLUCIÓN Divida ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse, así que se tiene $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Los cruces con el eje x son ± 4 y los cruces con el eje y son ± 3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, de modo que $c = \sqrt{7}$ y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$. La gráfica se bosqueja en la figura 10. □

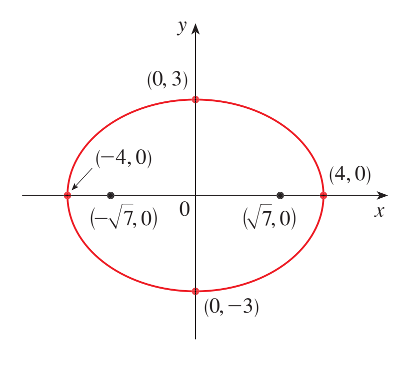


FIGURA 10
$9x^2 + 16y^2 = 144$

V EJEMPLO 3 Obtenga una ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 2)$ y vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUCIÓN Al usar la notación de (5), se tiene $c = 2$ y $a = 3$. En tal caso se obtiene $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, así que una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Otra forma de escribir la ecuación es $9x^2 + 5y^2 = 45$. □

Al igual que las parábolas, las elipses tienen una propiedad de reflexión interesante que tiene consecuencias prácticas. Si se coloca una fuente de luz o sonido en un foco con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz o sonido se refleja de la superficie al otro foco (véase el ejercicio 63). Este principio se usa en *litotripsia*, un tratamiento para cálculos renales. Un reflector con sección transversal elíptica se coloca de tal manera que el cálculo está en un foco. Ondas sonoras de alta intensidad generadas en el otro foco, se reflejan hacia el cálculo y lo destruyen sin dañar el tejido circundante. Se ahorra al paciente el traumatismo de la cirugía y se recupera en pocos días.

HIPÉRBOLAS

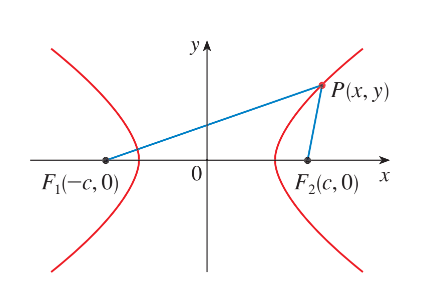


FIGURA 11
P está sobre la hipérbola cuando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$

Una **hipérbola** es el conjunto de los puntos en un plano y la diferencia de sus distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante. Esta definición se ilustra en la figura 11.

Las hipérbolas ocurren con frecuencia como gráficas de ecuaciones en química, física, biología y economía (ley de Boyle, ley de Ohm, curvas de oferta y demanda). Una aplicación particularmente importante de las hipérbolas se encuentra en los sistemas de navegación desarrollados en las guerras mundiales I y II (véase el ejercicio 51).

Observe que la definición de una hipérbola es similar a la de una elipse; el único cambio es que la suma de las distancias se convirtió en una diferencia de distancias. De hecho, la deducción de la ecuación de una hipérbola es también similar a la que se dio antes para una elipse. Se deja como ejercicio 52 demostrar que cuando los focos están sobre el eje x en $(\pm c, 0)$ y la diferencia de distancias es $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, en seguida la ecuación de la hipérbola es

6 $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que las intersecciones con el eje x son de nuevo $\pm a$ y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. Pero si se escribe $x = 0$ en la ecuación 6 se obtiene $y^2 = -b^2$, lo cual es imposible, así que no hay intersección con el eje y. La hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes.

Para analizar más la hipérbola, se examina la ecuación 6 y se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

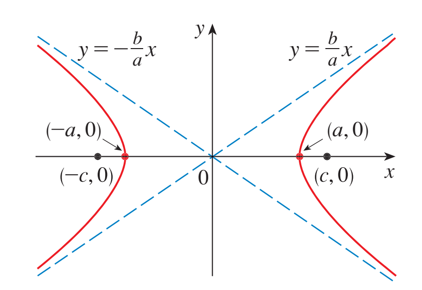


FIGURA 12
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Esto muestra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por consiguiente, se tiene $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola consta de dos partes, llamadas ramas.

Cuando se dibuja una hipérbola, es útil dibujar primero sus **asíntotas**, que son las líneas discontinuas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ mostradas en la figura 12. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas; es decir, se aproximan de manera arbitraria a las asíntotas. [Véase el ejercicio 69 en la sección 4.5, donde estas líneas se muestra como una asíntota inclinada.]

7 La hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm(b/a)x$.

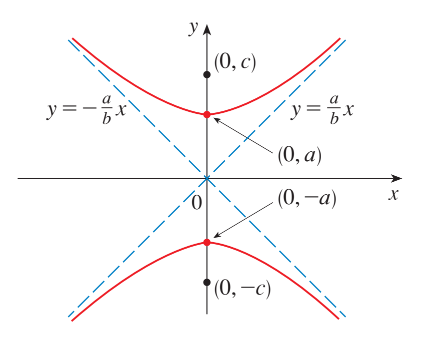


FIGURA 13
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

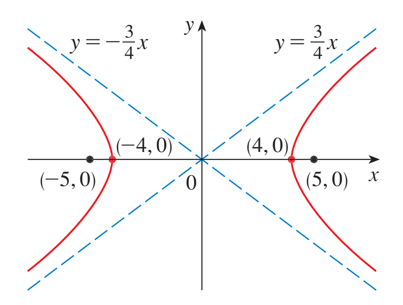


FIGURA 14
$9x^2 - 16y^2 = 144$

Si los focos de una hipérbola están en el eje y, entonces al invertir los roles de x y y se obtiene la siguiente información, que se ilustra en la figura 13.

8 La hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm(a/b)x$.

EJEMPLO 4 Encuentre los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Si se dividen ambos lados de la ecuación entre 144, se convierte en

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que es la forma dada en (7) con $a = 4$ y $b = 3$. Puesto que $c^2 = 16 + 9 = 25$, los focos son $(\pm 5, 0)$. Las asíntotas son las líneas $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la figura 14. □

EJEMPLO 5 Encuentre los focos y la ecuación de la hipérbola con vértices $(0, \pm 1)$ y asíntota $y = 2x$.

SOLUCIÓN De la figura (8) y la información dada, se ve que $a = 1$ y $a/b = 2$. Así, $b = a/2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Los focos son $\left(0, \pm\sqrt{5}/2\right)$ y la ecuación de la hipérbola es

$$y^2 - 4x^2 = 1$$ □

CÓNICAS DESPLAZADAS

Como se explica en el apéndice C, se desplazan las cónicas al tomar las ecuaciones estándar (1), (2), (4), (5), (7) y (8) y reemplazar x y y por $x - h$ y $y - k$.

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ y vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUCIÓN El eje principal es el segmento de línea que une los vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ y tiene longitud 4, de modo que $a = 2$. La distancia entre los focos es 2, en estos términos $c = 1$. Así, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Puesto que el centro de la elipse es $(3, -2)$, se reemplazan x y y en (4) por $x - 3$ y $y + 2$ para obtener

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

como la ecuación de la elipse. □

V EJEMPLO 7 Bosqueje la cónica

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

y determine sus focos.

SOLUCIÓN Se completan los cuadrados como sigue:

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y - 1)^2 - 9(x - 4)^2 = 36$$

$$\frac{(y - 1)^2}{9} - \frac{(x - 4)^2}{4} = 1$$

Ésta es la forma (8) excepto que x y y se reemplazan por $x - 4$ y $y - 1$. Así, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y $c^2 = 13$. La hipérbola se desplaza cuatro unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. Los focos son $(4, 1 + \sqrt{13})$ y $(4, 1 - \sqrt{13})$ y los vértices son $(4, 4)$ y $(4, -2)$. Las asíntotas son $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$. La hipérbola se bosqueja en la figura 15. □

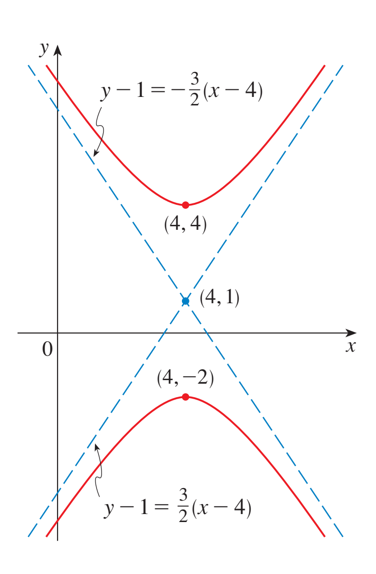


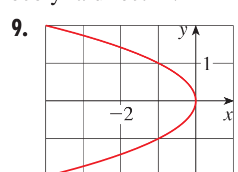
FIGURA 15
$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

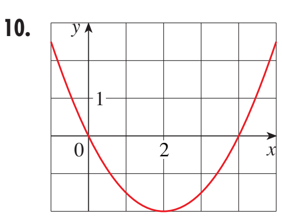
10.5 EJERCICIOS

1–8 Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y bosqueje su gráfica.

1. $x = 2y^2$
2. $4y + x^2 = 0$
3. $4x^2 = -y$
4. $y^2 = 12x$
5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$
6. $x - 1 = (y + 5)^2$
7. $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$
8. $y + 12x - 2x^2 = 16$

9–10 Obtenga una ecuación de la parábola. Después encuentre el foco y la directriz.

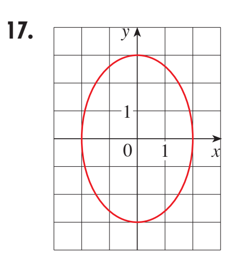
9.


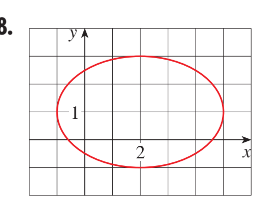
10.


11–16 Determine los vértices y focos de la elipse y bosqueje su gráfica.

11. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$
12. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$
13. $4x^2 + y^2 = 16$
14. $4x^2 + 25y^2 = 25$
15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17–18 Obtenga la ecuación de la elipse. Después encuentre sus focos.

17.


18.


19–24 Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y bosqueje su gráfica.

19. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$
20. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$
21. $y^2 - x^2 = 4$
22. $9x^2 - 4y^2 = 36$
23. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$
24. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

25–30 Identifique el tipo de sección cónica cuya ecuación se da y encuentre los vértices y focos.

25. $x^2 = y + 1$
26. $x^2 = y^2 + 1$
27. $x^2 = 4y - 2y^2$
28. $y^2 - 8y = 6x - 16$
29. $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$
30. $4x^2 + 4x + y^2 = 0$

31–48 Encuentre una ecuación para la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(0, -2)$

32. Parábola, vértice $(1, 0)$, directriz $x = -5$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, directriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(3, 6)$, vértice $(3, 2)$

35. Parábola, vértice $(2, 3)$, eje vertical, que pasa por $(1, 5)$

36. Parábola, eje horizontal, que pasa por $(-1, 0)$, $(1, -1)$, y $(3, 1)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértices $(0, \pm 13)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0, 6)$ vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$

40. Elipse, focos $(0, -1)$, $(8, -1)$, vértice $(9, -1)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, lugar geométrico $(-1, 6)$

42. Elipse, lugares geométricos $(\pm 4, 0)$, que pasa por $(-4, 1.8)$

43. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, lugares geométricos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbola, vértices $(0, \pm 2)$, lugares geométricos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbola, vértices $(-3, -4)$, $(-3, 6)$, lugares geométricos $(-3, -7)$, $(-3, 9)$

46. Hipérbola, vértices $(-1, 2)$, $(7, 2)$, lugares geométricos $(-2, 2)$, $(8, 2)$

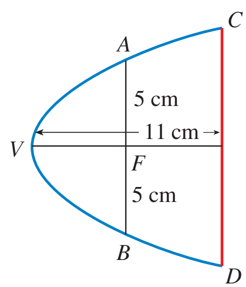
47. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

48. Hipérbola, lugares geométricos $(2, 0)$, $(2, 8)$, asíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ y $y = 5 - \frac{1}{2}x$

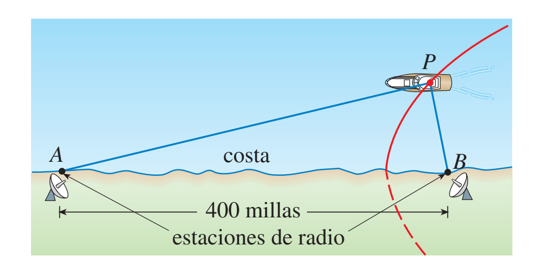
---

49. El punto en una órbita lunar próxima a la superficie de la Luna se llama *periluna,* y el punto más alejado de la superficie se llama *apoluna*. La nave espacial *Apolo 11* se colocó en una órbita lunar elíptica con altitud de periluna 110 km y altitud de apoluna 314 km (arriba de la Luna). Encuentre una ecuación para esta elipse si el radio de la Luna es de 1 728 km y su centro está en un foco.

50. Una sección transversal de un reflector parabólico se muestra en la figura. El bulbo se localiza en el foco y la abertura en el foco es 10 cm.
(a) Encuentre una ecuación de la parábola.
(b) Determine el diámetro de la abertura $|CD|$, a 11 cm del vértice.



51. En el sistema de navegación por radio LORAN (LOng RAnge Navigation), dos estaciones de radio localizadas en A y B, transmiten en forma simultánea señales a un barco o avión localizado en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo de recibir estas señales en una diferencia de distancia $|PA| - |PB|$, y esto, de acuerdo con la definición de una hipérbola, localiza al barco o avión en una rama de una hipérbola (véase la figura). Suponga que la estación B se localiza a 400 millas al este de la estación A sobre la costa. Un barco recibe la señal de B 1 200 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de A.
(a) Si se supone que la señal de radio viaja a una rapidez de 980 pies/μs, encuentre la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco.
(b) Si el barco se dirige al norte de B, ¿qué tan lejos de la costa está el barco?



52. Use la definición de hipérbola para deducir la ecuación 6 para una hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

53. Muestre que la función definida por la rama superior de la hipérbola $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ es cóncava hacia arriba.

54. Encuentre una ecuación para la elipse con focos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y eje principal de longitud 4.

55. Establezca el tipo de curva representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 1$$

en cada uno de los siguientes casos: (a) $k > 16$,
(b) $0 < k < 16$ y (c) $k < 0$.
(d) Muestre que las curvas de los incisos (a) y (b) tienen los mismos focos, sin importar cuál sea el valor de k.

56. (a) Muestre que la ecuación de la línea tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) se puede escribir como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

(b) ¿Cuál es la intersección con el eje x de esta recta tangente? Use este hecho para dibujar la tangente.

57. Demuestre que las líneas tangentes a la parábola $x^2 = 4py$ trazadas desde cualquier punto en la directriz son perpendiculares.

58. Demuestre que si una elipse y una hipérbola tienen los mismos lugares geométricos, entonces sus líneas tangentes en cada punto de intersección son perpendiculares.

59. Use la regla Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

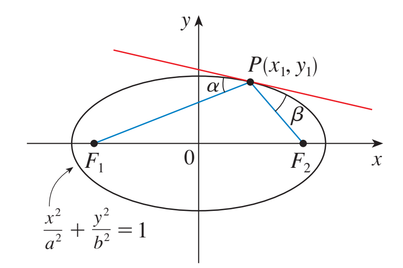
60. El planeta Plutón viaja en una órbita elíptica alrededor del Sol (en un foco). La longitud del eje mayor es 1.18×10^{10} km y la

longitud del eje menor es 1.14×10^{10} km. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la distancia que viaja el planeta durante una órbita completa alrededor del Sol.

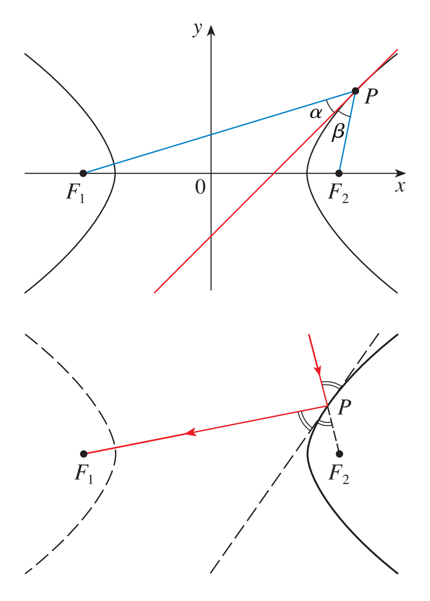
61. Encuentre el área de la región encerrada por la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y la recta vertical que pasa por un foco.

62. (a) Si una elipse gira alrededor de su eje mayor, encuentre el volumen del sólido resultante.
(b) Si gira alrededor de su eje menor, encuentre el volumen resultante.

63. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las líneas PF_1, PF_2 y la elipse como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. Esto explica cómo funcionan las cúpulas susurrantes y la litotricia. El sonido que viene de un foco se refleja y pasa por el otro foco. [*Sugerencia:* Use la fórmula del problema 17 de la página 268 para mostrar que $\tan \alpha = \tan \beta$.]



64. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las líneas PF_1, PF_2 y la hipérbola como se ilustra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Ésta es la propiedad de reflexión de la hipérbola. Muestra que la luz dirigida a un foco F_2 de un espejo hiperbólico, se refleja hacia el otro foco F_1.)



10.6 SECCIONES CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES

En la sección precedente se definió la parábola en términos de un foco y una directriz, pero se definió la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de secciones cónicas en términos de un foco y directriz. Además, si se coloca el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple. La cual es una descripción cómoda del movimiento de planetas, satélites y cometas.

1 TEOREMA Sea F un punto fijo (llamado **foco**) y l una línea fija (llamada **directriz**) en un plano. Sea e un número positivo fijo (conocido como la **excentricidad**). El conjunto de los puntos P en el plano tal que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(La relación de la distancia desde F a la distancia desde l es la constante e) es una sección cónica. La cónica es

(a) una elipse si $e < 1$

(b) una parábola si $e = 1$

(c) una hipérbola si $e > 1$

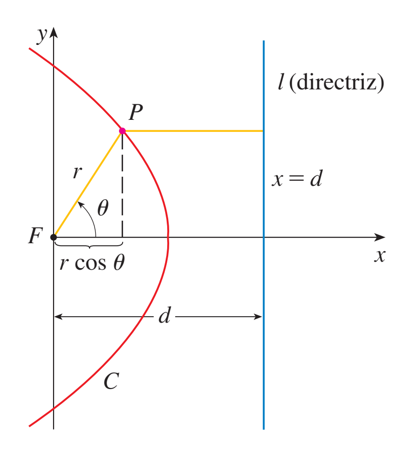


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN Observe que si la excentricidad es $e = 1$, en tal caso $|PF| = |Pl|$ y, de este modo, la condición dada simplemente se convierte en la definición de una parábola según se da en la sección 10.5.

Se colocará el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. Así, la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), se ve de la figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

Así, la condición $|PF|/|Pl| = e$, o $|PF| = e|Pl|$, se convierte en

2 $$r = e(d - r\cos\theta)$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados de esta ecuación polar y se convierte a coordenadas rectangulares, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

o bien, $$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Después de completar el cuadrado, se tiene

3 $$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Si $e < 1$, se reconoce la ecuación 3 como la ecuación de una elipse. De hecho, es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

4 $$h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

En la sección 10.5 se encuentra que los focos de una elipse están a una distancia c del centro, donde

5 $$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Esto demuestra que $$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

y confirma que el foco como se definió en el teorema 1 significa lo mismo que el foco definido en la sección 10.5. Se deduce también de las ecuaciones 4 y 5 que la excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, entonces $1 - e^2 < 0$ y se ve que la ecuación 3 representa una hipérbola. Justo como se hizo antes, se podría reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

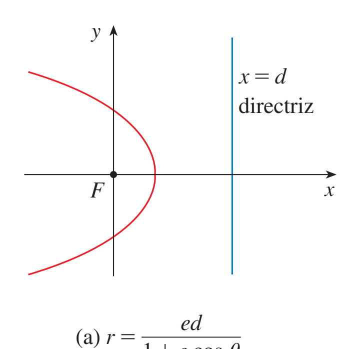
y se ve que

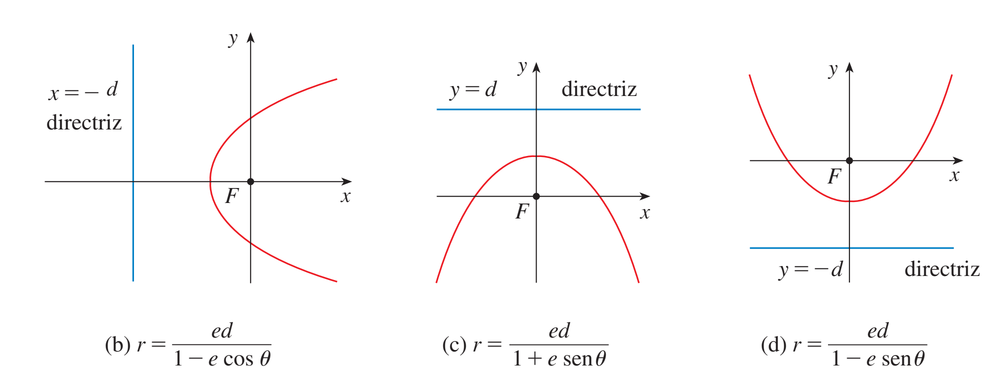
$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{donde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$ □

Al resolver r de la ecuación 2 para r, se ve que la ecuación polar de la cónica mostrada en la figura 1 se puede escribir como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si se elige que la directriz esté a la izquierda del foco como $x = -d$, o si se elige la directriz paralela al eje polar como $y = \pm d$, entonces la ecuación polar de la cónica está dada por el siguiente teorema, que se ilustra mediante la figura 2. (Véase los ejercicios 21–23.)





(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 2
Ecuaciones polares de cónicas

6 TEOREMA Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o bien} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

representa una sección cónica con excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación polar para una parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la línea $y = -6$.

SOLUCIÓN Al usar el teorema 6 con $e = 1$ y $d = 6$, y emplear el inciso (d) de la figura 2, se ve que la ecuación de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \text{sen}\,\theta}$$ □

V EJEMPLO 2 Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encuentre la excentricidad, identifique la cónica, localice la directriz y bosqueje la cónica.

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador entre 3, se escribe la ecuación como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

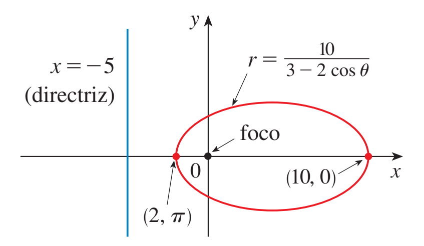


FIGURA 3

Del teorema 6 se ve que ésta representa una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Puesto que $ed = \frac{10}{3}$, se tiene

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

de tal manera, la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -5$. Cuando $\theta = 0$, $r = 10$; cuando $\theta = \pi$, $r = 2$. Por eso, los vértices tienen coordenadas polares $(10, 0)$ y $(2, \pi)$. La elipse se bosqueja en la figura 3. □

EJEMPLO 3 Bosqueje la cónica $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en la forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

se ve que la excentricidad es $e = 2$ y, por lo tanto, la ecuación representa una hipérbola. Puesto que $ed = 6$, $d = 3$ y la directriz tiene ecuación $y = 3$. Los vértices ocurren cuando $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, de modo que son $(2, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. También es útil graficar las intersecciones con el eje x. Éstas ocurren cuando $\theta = 0, \pi$; en ambos casos $r = 6$. Para más exactitud, se podrían dibujar las asíntotas. Note que $r \to \pm\infty$ cuando $1 + 2 \operatorname{sen} \theta \to 0^+$ o 0^- y $1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ cuando $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$. Así, las asíntotas son paralelas a los rayos $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = 11\pi/6$. La hipérbola se bosqueja en la figura 4.

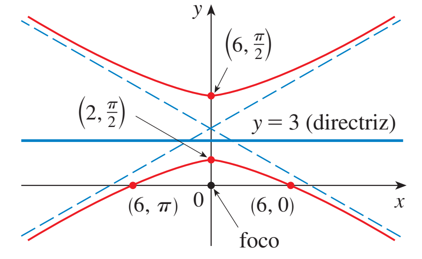


FIGURA 4
$r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$

□

Al hacer girar secciones cónicas, se encuentra mucho más conveniente usar ecuaciones polares que cartesianas. Se usa el hecho (véase el ejercicio 75 de la sección 10.3) de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo α.

V EJEMPLO 4 Si la elipse del ejemplo 2 se hace girar por un ángulo $\pi/4$ respecto al origen, determine una ecuación polar y grafique la elipse resultante.

SOLUCIÓN Se obtiene la ecuación de la elipse rotada reemplazando θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Así que la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

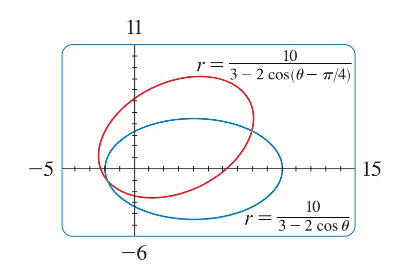


FIGURA 5

Se usa esta ecuación para hacer la gráfica de la elipse rotada en la figura 5. Observe que la elipse ha sido rotada respecto a su foco izquierdo. □

En la figura 6 se usa una computadora para bosquejar varias cónicas para demostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e es cercana a 0 la elipse es casi circular, mientras que se vuelve más alargada cuando $e \to 1^-$. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola.

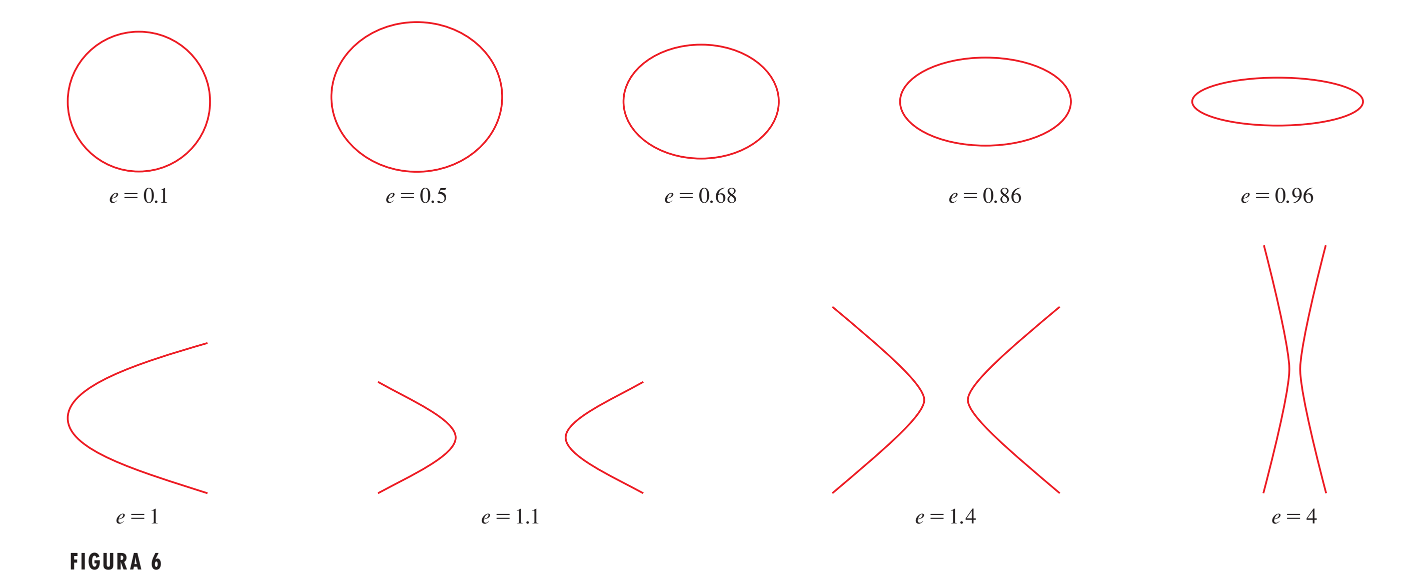


FIGURA 6

LEYES DE KEPLER

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base en enormes cantidades de datos astronómicos, publicó las siguientes tres leyes de movimiento planetario.

LEYES DE KEPLER

1. Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el Sol en un foco.
2. La recta que une el Sol a un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, aplican igualmente bien al movimiento de lunas, cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional. En la sección 13.4 se demuestra cómo deducir las leyes de Kepler a partir de las leyes de Newton. Aquí se emplea la primera ley de Kepler, junto con la ecuación polar de una elipse, para calcular cantidades de interés en astronomía.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse en términos de su excentricidad e y su eje semimayor a. Puede escribir la distancia d del foco a la directriz en términos de a si usa (4):

$$a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Entonces $ed = a(1 - e^2)$. Si la directriz es $x = d$, entonces la ecuación polar es

$$r = \frac{ed}{1 + \cos\theta} = r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

7 La ecuación polar de una elipse con foco en el origen, eje semimayor a, excentricidad e y directriz $x = d$ se puede escribir en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

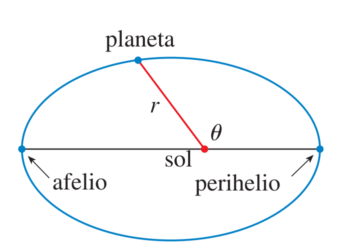


FIGURA 7

Las posiciones de un planeta que sean más cercanas al Sol, y más cercanas a éste, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse. (Veáse figura 7.) Las distancias del Sol al perihelio y afelio reciben el nombre de **distancia al perihelio** y **distancia al afelio**, respectivamente. En la figura 1 el Sol está en el foco F, de modo que en el perihelio se tiene $\theta = 0$ y, de la ecuación 7,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

Del mismo modo, en el afelio $\theta = \pi$ y $r = a(1 + e)$.

8 La distancia al perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia al afelio es $a(1 + e)$.

EJEMPLO 5

(a) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco), dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es de unos 2.99×10^8 km.

(b) Encuentre la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

SOLUCIÓN

(a) La longitud del eje mayor es $2a = 2.99 \times 10^8$, por lo que $a = 1.495 \times 10^8$. No indican que $e = 0.017$ y por tanto, de la ecuación 7, una ecuación de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{(1.495 \times 10^8)[1 - (0.017)^2]}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

o bien, aproximadamente,

$$r = \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

(b) De (8), la distancia al perihelio de la Tierra al Sol es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.47 \times 10^8 \text{ km}$$

y la distancia al afelio es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.52 \times 10^8 \text{ km}$$

□

10.6 EJERCICIOS

1–8 Escriba una ecuación polar de una cónica con el foco en el origen y los datos dados.

1. Hipérbola, excentricidad $\frac{7}{4}$, directriz $y = 6$

2. Parábola, directriz $x = 4$

3. Elipse, excentricidad $\frac{3}{4}$, directriz $x = -5$

4. Hipérbola, excentricidad 2, directriz $y = -2$

5. Parábola, vértice $(4, 3\pi/2)$

6. Elipse, excentricidad 0.8, vértice $(1, \pi/2)$

7. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $r = 4 \sec \theta$

8. Hipérbola, excentricidad 3, directriz $r = -6 \csc \theta$

9–16 (a) Encuentre la excentricidad, (b) identifique la cónica, (c) dé una ecuación de la directriz y (d) bosqueje la cónica.

9. $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

10. $r = \dfrac{12}{3 - 10 \cos \theta}$

11. $r = \dfrac{12}{4 - \operatorname{sen} \theta}$

12. $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$

13. $r = \dfrac{9}{6 + 2 \cos \theta}$

14. $r = \dfrac{8}{4 + 5 \operatorname{sen} \theta}$

15. $r = \dfrac{3}{4 - 8 \cos \theta}$

16. $r = \dfrac{10}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta}$

17. (a) Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica $r = 1/(1 - 3 \operatorname{sen} \theta)$ y grafique la cónica y su directriz.
(b) Si esta cónica se hace girar en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo $3\pi/4$, escriba la ecuación resultante y grafique su curva.

18. Grafique la cónica $r = 5/(2 + 2 \cos \theta)$ y su directriz. También grafique la cónica obtenida al girar esta curva alrededor del origen todo un ángulo $\pi/3$.

19. Grafique las cónicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la curva?

20. (a) Grafique las cónicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d a la forma de la cónica?

(b) Grafique las cónicas $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la cónica?

21. Muestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $x = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

22. Muestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

23. Muestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

24. Muestre que las parábolas $r = c/(1 + \cos \theta)$ y $r = d/(1 - \cos \theta)$ se cortan en ángulos rectos.

25. (a) La órbita de Marte alrededor del Sol es una elipse con excentricidad 0.093 y eje semimayor de 2.28×10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

26. La órbita de Júpiter tiene excentricidad de 0.048 y la longitud del eje mayor es 1.56×10^9 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

27. La órbita del cometa Halley, visto por última vez en 1986 y que debe volver en 2062, es una elipse con excentricidad 0.97 y un foco en el Sol. La longitud de su eje principal es 36.18 UA. [Una unidad astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol, cerca de 93 millones de millas.] Encuentre una ecuación polar para la órbita del cometa Halley. ¿Cuál es la distancia máxima desde el cometa al Sol?

28. El cometa Hale-Bopp, descubierto en 1995, tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.9951 y la longitud del eje mayor es 356.5 UA. Encuentre una ecuación polar para la órbita de este cometa. ¿Qué tan cerca del Sol llega?

29. El planeta Mercurio viaja en una órbita elíptica con excentricidad 0.206. Su distancia mínima del Sol es 4.6×10^7 km. Determinar su distancia máxima del Sol.

30. La distancia desde el planeta Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Hallar la excentricidad de la órbita de Plutón.

31. Con los datos del ejercicio 29, calcule la distancia que recorre el planeta Mercurio durante una órbita completa alrededor del Sol. (Si su calculadora o sistema algebraico computacional evalúa integrales definidas, utilícelo. De lo contrario, use la regla de Simpson.)

10 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una curva paramétrica?
(b) ¿Cómo bosqueja una curva paramétrica?

2. (a) ¿Cómo encuentra la pendiente de una tangente a una curva paramétrica?
(b) ¿Cómo determina el área debajo de una curva paramétrica?

3. Escriba una expresión para cada una de las siguientes descripciones:
(a) La longitud de una curva paramétrica
(b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica respecto al eje x

4. (a) Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.
(b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.
(c) ¿Qué ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?

5. (a) ¿Cómo determina la pendiente de una línea tangente a una curva polar?
(b) ¿Cómo calcula el área de una región acotada por una curva polar?
(c) ¿Cómo halla la longitud de una curva polar?

6. (a) Dé una definición geométrica de una parábola.
(b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?

7. (a) Dé una definición de una elipse en términos de los focos.
(b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

8. (a) Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.
(b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
(c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso (b).

9. (a) ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?
(b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?
(c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que refute al enunciado.

1. Si la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisface $g'(1) = 0$, entonces tiene una tangente horizontal cuando $t = 1$.

2. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables dos veces, por lo tanto
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}.$$

3. La longitud de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.

4. Si un punto se representa por (x, y) en coordenadas cartesianas (donde $x \neq 0$) y (r, θ) en coordenadas polares, entonces $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

5. Las curvas polares $r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$ tienen la misma gráfica.

6. Las ecuaciones $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ tienen la misma gráfica.

7. Las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ tienen la misma gráfica que $x = t^3$, $y = t^6$.

8. La gráfica de $y^2 = 2y + 3x$ es una parábola.

9. Una línea tangente a una parábola corta a la parábola sólo una vez.

10. Una hipérbola nunca corta a su directriz.

EJERCICIOS

1–4 Bosqueje la curva paramétrica y elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leqslant t \leqslant 1$

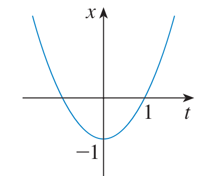
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

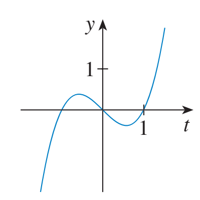
3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escriba tres conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando se incrementa t.





7. (a) Localice el punto con coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A continuación encuentre sus coordenadas cartesianas.

(b) Las coordenadas cartesianas de un punto son $(-3, 3)$. Encuentre dos conjuntos de coordenadas polares para el punto.

8. Haga un dibujo de la región formada de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen $1 \leqslant r < 2$ y $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$.

9–16 Bosqueje la curva polar.

9. $r = 1 - \cos\theta$

10. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17–18 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. La curva con ecuación polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ se llama **caracoloide.** Use una gráfica de r como una función de θ en coordenadas Cartesianas para bosquejar la caracoloide a mano. Después grafíquela con una máquina para comprobar su bosquejo.

20. Grafique la elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ y su directriz. Grafique también la elipse obtenida por rotación respecto al origen por un ángulo $2\pi/3$.

21–24 Encuentre la pendiente de la línea tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor especificado del parámetro.

21. $x = \ln t, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25–26 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto mínimo sobre la curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Después use el cálculo para determinar las coordenadas exactas.

28. Encuentre el área encerrada por el bucle de la curva del ejercicio 27.

29. ¿En qué puntos la curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tiene tangentes verticales y horizontales? Use esta información como ayuda para bosquejar la curva.

30. Determine el área encerrada por la curva del ejercicio 29.

31. Obtenga el área encerrada por la curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Halle el área encerrada por el bucle interior de la curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = 2$ y $r = 4\cos\theta$.

34. Obtenga los puntos de intersección de las curvas $r = \cot\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

35. Determine el área de la región que yace dentro de ambos círculos $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Halle el área de la región que yace dentro de la curva $r = 2 + \cos 2\theta$ pero fuera de la curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37–40 Encuentre la longitud de la curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

41–42 Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x.

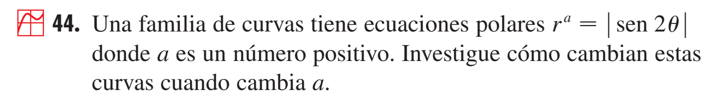
41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$



43. Las curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$



se llaman **estrofoides** (de una palabra griega que significa torcer). Investigue cómo varían estas curvas cuando varía c.

44. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares $r^a = |\operatorname{sen} 2\theta|$ donde a es un número positivo. Investigue cómo cambian estas curvas cuando cambia a.

45–48 Encuentre los focos y vértices y bosqueje la gráfica.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

49. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(\pm 4, 0)$ y vértices $(\pm 5, 0)$.

50. Encuentre una ecuación de la parábola con focos $(2, 1)$ y directriz $x = -4$.

51. Halle una ecuación de la hipérbola con focos $(0, \pm 4)$ y asíntotas $y = 3x$.

52. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(3, \pm 2)$ y un eje con longitud 8.

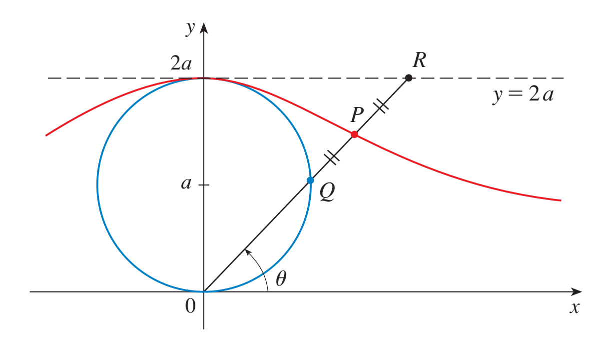
53. Obtenga una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.

54. Demuestre que si m es cualquier número real, en tal caso hay exactamente dos líneas de pendiente m que son tangentes a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y sus ecuaciones son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

55. Encuentre una ecuación polar para la elipse con foco en el origen, excentricidad $\frac{1}{3}$ y directriz con ecuación $r = 4 \sec \theta$.

56. Demuestre que los ángulos entre el eje polar y las asíntotas de la hipérbola $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$, están dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. En la figura el círculo de radio a es estacionario, y para cada θ, el punto P es el punto medio del segmento QR. La curva trazada por P para $0 < \theta < \pi$ se llama **curva de arco.** Encuentre las ecuaciones paramétricas de esta curva.



PROBLEMAS ADICIONALES

1. Una curva se define mediante las ecuaciones paramétricas

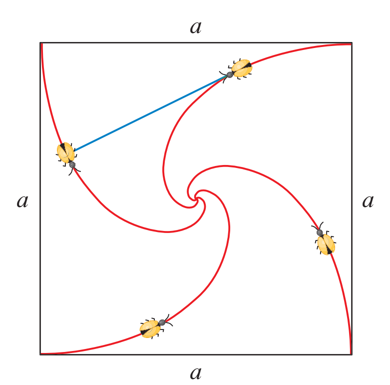
$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\, du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$$

Encuentre la longitud del arco de la curva desde el origen hasta el punto más próximo donde hay una línea tangente vertical.

2. (a) Encuentre los puntos máximo y mínimo de la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
(b) Bosqueje la curva. (Observe que es simétrica con respecto a ambos ejes y ambas líneas $y = \pm x$, así que es suficiente considerar inicialmente $y \geqslant x \geqslant 0$).
CAS (c) Emplee coordenadas polares y un sistema algebraico computacional para hallar el área encerrada por la curva.

3. ¿Cuál es el rectángulo de visión más pequeño que contiene a cada miembro de la familia de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$, donde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre su respuesta graficando varios miembros de la familia en este rectángulo de visión.

4. Se colocan cuatro insectos en cuatro esquinas de un cuadrado con longitud a. Los insectos avanzan en sentido contrario a las manecillas del reloj a la misma rapidez, y cada uno avanza directamente hacia el siguiente insecto todo el tiempo. Se aproximan al centro del cuadrado a lo largo de trayectorias en espiral.
(a) Obtenga la ecuación polar de una trayectoria de insecto al suponer que el polo está en el centro del cuadrado. (Use el hecho de que la línea que une a un insecto con el siguiente es tangente a la trayectoria del insecto.)
(b) Determine la distancia que recorre un insecto en el momento que se encuentra con los otros insectos en el centro.



5. Una curva llamada **folio de Descartes** se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

(a) Demuestre que si (a, b) está sobre la curva, entonces lo está (b, a); es decir, la curva es simétrica con respecto a la línea $y = x$. ¿Dónde la curva corta a esta línea?
(b) Determine los puntos sobre la curva donde las líneas tangentes son horizontales o verticales.
(c) Demuestre que la línea $y = -x - 1$ es una asíntota inclinada.
(d) Bosqueje la curva.
(e) Demuestre que una ecuación cartesiana de esta curva es $x^3 + y^3 = 3xy$.
(f) Muestre que la ecuación polar se puede escribir en la forma

$$r = \frac{3 \sec \theta \tan \theta}{1 + \tan^3 \theta}$$

(g) Encuentre el área encerrada por el bucle de esta curva.
CAS (h) Demuestre que el área del bucle es la misma que el área que yace entre la asíntota y las ramas infinitas de la curva. (Use un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.)

6. Un círculo C de radio $2r$ tiene su centro en el origen. Un círculo de radio r gira sin resbalar en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj alrededor de C. Un punto P está situado en un radio fijo del círculo giratorio a una distancia b de su centro, $0 < b < r$. [Vea las partes (i) e (ii) de la figura.] Sea L la del centro de C al centro del círculo giratorio y sea θ el ángulo que L forma con el eje x positivo.

(a) Usando θ como parámetro, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por P son

$$x = b \cos 3\theta + 3r \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} 3\theta + 3r \operatorname{sen} \theta$$

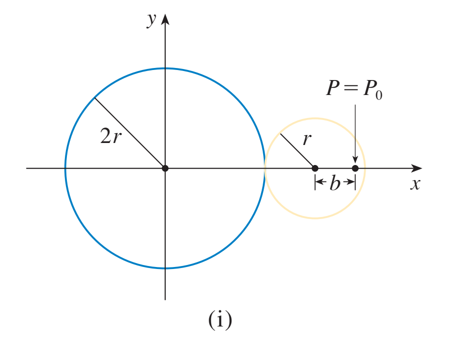
Nota: Si $b = 0$, la trayectoria es un círculo de radio $3r$; si $b = r$, la trayectoria es un *epicicloide.* La trayectoria trazada por P para $0 < b < r$ se llama *epitrocoide.*

(b) Grafique la curva de diversos valores de b entre 0 y r.

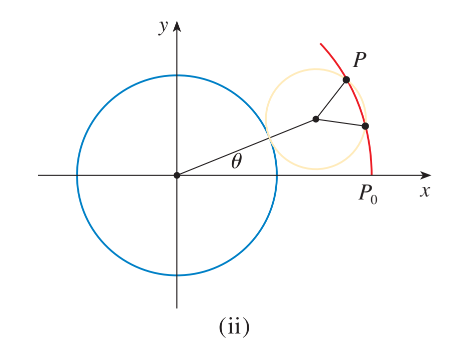
(c) Demuestre que un triángulo equilátero puede inscribirse en el epitrocoide y que su centroide está sobre el círculo de radio b con centro en el origen.

Nota: Éste es el principio del motor rotatorio Wankel. Cuando el triángulo equilátero gira con sus vértices en el epitrocoide, su centroide recorre un círculo cuyo centro está en el centro de la curva.

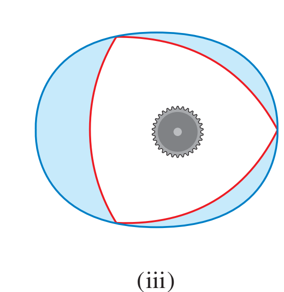
(d) En casi todos los motores rotatorios, los lados de los triángulos equiláteros son sustituidos por arcos de círculos con centro en los vértices opuestos como en la parte (iii) de la figura. (Entonces el diámetro del rotor es constante.) Demuestre que el rotor ajustará en el epitrocoide si $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.



(i)

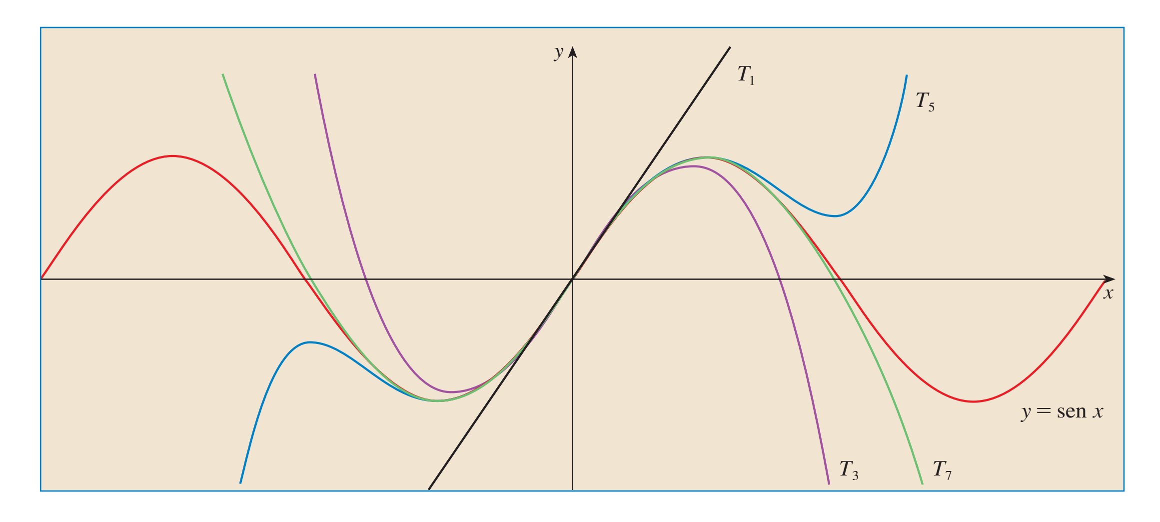


(ii)


(iii)



SUCESIONES Y SERIES INFINITAS



Las sumas parciales T_n de una serie de Taylor dan aproximaciones cada vez mejores a una función cuando n aumenta.

Las sucesiones infinitas y las series se trataron brevemente en la *Presentación preliminar del cálculo* en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de los números. La importancia en el cálculo radica en la idea de Newton de representar las funciones como sumas de series infinitas. Por ejemplo, al determinar áreas, con frecuencia integraba una función, pero primero la expresaba como una serie y luego integraba cada uno de los términos de la serie. Esta idea se trata en la sección 11.10 con objeto de integrar funciones como e^{-x^2}. (Recuerde que esto aún no ha sido hecho). Muchas de las funciones que surgen en la física matemática y en la química matemática, como las funciones de Bessel, se definen como sumas de series, de modo que es importante conocer los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Los físicos también utilizan las series en otro aspecto, como se explica en la sección 11.12. Al estudiar campos tan diversos como la óptica, la relatividad especial y el electromagnetismo, analizan fenómenos reemplazando una función con los primeros términos en la serie que la representa.

11.1 SUCESIONES

Se puede considerar que una **sucesión** es una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 recibe el nombre de *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Aquí se trata exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}.

Observe que para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Por lo regular, se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Algunas sucesiones se pueden definir dando una fórmula para el término n-ésimo. En los ejemplos siguientes se ofrecen tres descripciones de la sucesión: Una en la que se aplica la notación anterior, en otra se aplica una fórmula definida y en la tercera se escriben los términos de la sucesión. Observe que la n no tiene que empezar en 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad a_n = \dfrac{n}{n+1} \qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\} \qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n} \qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty} \qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3 \qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty} \qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0 \qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$ □

V **EJEMPLO 2** Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

SOLUCIÓN Se sabe que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y se incrementan una unidad al pasar al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el siguiente numerador es 5; en general, el n-ésimo término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene por denominador 5^n. El signo de los términos es alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario

multiplicar por una potencia de (-1). En el ejemplo 1(b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo, se usa $(-1)^{n-1}$, o bien, $(-1)^{n+1}$. Por lo tanto,

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$ □

EJEMPLO 3 En este caso hay algunas sucesiones que no tienen una ecuación que las defina en forma simple.

(a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial el uno de enero del año n.

(b) Si a_n es el n-ésimo dígito en la expansión decimal del número e, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) Las condiciones siguientes definen en forma recursiva la **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada uno de los términos es la suma de los dos anteriores. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión surgió cuando el matemático italiano del siglo XIII, a quien se conoce como Fibonacci, resolvió un problema que se relacionaba con la cría de conejos (véase ejercicio 71). □

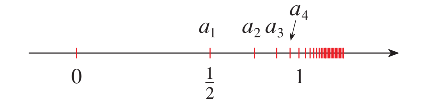


FIGURA 1

Una sucesión como la del ejemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, se puede representar dibujando sus términos en una recta numérica como en la figura 1, o trazando la gráfica como en la figura 2. Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

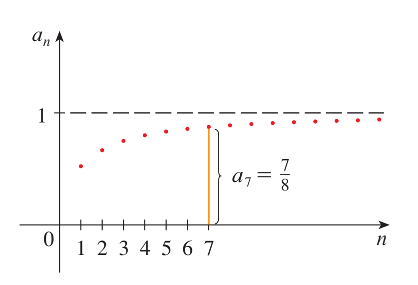


FIGURA 2

De acuerdo con la figura 1 o la 2, parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n se incrementa. En efecto, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al incrementar a n. Se indica lo anterior escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

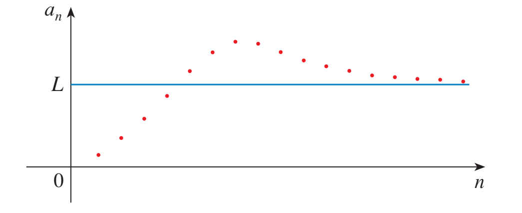
quiere decir que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando n se incrementa suficientemente. Observe que la definición siguiente del límite de una sucesión es muy parecida a la definición de límite de una función en el infinito dada en la sección 2.6.

1 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ tiene como **límite** L, y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos aproximar los términos a_n tanto como se quiera cuando n es suficientemente grande. Si existe $\lim_{n \to \infty} a_n$, se dice que la sucesión **converge** (o que **es convergente**). De lo contrario se dice que la sucesión **diverge** (o **es divergente**).

En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de las dos sucesiones que tienen como límite a L.



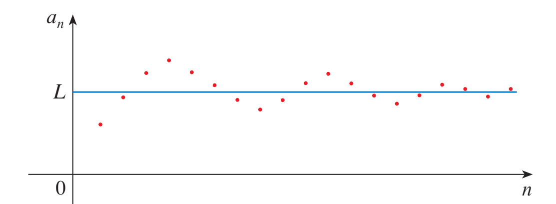


FIGURA 3
Gráficas de las dos sucesiones $\lim_{n \to \infty} a_n = L$

Una versión más exacta de la definición 1 es como se indica a continuación.

■ Compare esta definición con la definición 2.6.7.

2 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por **límite** a L y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un entero correspondiente N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

La definición 2 se ilustra mediante la figura 4, en la cual los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se localizan en la recta numérica. No importa qué tan pequeño se escoja al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en el intervalo.

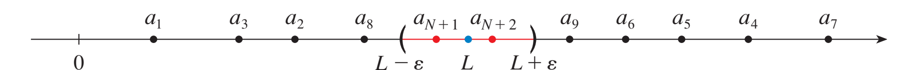


FIGURA 4

Otra ilustración de la definición 2 es la figura 5. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida, no importa qué tan pequeño se haya escogido ε, pero por lo regular un ε más pequeño requiere una N más grande.

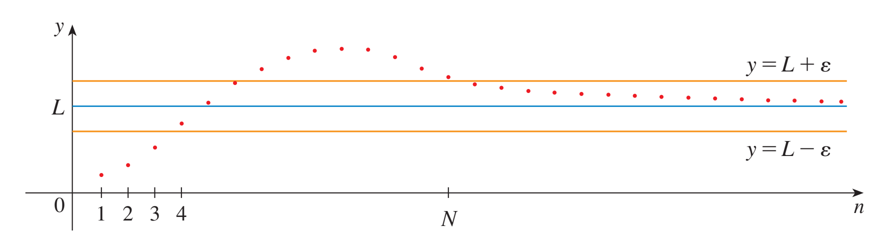


FIGURA 5

La comparación de la definición 2 y la definición 2.6.7 señala que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea entero. En estos términos está el siguiente teorema, el cual se ilustra en la figura 6.

3 TEOREMA Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$, cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

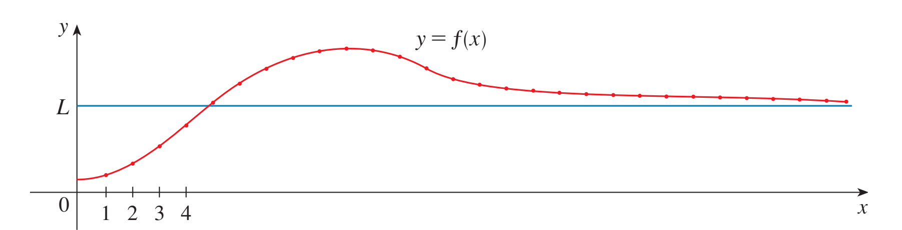


FIGURA 6

En particular, puesto que ya se sabe que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$, cuando $r > 0$ (teorema 2.6.5), se tiene

4 $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n tiende a ser muy grande cuando n lo es, se usa la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La siguiente definición exacta es parecida a la definición 2.6.9.

5 DEFINICIÓN $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M hay un entero N tal que

$$a_n > M \qquad \text{siempre que } n > N$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es divergente pero de una manera especial. Se dice que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las leyes de los límites que se estudian en la sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus demostraciones son similares.

LEYES DE LOS LÍMITES PARA LAS SUCESIONES.

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

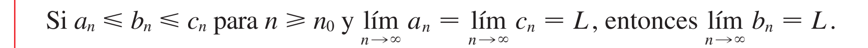
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ y } a_n > 0$$

El teorema de la compresión también se puede adaptar a las sucesiones como sigue (véase figura 7).

TEOREMA DE LA COMPRESIÓN PARA LAS SUCESIONES.



Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

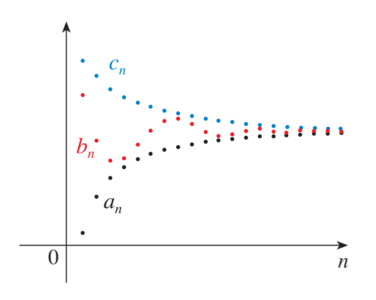


FIGURA 7
La sucesión $\{b_n\}$ es comprimida entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$

Otro hecho útil con respecto a los límites de sucesiones se proporciona en el teorema siguiente cuya demostración se deja como ejercicio (ejercicio 75).

6 TEOREMA Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que se presenta en la sección 2.6: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de n y luego se aplican las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

■ Esto demuestra que la conjetura que se hizo antes a partir de las figuras 1 y 2 era correcta.

En este caso se aplica la ecuación 4 con $r = 1$. □

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Observe que tanto el numerador como el denominador tienden al infinito cuando $n \to \infty$. No se puede aplicar directamente la regla de l'Hospital porque no se aplica a sucesiones, sino a funciones de una variable real. No obstante, se puede aplicar la regla de l'Hospital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$ □

EJEMPLO 6 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si escribe los términos de la sucesión obtiene

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

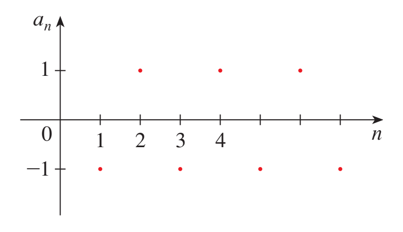


FIGURA 8

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 8. Como los términos oscilan entre 1 y -1 en forma infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; es decir, la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente. □

■ La gráfica de la sucesión del ejemplo 7 se muestra en la figura 9 y apoya la respuesta.

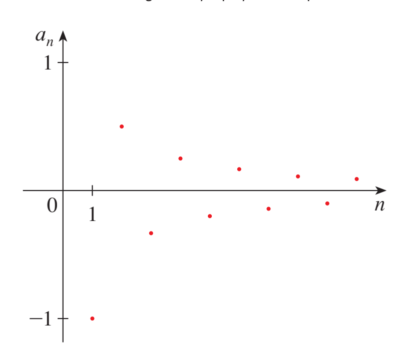


FIGURA 9

EJEMPLO 7 Evaluar $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ si es que existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$ □

El siguiente teorema dice que al aplicar una función continua a los términos de una sucesión convergente, el resultado también es convergente. La prueba se deja como ejercicio 76.

7 **TEOREMA** Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el teorema 7 hace posible escribir

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} (\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$ □

V **EJEMPLO 9** Analice la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

■ GRAFICACIÓN DE SUCESIONES
Algunos sistemas algebraicos computacionales contienen comandos especiales que permiten crear sucesiones y dibujarlas directamente. Sin embargo, con la mayoría de las calculadoras para trazar gráficas se pueden dibujar sucesiones usando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo 9 se puede dibujar introduciendo las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y dibujando en el modo punto (*dot mode*) iniciando con $t = 1$; se establece el paso t-ésimo igual a 1. El resultado se muestra en la figura 10.

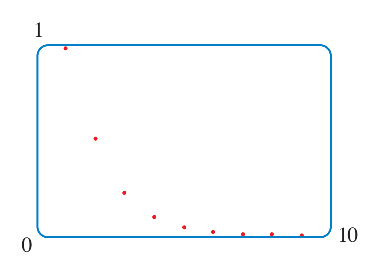


FIGURA 10

SOLUCIÓN Tanto el numerador como el denominador tienden al infinito cuando $n \to \infty$, pero en este caso no hay función correspondiente para usar la regla de l'Hospital ($x!$ no está definida cuando x no es un entero). Se escriben algunos de los términos para ver qué pasa con a_n cuando n es grande:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

8 $$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Al parecer, por estas expresiones y la gráfica de la figura 10, los términos son decrecientes y quizá se aproximen a 0. Para confirmarlo, observe que según la ecuación 8

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que la expresión entre paréntesis es cuando mucho 1 porque el numerador es menor que (o igual) al denominador. De este modo

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabe que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el teorema de la compresión. □

V EJEMPLO 10 ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Sabe por la sección 2.6 y las gráficas de las funciones exponenciales de la sección 1.5 que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por lo tanto, si hace $a = r$ y aplica el teorema 3 llega a

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

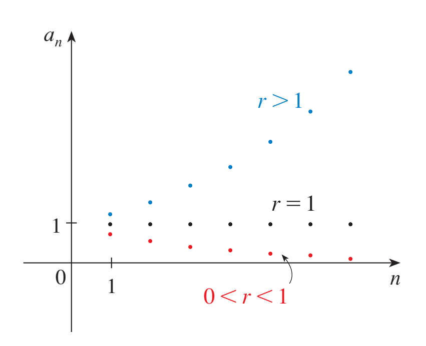
Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Si $-1 < r < 0$, por lo tanto $0 < |r| < 1$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y, debido a eso, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ de acuerdo con el teorema 6. Si $r \leqslant -1$, entonces $\{r^n\}$ diverge como en el ejemplo 6. En la figura 11 se ilustran las gráficas de varios valores de r. (El caso de $r = -1$ se muestra en la figura 8.)



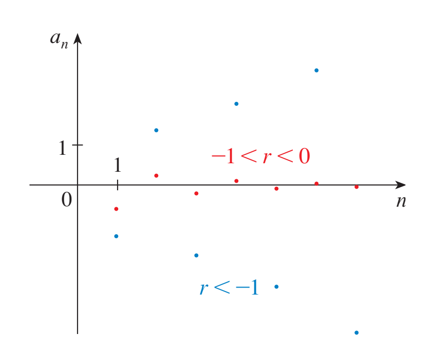


FIGURA 11
La sucesión $a_n = r^n$

Los resultados del ejemplo 10 se resumen para uso futuro como sigue.

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Se denomina **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Recibe el nombre de **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 11 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

■ El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

y por lo tanto $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. □

EJEMPLO 12 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Es necesario demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 1} < \frac{n}{n^2 + 1}$$

Esta desigualdad equivale a la obtenida por multiplicación cruzada:

$$\frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 1} < \frac{n}{n^2 + 1} \iff (n + 1)(n^2 + 1) < n[(n + 1)^2 + 1]$$

$$\iff n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n$$

$$\iff 1 < n^2 + n$$

Puesto que $n \geqslant 1$, ya sabe que la desigualdad $n^2 + n > 1$ es verdadera. Por lo tanto, $a_{n+1} < a_n$ y también $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} < 0 \qquad \text{cuando } x^2 > 1$$

En estos términos, f es decreciente en $(1, \infty)$ y por eso $f(n) > f(n + 1)$. Por lo tanto $\{a_n\}$ es decreciente. □

11 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si hay un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Se dice que está **acotada por abajo** si hay un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, en tal caso $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo ($a_n > 0$), pero no por arriba. La sucesión $a_n = n/(n + 1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Ya sabe que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ cumple con $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, pero es divergente del ejemplo 6] y no toda sucesión monótona es convergente ($a_n = n \to \infty$). Pero si una sucesión es tanto acotada *como* monótona, entonces tiene que ser convergente. Este hecho se demuestra en la forma del teorema 12, pero intuitivamente se entiende por qué es cierto viendo la figura 12. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leqslant M$ para toda n, después los términos están forzados a aglomerarse y a aproximarse a un número L.

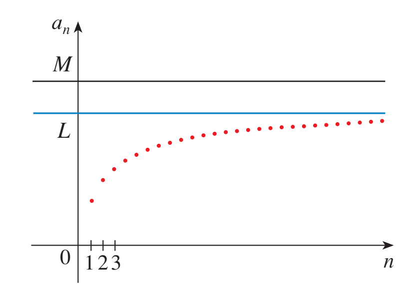


FIGURA 12

La demostración del teorema 12 se apoya en el **axioma de completitud** para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M ($x \leqslant M$ para toda x en S), luego S tiene una **cota superior mínima** b. [Esto quiere decir que b es una cota superior para S, pero si M es cualquier otra cota superior, por lo tanto $b \leqslant M$]. El axioma de completitud expresa el hecho de que no hay brecha o agujero en la recta de los números reales.

12 TEOREMA DE LA SUCESIÓN MONÓTONA Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Puesto que $\{a_n\}$ está acotada, el conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ posee una cota superior. De acuerdo con el axioma de completitud, tiene una cota mínima superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *no* es una cota superior para S (puesto que L es la cota superior *mínima*). Por lo tanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para un entero } N$$

Pero la sucesión es creciente de modo que $a_n \geqslant a_N$ para toda $n > N$. En estos términos, si $n > N$

$$a_n > L - \varepsilon$$

de tal manera
$$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

puesto que $a_n \leqslant L$. Así que,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{cuando } \ n > N$$

así $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Una demostración similar (aplicando la cota inferior más grande) funciona si $\{a_n\}$ es decreciente. □

La demostración del teorema 12 demuestra que una sucesión que es creciente y acotada por arriba es convergente. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo es convergente.) Este hecho se aplica muchas veces al trabajar con series infinitas.

EJEMPLO 13 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la relación de recurrencia

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Para empezar se calculan los primeros términos:

$$a_1 = 2 \qquad a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 \qquad a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5$$
$$a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 \qquad a_5 = 5.75 \qquad a_6 = 5.875$$
$$a_7 = 5.9375 \qquad a_8 = 5.96875 \qquad a_9 = 5.984375$$

■ Con frecuencia, la inducción matemática se aplica cuando se trabaja con sucesiones recursivas. Véase página 77 donde se encuentra un análisis del principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales hacen pensar que la sucesión es creciente y que los términos se aproximan a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, aplique la inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es válido para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si supone que se cumple para $n = k$, después tiene

$$a_{k+1} > a_k$$

de modo que
$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

y
$$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Por esto,
$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Ya se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es válida para $n = k + 1$. Por lo tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Luego de verificar que $\{a_n\}$ está acotada demostrando que $a_n < 6$ para toda n. (Puesto que la sucesión es creciente, se sabe que tiene una cota inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Se tiene que $a_1 < 6$, de modo que la aseveración es válida para $n = 1$. Suponga que se cumple para $n = k$. En tal caso

$$a_k < 6$$

de este modo

$$a_k + 6 < 12$$

$$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Por eso,

$$a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra por inducción matemática que $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema 12 garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que sabe que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, puede aplicar la relación de recurrencia para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\Big) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

■ Una demostración de este hecho se pide en el ejercicio 58.

Como $a_n \to L$, se infiere que $a_{n+1} \to L$, también (cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, también). De este modo

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al resolver esta ecuación, determina que $L = 6$, tal como había predicho. □

11.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
(b) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Proporcione dos ejemplos.
(b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3–8 Proporcione los primeros cinco términos de la sucesión.

3. $a_n = 1 - (0.2)^n$

4. $a_n = \dfrac{n + 1}{3n - 1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

7. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1$

8. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

9–14 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

9. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$

10. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

12. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

14. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \ldots\}$

15. Haga una lista de los seis primeros términos de la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{2n + 1}$$

¿Parece que la sucesión tiene un límite? Si es así, hállelo.

16. Haga una lista de los nueve primeros términos de la sucesión $\{\cos(n\pi/3)\}$. ¿Parece que esta sucesión tiene un límite? Si es así, hállelo; si no es así, explique por qué.

17–46 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

17. $a_n = 1 - (0.2)^n$

18. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

19. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

20. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

21. $a_n = e^{1/n}$

22. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

23. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

24. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

25. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + 1}$

26. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

27. $a_n = \cos(n/2)$

28. $a_n = \cos(2/n)$

29. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

30. $\{\arctan 2n\}$

31. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

32. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

33. $\{n^2 e^{-n}\}$

34. $\{n \cos n\pi\}$

35. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

36. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

37. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

38. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

39. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

41. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

42. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

43. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots\}$

44. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$

45. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

46. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

47–53 Con la ayuda de una gráfica de la sucesión, establezca si ésta es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente, deduzca el valor del límite a partir de la gráfica, y luego demuestre su conjetura. (Véase una advertencia sobre las gráficas de sucesiones en la nota al margen de la página 680).

47. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

48. $a_n = \sqrt{n}\operatorname{sen}(\pi/\sqrt{n})$

49. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

50. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

51. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

52. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

53. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

54. (a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

55. Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés, compuesto anualmente, por lo tanto n años después la inversión tiene un valor de $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
(a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
(b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique

56. Determine los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo para $a_1 = 25$. Conjeture con respecto al tipo de sucesión.

57. ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{nr^n\}$?

58. (a) Si $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(b) Una sucesión $\{a_n\}$ se define con $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Si supone que $\{a_n\}$ es convergente, calcule el límite.

59. Suponga que sabe que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué puede decir con respecto al valor del límite?

60–66 Determine si la sucesión es creciente, decreciente, o no es monótona. ¿Está acotada la sucesión?

60. $a_n = (-2)^{n+1}$

61. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

62. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

63. $a_n = n(-1)^n$

64. $a_n = ne^{-n}$

65. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

66. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

67. Determine el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\right\}$$

68. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Mediante inducción u otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que su cota superior es 3. Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que sí existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

69. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y que $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

70. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

cumple con $0 < a_n \leqslant 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre el límite.

71. (a) Fibonacci planteó el problema siguiente: Suponga que los conejos viven toda la vida, que cada mes todas las parejas tiene un nuevo par de conejitos, los cuales empiezan a ser productivos a la edad de dos meses. Si empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci que se define en el ejemplo 3(c).
(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ y demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, determine el límite.

72. (a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \dots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.
(b) Ilustre el inciso (a) haciendo $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y calculando el valor de L con cinco cifras decimales.

73. (a) Mediante una gráfica, deduzca el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Con una gráfica de la sucesión del inciso (a) calcule los valores más pequeños de N que corresponden a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 2.

74. Aplique directamente la definición 2 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

75. Demuestre el teorema 6.
[*Sugerencia:* Aplique la definición 2 o el teorema de la compresión].

76. Demuestre el teorema 7

77. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$

78. Sea $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
(a) Demuestre que si $0 \leqslant a < b$, en tal caso

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.
(c) Aplique $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ en el inciso (b) para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente.
(d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso b) para demostrar que $a_{2n} < 4$.
(e) Mediante los incisos (c) y (d) demuestre que $a_n < 4$ para toda n.
(f) Aplique el teorema 12 para demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$. (El límite es e. Vea la ecuación 3.6.6)

79. Sean a y b números positivos con $a > b$. Sea a_1 la media aritmética y b_1 la media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita el proceso de modo que, en general,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Mediante la inducción matemática demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduzca que tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ son convergentes.
(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites **media aritmética-geométrica** de los números a y b.

80. (a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
(b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

calcule los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego use el inciso (a) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto da el **desarrollo en fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

81. El tamaño de una población de peces inalterada está modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.
(a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, después los únicos valores posibles de este límite son 0 y $b - a$.
(b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
(c) Mediante el inciso (b) demuestre que si $a > b$, en seguida $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, en otras palabras, la población muere.
(d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, por lo tanto $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Asimismo, demuestre que si $p_0 > b - a$, en tal caso $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROYECTO DE LABORATORIO

CAS SUCESIONES LOGÍSTICAS

Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento poblacional se define por medio de la **ecuación logística en diferencias**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n es el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Para poder trabajar con los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que la forma de la ecuación es similar a la ecuación logística en diferencias de la sección 9.4. El modelo discreto, con sucesiones en lugar de funciones continuas, es preferible para modelar las poblaciones de insectos, donde el apareamiento y la muerte ocurren de un modo periódico.

Un ecologista se interesa en predecir el tamaño de la población a medida que el tiempo avanza, y plantea estas preguntas: ¿Se estabilizará en un valor límite? ¿Cambiará de manera cíclica? O bien, ¿mostrará un comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los primeros n términos de esta sucesión con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Con este programa efectúe lo siguiente.

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Dibuje las sucesiones. ¿Convergen? Repita para un valor distinto de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende del valor de p_0 escogido? ¿Depende del valor elegido de k?
2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y dibújelos. ¿Qué observa con respecto al comportamiento de los términos?
3. Experimente con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué sucede con los términos?
4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y dibuje por lo menos 100 términos y comente el comportamiento de la sucesión. ¿Qué sucede si cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos en ciertas condiciones.

11.2 SERIES

Si trata de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtiene una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad \boxed{1}$$

que se denomina **serie infinita**, o sólo **serie**, y se denota con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Pero, ¿tiene sentido hablar de suma de una cantidad infinita de términos?

Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si empieza a sumar los términos, obtiene sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . y después del n-ésimo término, llega a $n(n + 1)/2$, lo cual se vuelve muy grande cuando n se incrementa.

Sin embargo, si empieza por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

obtiene $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. En la tabla se puede ver que cuando suma más y más términos, estas *sumas parciales* se vuelven más y más cercanas a 1. (Véase también la figura 11 en *Presentación preliminar del cálculo* en la página 7). De hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Por eso es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Se aplica una idea similar para determinar si una serie general (1) tiene o no tiene una suma. Considere las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no tener un límite. Si existe $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (como un número finito), después, como en el ejemplo anterior, se llama suma de la serie infinita $\Sigma\, a_n$.

2 DEFINICIÓN Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote con s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie $\Sigma\, a_n$ se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si no es así, la serie se dice **divergente.**

Así, la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Cuando escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ quiere decir que al sumar suficientes términos de la serie puede llegar tan cerca como quiera al número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

■ Compare con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx$$

Para determinar esta integral integre desde 1 hasta t y hacemos que $t \to \infty$. En el caso de series, sume desde 1 hasta n y hacemos que $n \to \infty$.

EJEMPLO 1 Un ejemplo importante de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

■ La figura 1 proporciona una demostración geométrica del resultado del ejemplo 1. Si los triángulos se construyen como se indica y s es la suma de la serie, después, por triángulos semejantes

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{por lo que} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

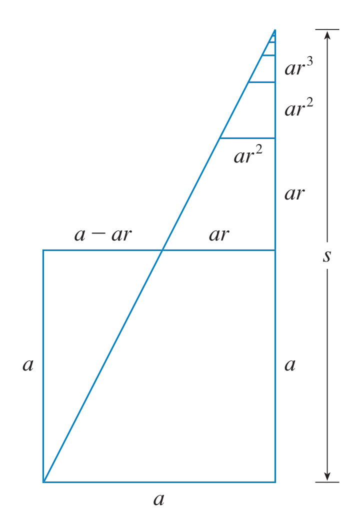


FIGURA 1

Cada término se obtiene a partir del término precedente y se multiplica por la razón común r. (Ya se consideró el caso especial cuando $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ de la página 687).

Si $r = 1$, en consecuencia $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$,

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Al restar estas ecuaciones obtiene

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

3
$$s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $-1 < r < 1$, sabe por (11.1.9) que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Por esto, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r \leqslant -1$ o bien, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente de acuerdo con (11.1.9) y de ese modo, según la ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por lo tanto, la serie geométrica diverge en esos casos. □

El resumen de los resultados del ejemplo 1 es como se señala a continuación.

4 La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

■ En palabras: la suma de la serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

V EJEMPLO 2 Calcule la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente según (4) y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$ □

■ ¿Qué se quiere dar a entender en realidad cuando se dice que la suma de la serie del ejemplo 2 es 3? Naturalmente, no puede sumar uno más uno una cantidad infinita de términos. Pero, de acuerdo con la definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, al efectuar la suma de suficientes términos, se acerca tanto como quiera al número 3. La tabla muestra las primeras diez sumas parciales s_n, y en la gráfica de la figura 2 se ilustra cómo la sucesión de las sumas parciales se aproxima a 3.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

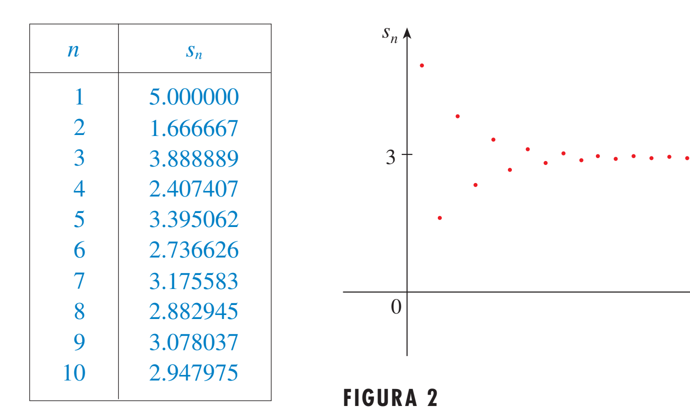


FIGURA 2

EJEMPLO 3 ¿Es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$?

SOLUCIÓN Escriba el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

■ Otra manera de identificar a y r es escribir los primeros términos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Identifique esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con (4). □

V EJEMPLO 4 Escriba el número $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ como una razón de enteros.

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después del primer término tiene una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Debido a eso,

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{1000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$ □

EJEMPLO 5 Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ donde $|x| < 1$.

SOLUCIÓN Observe que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término es $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$). De este modo,

TEC En Module 11.2 se estudia una serie que depende del ángulo θ en un triángulo y permite ver qué tan rápido converge la serie cuando varía θ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Puesto que $|r| = |x| < 1$, converge, y de acuerdo con (4) se tiene

5
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$ □

EJEMPLO 6 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y determine su suma.

SOLUCIÓN No es una serie geométrica, de modo que regrese a la definición de una serie convergente y calcule las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Puede simplificar esta expresión si la descompone en fracciones parciales

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(véase sección 7.4). Así que,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

■ Observe que los términos se cancelan por pares. Éste es un ejemplo de una **suma telescópica**. Debido a las cancelaciones, la suma se colapsa, al igual que un telescopio de pirata que se colapsa, en dos términos.

y de este modo $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

■ En la figura 3 se ilustra el ejemplo 6 y se muestra la gráfica de la sucesión de términos $a_n = 1/[n(n+1)]$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Observe que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Refiérase a los ejercicios 62 y 63, en donde se tratan dos interpretaciones geométricas del ejemplo 6.

Por lo tanto, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ □

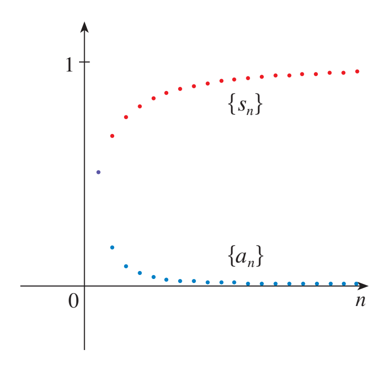


FIGURA 3

V EJEMPLO 7 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular, es conveniente considerar las sumas parciales s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, . . . y demostrar que se hacen grandes.

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

En forma similar, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, y, en general,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

■ El método usado en el ejemplo 7 para demostrar que la serie armónica diverge es original del francés Nicole Oresme (1323-1382).

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por eso $\{s_n\}$ es divergente. Debido a eso, la serie armónica es divergente. □

6 TEOREMA Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En tal caso, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Puesto que $\Sigma\, a_n$ es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también se tiene $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$
$$= s - s = 0$$
□

NOTA 1 Con cualquier *serie* $\Sigma\, a_n$ se asocian *dos sucesiones*: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s, (la suma de la serie) y, como establece el teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

NOTA 2 En general, el inverso del teorema 6 no se cumple. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no puede concluir que $\Sigma\, a_n$ es convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma\, 1/n$ tiene $a_n = 1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero ya demostró en el ejemplo 7 que $\Sigma\, 1/n$ es divergente.

7 LA PRUEBA DE LA DIVERGENCIA Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La prueba de la divergencia se infiere del teorema 6 porque si la serie no es divergente, entonces es convergente y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 8 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ es divergente.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5 + 4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

De modo que la serie diverge de acuerdo con la prueba de la divergencia. □

NOTA 3 Si encuentra que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sabe que $\Sigma\, a_n$ es divergente. Si tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no sabe *nada* con respecto a la convergencia o la divergencia de $\Sigma\, a_n$. Recuerde la advertencia de la nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente

8 TEOREMA Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes, entonces también lo son las series $\Sigma\, ca_n$ (donde c es una constante), $\Sigma\,(a_n + b_n)$ y $\Sigma\,(a_n - b_n)$, y

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de las series convergentes se infieren de las leyes de los límites correspondientes a las sucesiones de la sección 11.1. Por ejemplo, aquí se demuestra la parte (ii) del teorema 8:

Sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

y, a través de la ecuación 5.2.10, tiene

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$$

Por lo tanto, $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ □

EJEMPLO 9 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

SOLUCIÓN La serie $\Sigma\, 1/2^n$ es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

En el ejemplo 6 encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Así, por el teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$ □

NOTA 4 Una cantidad finita de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, suponga que es capaz de demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

es convergente. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

se infiere que la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ es convergente. Asimismo, si sabe que la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

es también convergente.

11.2 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
(b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique qué significa decir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–8 Calcule por lo menos 10 sumas parciales de las series. Dibuje tanto la sucesión de los términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. ¿Cómo parece ser la serie? ¿Convergente o divergente? Si es convergente, determine la suma. Si es divergente, explique la razón.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

9. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
(a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.
(b) Diga si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

10. (a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11–20 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

11. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$

12. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

13. $-3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

14. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

21–34 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$

23. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^2}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

35–40 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma extensible (como en el ejemplo 6). Si es convergente, encuentre su suma.

35. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n^2} - \cos \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

41–46 Exprese el número como una razón de enteros.

41. $0,\overline{2} = 0.2222\ldots$

42. $0.\overline{73} = 0.73737373\ldots$

43. $3.\overline{417} = 3.417417417\ldots$

44. $6.2\overline{54} = 6.2545454\ldots$

45. $1.53\overline{42}$

46. $7.\overline{12345}$

47–51 Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

49. $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

50. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

51. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

52. Puesto que la serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

CAS **53–54** Aplique el comando de las fracciones parciales en su sistema algebraico computacional para determinar la suma parcial, y luego aplique esta expresión para determinar la suma de la serie. Compruebe su respuesta usando directamente el sistema algebraico a la suma de la serie.

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2+n)^3}$

54. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$

55. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

56. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

57. Cuando el dinero se gasta en bienes y servicios, los que reciben el dinero también gastan un poco de él. Las personas que reciben algo del dinero gastado dos veces, gastarán algo de dicho dinero, y así sucesivamente. Los economistas llaman a esta reacción en cadena *efecto multiplicador*. En un hipotético pueblo aislado, el gobierno local inicia el proceso gastando D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c\%$ y ahorra $100s\%$ del dinero. Los valores c y s se denominan *propensión marginal al consumo* y *propensión marginal al ahorro* y, naturalmente, $c + s = 1$.
(a) Sea S_n el total de lo gastado que ha sido generado después de n transacciones. Determine una ecuación para S_n.
(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. La cantidad k se llama *multiplicador*. ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal al consumo es 80%?

Nota: El gobierno federal de Estados Unidos usa este principio para justificar el gasto que muestra déficit. Los bancos utilizan el principio para justificar los préstamos de un gran porcentaje del dinero que reciben como depósito.

58. Una cierta pelota tiene la característica de que cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.
(a) Suponga que la pelota continúa rebotando de manera indefinida y calcule la distancia total que recorre. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos).
(b) Calcule el tiempo total que la pelota viaja.
(c) Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

59. ¿Cuál es el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2?$$

60. Encuentre el valor de c tal que

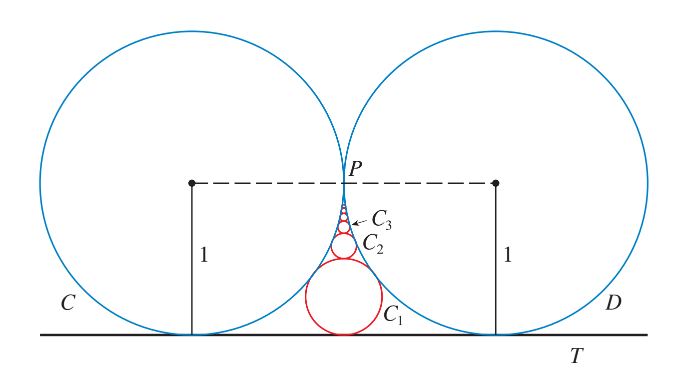
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

61. En el ejemplo 7 se demostró que la serie armónica es divergente. Aquí se resume otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Vea el ejercicio 4.3.76.)
Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

62. Dibuje las curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobre una misma pantalla. Determine las áreas entre las curvas sucesivas y mediante geometría demuestre el hecho siguiente, demostrado en el ejemplo 6,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

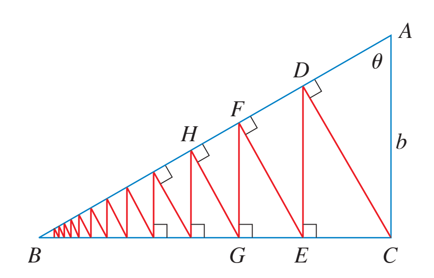
63. En la figura se ilustran dos círculos C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es el círculo que toca C, D y T; C_2 es el círculo que toca C, D y C_1; C_3 es el círculo que toca C, D y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de círculos $\{C_n\}$. Determine una expresión para el diámetro de C_n y, de ese modo, proporcione otra demostración geométrica del ejemplo 6.



64. Un triángulo rectángulo ABC está definido con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD se traza perpendicular a AB, DE se traza en forma perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este procedimiento continúa en forma indefinida como se ilustra en la figura. Determine la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



65. ¿Qué es lo que está mal en el cálculo siguiente?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios, porque "se había creado algo de la nada").

66. Suponga que se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) es una serie convergente. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

67. Demuestre la parte (i) del teorema 8.

68. Si $\sum a_n$ es divergente y $c \neq 0$, demuestre que $\sum ca_n$ es divergente.

69. Si $\sum a_n$ es convergente y $\sum b_n$ es divergente, demuestre que la serie $\sum (a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia*: aplique el razonamiento de contradicción.]

70. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son divergentes, ¿necesariamente $\sum (a_n + b_n)$ es divergente?

71. Suponga que una serie $\sum a_n$ consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen con la desigualdad $s_n \leqslant 1000$ para toda n. Explique por qué $\sum a_n$ debe ser convergente.

72. La sucesión de Fibonacci se define en la sección 11.1 mediante las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es válido.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

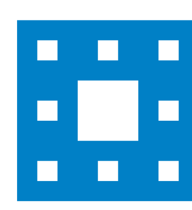
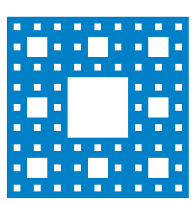
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

73. El **conjunto de Cantor**, nombrado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como se señala a continuación. Empiece con el intervalo cerrado $[0, 1]$ y retire el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Esto deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y luego elimine el intervalo abierto constituido por el tercio medio de cada uno. De este modo quedan cuatro intervalos y de nuevo elimine el tercio medio de cada uno de ellos. Continúe este procedimiento de manera indefinida eliminando en cada paso el tercio medio de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consiste en los números que quedan en $[0, 1]$ después de que todos esos intervalos se han eliminado.

(a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene una cantidad infinita de números. Proporcione ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

(b) El **tapete de Sierpinski** es un equivalente en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se construye eliminando el noveno central de un cuadrado de lado 1, y luego se elimina el centro de cada uno de los ocho cuadrados restantes, y así sucesivamente. (En la figura se ilustran los primeros tres pasos de la construcción). Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados eliminados es 1. Esto significa que el área del tapete de Sierpinski es cero.

74. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 son números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y con la ayuda de su calculadora adivine el límite de la sucesión.

(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 escribiendo $a_{n+1} - a_n$ en función de $a_2 - a_1$ y sume la serie.

75. Considere la serie

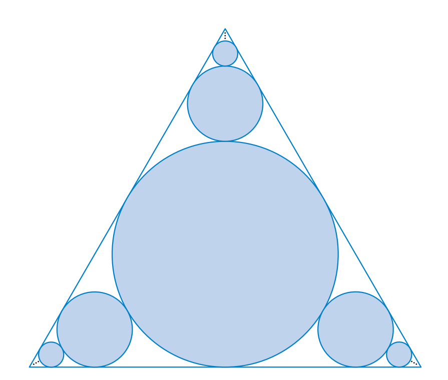
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) Calcule las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Mediante el patrón conjeture una fórmula para s_n.

(b) Aplique la inducción matemática para demostrar su conjetura.

(c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y calcule la suma

76. En la figura hay una cantidad infinita de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca a otros círculos y a los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad de longitud, calcule el área total que ocupan los círculos.



11.3 LA PRUEBA DE LA INTEGRAL Y ESTIMACIONES DE LAS SUMAS

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie. Se es capaz de lograrlo en el caso de series geométricas y las series $\Sigma\, 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de estos casos es posible encontrar una fórmula simple para la n-ésima suma parcial s_n. Pero por lo regular no es fácil calcular $\lim_{n\to\infty} s_n$. Por lo tanto, en las siguientes secciones se tratan varias pruebas que permiten determinar si una serie es convergente o divergente sin que se tenga que encontrar en forma explícita su suma. (En algunos casos, los métodos permiten determinar unas buenas estimaciones de la suma.) El primer método utiliza integrales impropias.

Empiece por investigar las series cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No hay una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada mediante una computadora de los valores, dados en el margen sugiere que las sumas parciales se aproximan a un número cercano a 1.64 cuando $n \to \infty$ y de este modo parece como si la serie fuera convergente.

Se confirma esta impresión con un razonamiento geométrico. En la figura 1 se ilustra la curva $y = 1/x^2$ y algunos rectángulos que se encuentran abajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud igual a 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el extremo derecho del intervalo de este modo, la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

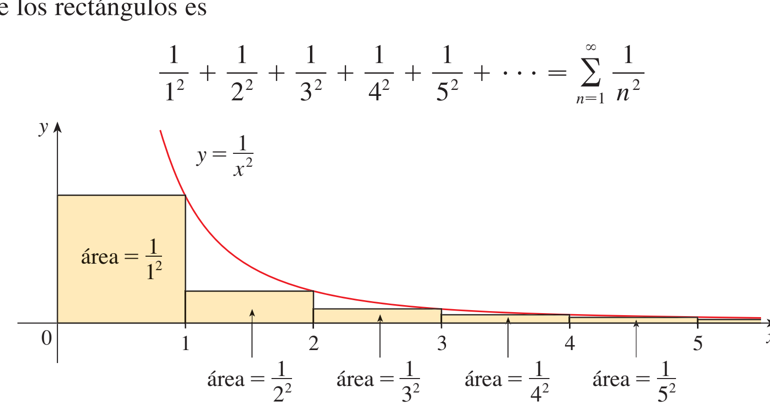


FIGURA 1

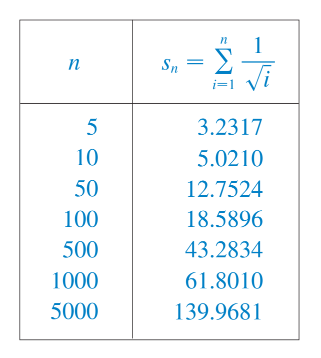
Si excluye el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es menor que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que es el valor de la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. En la sección 7.8 descubrió que esta integral impropia es convergente y que tiene un valor de 1. De modo que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

En estos términos, las sumas parciales están acotadas. También sabe que las sumas parciales son crecientes porque todos los términos son positivos. Por lo tanto, las sumas parciales convergen, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, y de esa manera la serie es convergente. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) calculó que la suma exacta de esta serie es $\pi^2/6$, pero la demostración de esto es muy difícil. Véase el problema 6 en los Problemas adicionales después del capítulo 15].



n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

Ahora estudie la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

La tabla de valores de s_n hace pensar en que las sumas parciales no se aproximan a un número finito, de modo que se sospecha que la serie dada podría ser divergente. Una vez más use una imagen para confirmarlo. En la figura 2 se ilustra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez se usan rectángulos cuya parte superior queda por *encima* de la curva.

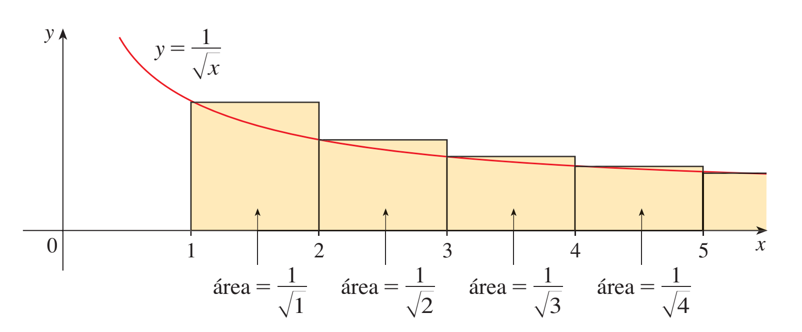


FIGURA 2

La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el extremo *izquierdo* del intervalo. Así, la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que es igual a la integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Pero según la sección 7.8, esta integral impropia es divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita. Por eso, la suma de la serie debe ser infinita; es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico aplicado para estas dos series, se puede hacer para demostrar la prueba siguiente. (La demostración se encuentra al final de esta sección.)

PRUEBA DE LA INTEGRAL Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. En tal caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

(i) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{use} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Asimismo, no es necesario que f sea siempre decreciente. Lo importante es que f sea decreciente *por último*, es decir, decreciente para x más grande que algún número N. En consecuencia $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente de acuerdo con la nota 4 de la sección 11.2.

EJEMPLO 1 Aplique la prueba de la integral para saber si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ de modo que aplique la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, $\int_1^{\infty} 1/(x^2 + 1)\,dx$ es una integral convergente y si es así, de acuerdo con la prueba de la integral, la serie $\Sigma\, 1/(n^2 + 1)$ es convergente. □

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de p es la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergente?

■ Para usar la prueba integral necesita evaluar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ y, por lo tanto, tiene que hallar una antiderivada de f. Es frecuente que esto sea difícil o imposible, de modo que también necesita otras pruebas para convergencia.

SOLUCIÓN Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia (11.2.7).

Si $p > 0$, entonces la función $f(x) = 1/x^p$ evidentemente es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$. Según el capítulo 7 [véase (7.8.2)],

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1$$

Se infiere de la prueba de la integral que la serie $\Sigma\, 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. (En el caso de $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el ejemplo 7 de la sección 11.2). □

La serie del ejemplo 2 se llama **serie *p***. Es importante en el resto de este capítulo, de modo que se resumen los resultados del ejemplo 2 para referencia futura como se indica a continuación.

1 La serie p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

EJEMPLO 3
(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una serie p con $p = 3 > 1$.
(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una serie p con $p = \frac{1}{3} < 1$. □

NOTA *No* debe inferir que, de acuerdo con la prueba de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{en tanto que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

V EJEMPLO 4 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio si f es decreciente o no lo es, de modo que al calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Por lo tanto, $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x > e$. Se infiere que f es decreciente cuando $x > e$ y así aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t\to\infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Puesto que esta integral impropia es divergente, la serie $\Sigma\, (\ln n)/n$ también es divergente de acuerdo con la prueba de la integral. □

ESTIMACIÓN DE LA SUMA DE UNA SERIE

Suponga que pudo aplicar la prueba de la integral para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ es convergente y que quiere encontrar una aproximación a la suma s de la serie. Claro, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para saberlo, necesita estimar el tamaño del **residuo**.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

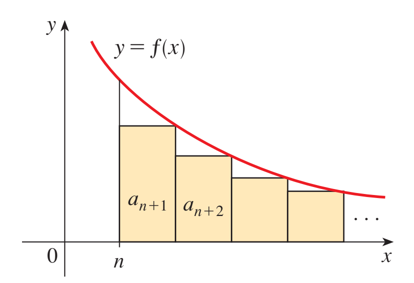


FIGURA 3

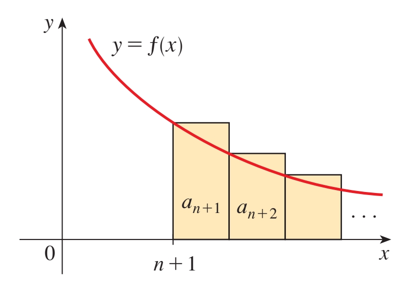


FIGURA 4

El residuo R_n es el error que se comete cuando s_n, la suma de los primeros n términos, se usa como una aproximación a la suma total.

Se usa la misma notación y las ideas que en la prueba de la integral, suponiendo que f es decreciente en $[n, \infty)$. Al comparar las áreas de los rectángulos con el área bajo $y = f(x)$ para $x > n$ en la figura 3

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\, dx$$

Asimismo, en la figura 4

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\, dx$$

De este modo se demuestra la siguiente estimación de error.

2 ESTIMACIÓN DEL RESIDUO PARA LA PRUEBA DE LA INTEGRAL Suponga $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant n$ y $\Sigma\, a_n$ es convergente. Si $R_n = s - s_n$, entonces

$$\int_{n+1}^\infty f(x)\, dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\, dx$$

V EJEMPLO 5

(a) Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma\, 1/n^3$ usando la suma de los primeros 10 términos. Estime el error originado en esta aproximación.

(b) ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que la suma no difiere en más de 0.0005?

SOLUCIÓN En los incisos (a) y (b) necesita conocer $\int_n^\infty f(x)\, dx$. Con $f(x) = 1/x^3$, que satisface las condiciones de la prueba integral, tiene

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_n^t = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a)

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975$$

De acuerdo con el residuo estimado en (2) tiene

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

De modo que el tamaño del error es cuanto mucho de 0.005.

(b) La precisión de 0.0005 quiere decir que debe encontrar un valor de n tal que $R_n \leqslant 0.0005$. Puesto que

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

se quiere que

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Al resolver la desigualdad, sabe que

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \qquad \text{o bien,} \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Necesita 32 términos para tener la seguridad de que no habrá una diferencia mayor que 0.0005. □

Si suma s_n a cada miembro de las desigualdades en (2), obtiene

3 $$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx$$

porque $s_n + R_n = s$. Las desigualdades en (3) dan una cota inferior y una cota superior para s. Proporcionan una aproximación más certera a la suma de la serie que la suma parcial s_n.

EJEMPLO 6 Use (3) con $n = 10$ para estimar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUCIÓN Las desigualdades en (3) se vuelven

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$$

Del ejemplo 5 sabe que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

de modo que
$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Si usa $s_{10} \approx 1.197532$, obtiene

$$1.201664 \leqslant s \leqslant 1.202532$$

Si obtiene la aproximación de s por medio del punto medio de este intervalo, en este caso el error es cuanto mucho la mitad de la longitud del intervalo. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{con error} < 0.0005$$ □

Si compara el ejemplo 6 con el ejemplo 5, se observa que la estimación en (3) es mucho mejor que la estimación $s \approx s_n$. Para que el error sea menor que 0.0005 tiene que usar 32 términos en el ejemplo 5, pero sólo 10 términos en el ejemplo 6.

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA INTEGRAL

Ya se trató la idea básica en la que se apoya la demostración de la prueba de la integral en las figuras 1 y 2 para la serie $\Sigma\, 1/n^2$ y $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$. En el caso de la serie general $\Sigma\, a_n$ examine las figuras 5 y 6. El área del primer rectángulo sombreado de la figura 5 es el valor de f en el extremo derecho de [1, 2], es decir, $f(2) = a_2$. De esta manera, al comparar

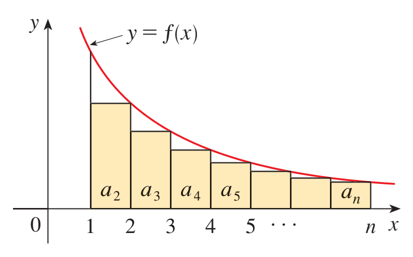


FIGURA 5

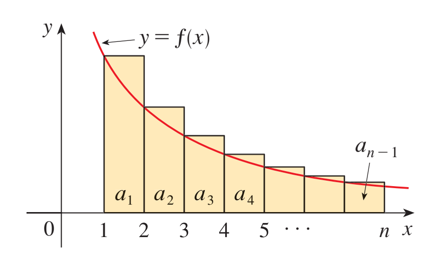


FIGURA 6

las áreas de los rectángulos sombreados con el área bajo $y = f(x)$ desde 1 hasta n observa que

4 $$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que esta desigualdad depende del hecho de que f es decreciente.) De manera similar, en la figura 6 se muestra que`

5 $$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, en este caso (4) da

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

puesto que $f(x) \geqslant 0$. Por lo tanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para toda n, la sucesión $\{s_n\}$ está acotada por arriba. Asimismo,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

como $a_{n+1} = f(n + 1) \geqslant 0$. En estos términos, $\{s_n\}$ es una sucesión acotada creciente y, de este modo, es convergente de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona (11.1.12). Esto quiere decir que $\Sigma\, a_n$ es convergente.

(ii) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ cuando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Pero con (5) se obtiene

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

y también $s_{n-1} \to \infty$. Esto quiere decir que $s_n \to \infty$ entonces $\Sigma\, a_n$ diverge. □

11.3 EJERCICIOS

1. Dibuje una imagen para demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\,dx$$

¿Qué puede concluir con respecto a la serie?

2. Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$. En una imagen acomode las tres cantidades siguientes en orden creciente.

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 Mediante la prueba de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n + 4}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{n + 1}$

9–26 Determine si la serie es convergente o divergente.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 2}{n(n + 1)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1n\, n)^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

27–30 Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

28. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\, [\ln(\ln n)]^p}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

31. La función zeta de Riemann ζ se define como

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

y se usa en teoría de los números para estudiar la distribución de los números primos. ¿Cuál es el dominio de ζ?

32. (a) Calcule la suma parcial s_{10} de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime el error al usar s_{10} como una aproximación a la suma de la serie.
(b) Use (3) con $n = 10$ para conseguir una estimación mejorada de la suma.
(c) Calcule un valor de n tal que s_n no difiera más de 0.00001 del valor de la suma.

33. (a) Mediante la suma de los primeros 10 términos, estime la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. ¿Qué tan buena es la estimación?
(b) Mejore esta estimación usando (3) con $n = 10$.
(c) Encuentre un valor de n que dé la certeza de que el error en la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0.001.

34. Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ correcta en tres cifras decimales.

35. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)^{-6}$ correcta a cinco lugares decimales.

36. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ se necesitarían sumar para calcular la suma que no difiera de 0.01?

37. Demuestre que si busca obtener un valor aproximado de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1.001}$ de modo que el error sea menor de 5 en la novena cifra decimal, en este caso ¡necesita sumar más de $10^{11,301}$ términos!

CAS **38.** (a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ es convergente.
(b) Encuentre una cota superior para el error en la aproximación $s \approx s_n$.
(c) ¿Cuál es el valor más pequeño de n tal que esta cota superior sea menor que 0.05?
(d) Encuentre s_n para este valor de n.

39. (a) Mediante (4) demuestre que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, entonces

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso (a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

40. Siga los pasos siguientes para demostrar que la sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tiene un límite. (El valor del límite se denota con γ y se denomina constante de Euler.)
(a) Dibuje un diagrama como la figura 6 con $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como un área, o bien use (5), para demostrar que $t_n > 0$ para toda n.
(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como una diferencia de áreas para demostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Por lo tanto, $\{t_n\}$ es una sucesión decreciente.
(c) Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que $\{t_n\}$ es convergente.

41. Determine todos los valores positivos de b para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

42. Encuentre todos los valores de c para los que converge la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 PRUEBAS POR COMPARACIÓN

En las pruebas por comparación, la idea es comparar una serie dada con una serie que ya se sabe que es convergente o divergente. Por ejemplo, la serie

1 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

recuerde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, la cual es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ por lo tanto, es convergente. Como la serie (1) es similar a la serie convergente, se presiente que también debe ser convergente. De hecho, así es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

demuestra que la serie dada (1) tiene términos menores que los de la serie geométrica y, por lo tanto, todas las sumas parciales son también más pequeñas que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, la cual es convergente. Asimismo, se infiere que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Un razonamiento similar se puede hacer para demostrar la prueba siguiente, la cual se aplica sólo a series cuyos términos son positivos. La primera parte dice que si tiene una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie conocida *convergente*, por lo tanto la serie también es convergente. La segunda parte establece que si empieza con una serie cuyos términos son *mayores* que los de una serie *divergente* conocida, en tal caso también es divergente.

PRUEBA POR COMPARACIÓN Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos.
(i) Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ es convergente.
(ii) Si $\sum b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces $\sum a_n$ es divergente.

■ Es importante estar atento a la distinción entre sucesión y serie. Una sucesión es un listado de números, y una serie es una suma. Con toda serie $\sum a_n$ hay dos sucesiones asociadas: la sucesión $\{a_n\}$ de términos y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

DEMOSTRACIÓN

(i) Sea $$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Puesto que ambas series tienen términos positivos, las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son crecientes $(s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n)$. Asimismo, $t_n \to t$, así que $t_n \leqslant t$ para toda n. Como $a_i \leqslant b_i$, $s_n \leqslant t_n$. De este modo, $s_n \leqslant t$ para toda n. Esto quiere decir que $\{s_n\}$ es creciente y está acotada superiormente, por el teorema de sucesiones monótonas la serie $\sum a_n$ es convergente.

(ii) Si $\sum b_n$ es divergente, después $t_n \to \infty$ (puesto que $\{t_n\}$ es creciente). Pero $a_i \geqslant b_i$ de modo que $s_n \geqslant t_n$. Así que $s_n \to \infty$. Por lo tanto $\sum a_n$ diverge. □

Naturalmente, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida $\sum b_n$ para los fines de la comparación. La mayor parte de las veces se usan las series:

La serie estándar se usa con la prueba por comparación

- p [$\sum 1/n^p$ que convergen si $p > 1$ y divergen si $p \leqslant 1$; véase (11.3.1)] o bien,
- series geométricas [$\sum ar^{n-1}$ es convergente si $|r| < 1$ y es divergente si $|r| \geqslant 1$; véase (11.2.4)].

EJEMPLO 1 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN En el caso de n grandes el término dominante en el denominador es $2n^2$ de modo que compare la serie dada con la serie $\Sigma\, 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de la prueba por comparación, a_n está en el lado izquierdo y b_n en el lado derecho). Ya sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una serie p con $p = 2 > 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente de acuerdo con el inciso (i) de la prueba por comparación. □

NOTA 1 La condición $a_n \leqslant b_n$ o bien, $a_n \geqslant b_n$ de la prueba por comparación es para toda n, es necesario comprobar sólo que se cumple para $n \geqslant N$, donde N es un entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos. Lo anterior se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Esta serie se probó (usando la prueba de la integral) en el ejemplo 4 de la sección 11.3, pero también es posible probarla por comparación con la serie armónica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geqslant 3$ y de esa manera

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3$$

Ya sabe que $\Sigma\, 1/n$ es divergente (serie p con $p = 1$). De esta manera la, serie dada es divergente de acuerdo con la prueba por comparación. □

NOTA 2 Los términos de la serie que se está probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, en tal caso la prueba por comparación no se aplica. Por ejemplo, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en cuanto a la prueba por comparación porque $\Sigma\, b_n = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. Sin embargo, la impresión es que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ tiene que ser convergente porque es muy parecida a la serie geométrica convergente $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tal caso se puede aplicar la prueba siguiente.

■ Los ejercicios 40 y 41 tratan los casos $c = 0$ y $c = \infty$.

PRUEBA POR COMPARACIÓN EN EL LÍMITE Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, en seguida ambas series convergen o ambas divergen.

DEMOSTRACIÓN Sea m y M números positivos tales que $m < c < M$. Como a_n/b_n está cercano a c para n grande, hay un entero N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{cuando } n > N$$

y así

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{cuando } n > N$$

Si $\Sigma\, b_n$ es convergente también lo es $\Sigma\, Mb_n$. Así $\Sigma\, a_n$ es convergente según el inciso (i) de la prueba por comparación. Si la serie $\Sigma\, b_n$ diverge también $\Sigma\, mb_n$ es divergente y por el inciso (ii) de la prueba por comparación la serie $\Sigma\, a_n$ diverge. □

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Aplique la prueba por comparación en el límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Puesto que existe este límite y $\Sigma\, 1/2^n$ es una serie geométrica convergente, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite. □

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La parte dominante del numerador es $2n^2$ y la parte dominante del denominador es $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Esto recomienda efectuar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Puesto que $\Sigma\, b_n = 2\,\Sigma\, 1/n^{1/2}$ es divergente (es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$), la serie dada diverge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite. □

Observe que al probar muchas series se encuentra una serie conveniente $\Sigma\, b_n$ conservando sólo las potencias más altas en el numerador y en el denominador.

ESTIMACIÓN DE SUMAS

Si ha usado la prueba por comparación para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ es convergente comparando con la serie $\Sigma\, b_n$, entonces se puede hacer una estimación de la serie $\Sigma\, a_n$ al comparar los residuos. Como en la sección 11.3, considere el residuo

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En cuanto a la serie de comparación $\Sigma\, b_n$ considere el residuo correspondiente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Puesto que $a_n \leqslant b_n$ para toda n, $R_n \leqslant T_n$. Si $\Sigma\, b_n$ es una serie p, estime su residuo T_n como en la sección 11.3. Si $\Sigma\, b_n$ es una serie geométrica, por lo tanto T_n es la suma de una serie geométrica y puede sumarla exactamente (véanse ejercicios 35 y 36). En cualquier caso, sabe que R_n es menor que T_n.

V EJEMPLO 5 Con la suma de los primeros 100 términos obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime el error de esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba por comparación. El residuo T_n de la serie de comparación $\Sigma\, 1/n^3$ ya se estimó en el ejemplo 5 de la sección 11.3 por medio de la estimación del residuo para la prueba de la integral. Allí se encontró que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por lo tanto, el residuo R_n de la serie dada cumple con

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Con una calculadora programable o una computadora, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

con un error menor que 0.00005. □

11.4 EJERCICIOS

1. Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que se sabe que $\Sigma\, b_n$ es convergente.
   (a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué puede decir con respecto a $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?
   (b) Si $a_n < b_n$ para toda n, qué puede decir con respecto a $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?

2. Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que se sabe que $\Sigma\, b_n$ es divergente.
   (a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué puede decir de $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?
   (b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿que puede decir con respecto a $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?

3–32 Determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^4 + 1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n4^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n - 1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 4^n}{1 + 3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4^n}{n + 6^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 2}}{2n^2 + n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 2n}{(1 + n^2)^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n + n^2}{\sqrt{1 + n^2 + n^6}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 5}{\sqrt[3]{n^7 + n^2}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 Mediante la suma de los primeros 10 términos, obtenga un valor aproximado de la suma de la serie. Estime el error.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + 1)3^n}$

37. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números 0, 1, 2, . . . , 9) es que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

38. ¿Para qué valores de p la serie $\Sigma_{n=2}^{\infty}\, 1/(n^p \ln n)$ es convergente?

39. Demuestre que si $a_n \geqslant 0$ y $\Sigma\, a_n$ converge, por lo tanto $\Sigma\, a_n^2$ también converge.

40. (a) Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que $\Sigma\, b_n$ es convergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

entonces $\Sigma\, a_n$ también es convergente.
   (b) Mediante el inciso (a) demuestre que la serie converge.
   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$

41. (a) Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que $\Sigma\, b_n$ es divergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

entonces $\Sigma\, a_n$ también es divergente.
   (b) Use el inciso (a) para demostrar que la serie es divergente.
   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Proporcione un ejemplo de un par de series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ con términos positivos donde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ y $\Sigma\, b_n$ diverge, pero $\Sigma\, a_n$ converge. [Compare con el ejercicio 40.]

43. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, en tal caso $\Sigma\, a_n$ es divergente.

44. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\Sigma\, a_n$ es convergente, por lo tanto $\Sigma \ln(1 + a_n)$ es convergente.

45. Si $\Sigma\, a_n$ es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

46. Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma\, a_nb_n$ también es convergente?

11.5 SERIES ALTERNANTES

Las pruebas de convergencia que se han examinado hasta este momento se aplican sólo a series con términos positivos. En esta sección y en la siguiente, se estudia cómo tratar a series cuyos términos no son necesariamente positivos. De particular importancia son las *series alternantes*, cuyos términos se alternan en signo.

Una **serie alternante** es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Aquí hay dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

De acuerdo con los ejemplos, el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o bien,} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (En efecto, $b_n = |a_n|$.)

La prueba siguiente establece que si los términos de una serie alternante decrecen hacia 0 en valor absoluto, en este caso la serie converge.

PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad (b_n > 0)$$

cumple con

(i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para toda n

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

entonces la serie es convergente.

Antes de proporcionar la demostración vea la figura 1, la cual es una representación de la idea en la que se apoya la demostración. Primero dibuje $s_1 = b_1$ en una recta numérica. Para determinar s_2 reste b_2, de modo que s_2 está a la izquierda de s_1. Luego, para determinar s_3 sume b_3, de modo que s_3 está a la derecha de s_2. Pero como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Al continuar de esta manera, se observa que las sumas parciales oscilan hacia un lado y hacia el otro. Puesto que $b_n \to 0$, los pasos siguientes se vuelven más y más pequeños. Las sumas parciales pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ se incrementan, y decrecen las sumas parciales impares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ En estos términos, es posible que ambas converjan en el mismo número s, el cual es la suma de la serie. Por consiguiente, en la demostración siguiente se consideran por separado las sumas parciales pares e impares.

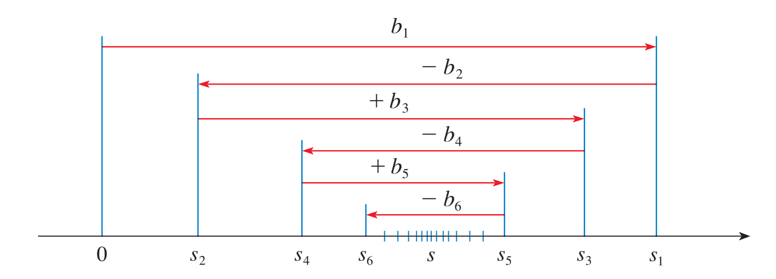


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Primero considere las sumas parciales pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{puesto que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{puesto que } b_4 \leqslant b_3$$

En general, $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$ puesto que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Por esto, $0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$

Pero también puede escribir

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Todos los términos entre paréntesis son positivos, de modo que $s_{2n} \leqslant b_1$ para toda n. Por lo tanto, la sucesión $\{s_{2n}\}$ de las sumas parciales pares se incrementa y está acotada por arriba. Debido a eso, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona es convergente. Llame s a su límite, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n} = s$$

Ahora calcule el límite de las sumas parciales impares:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} s_{2n+1} &= \lim_{n \to \infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n \to \infty} s_{2n} + \lim_{n \to \infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[según la condición ii)]} \\ &= s \end{aligned}$$

Puesto que tanto la suma parcial par como la suma parcial impar convergen en s, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (véase el ejercicio 80(a) de la sección 11.1), por lo que la serie es convergente. □

■ En la figura 2 se ilustra el ejemplo 1; se muestran las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Observe cómo los valores de s_n van en zigzag dentro del límite, el cual al parecer está alrededor de 0.7. De hecho, la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$ (véase ejercicio 36).

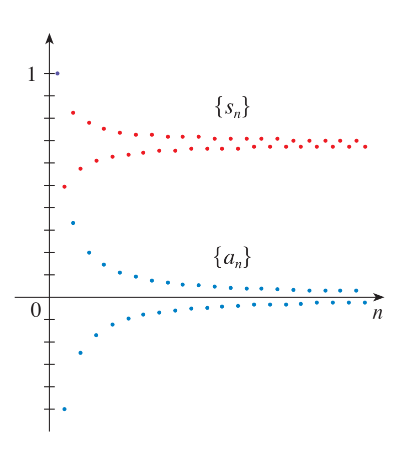


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

cumple con

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. □

V EJEMPLO 2 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n - 1}$ es alternante pero

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{3n}{4n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que la condición (ii) no se cumple. En cambio, vea el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n - 1}$$

Este límite no existe, de modo que la serie es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. □

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, de modo que trate de comprobar las condiciones (i) y (ii) de la prueba de la serie alternante.

Al contrario de la situación en el ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3 + 1)$ sea decreciente. Sin embargo, si considera la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3 + 1)$, encuentre que

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$$

Puesto que se consideran sólo x positivas, $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{2}$. De esta manera, f es decreciente en el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto quiere decir que $f(n + 1) < f(n)$ y, por lo tanto, $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede comprobar de manera directa, pero lo que realmente importa es que la sucesión $\{b_n\}$ decrece con el tiempo.)

■ En lugar de verificar la condición (i) de la prueba de la serie alternante calculando una derivada, puede comprobar que $b_{n+1} < b_n$ directamente usando la técnica de la solución 1 del ejemplo 12 de la sección 11.1.

La condición (ii) se comprueba rápidamente:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^3}} = 0$$

Por esto, la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. □

ESTIMANDO SUMAS

Una suma parcial de s_n de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total s, pero no es muy utilizado, a menos que estime la exactitud de la aproximación. El error generado al usar $s \approx s_n$ es el residuo $R_n = s - s_n$. El teorema siguiente establece que para las series que cumplen con la condición de la prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor que b_{n+1}, lo cual es el valor absoluto del primer término ignorado.

■ Desde el punto de vista de la geometría, puede ver por qué el teorema de estimación para series alternantes es verdadero al examinar la figura 1 en la página 710. Observe que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$, y así sucesivamente. Note también que s queda entre dos sumas parciales consecutivas.

TEOREMA DE ESTIMACIÓN PARA SERIES ALTERNANTES Si $s = \Sigma\,(-1)^{n-1} b_n$ es la suma de una serie alternante que cumple con

$$\text{(i)}\ \ 0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces $$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

DEMOSTRACIÓN Sabemos de la demostración para la prueba de series alternantes que s queda entre dos sumas parciales consecutivas s_n y s_{n+1}. Se infiere que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$ □

V EJEMPLO 4 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ con tres cifras decimales. (Por definición, $0! = 1$.)

SOLUCIÓN Primero observe que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante porque

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{de modo que } \frac{1}{n!} \to 0 \text{ conforme } n \to \infty$$

Para ver cuántos términos necesitamos usar en la aproximación, escriba los primeros términos de la serie

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

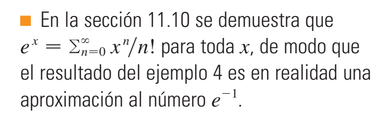
$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Observe que
$$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0.0002$$

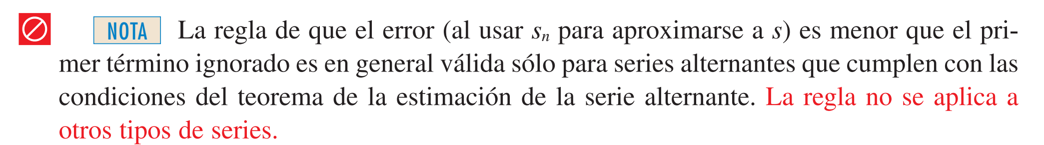
y
$$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0.368056$$

De acuerdo con el teorema de la estimación de la serie alternante, se sabe que

$$|s - s_6| \leq b_7 < 0.0002$$


■ En la sección 11.10 se demuestra que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para toda x, de modo que el resultado del ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

Este error de menos de 0.0002 no afecta la tercera cifra decimal, de modo que tenemos $s \approx 0.368$ que es correcta hasta la tercera cifra decimal. □


NOTA La regla de que el error (al usar s_n para aproximarse a s) es menor que el primer término ignorado es en general válida sólo para series alternantes que cumplen con las condiciones del teorema de la estimación de la serie alternante. La regla no se aplica a otros tipos de series.

11.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una serie alternante?
(b) ¿En qué condiciones una serie alternante converge?
(c) Si estas condiciones se cumplen, ¿qué puede decir con respecto al residuo después de n términos?

2–20 Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

2. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$

3. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$

21–22 Calcule las 10 primeras sumas parciales de la serie y dibuje tanto la sucesión de términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. Estime el error al usar la décima suma parcial para aproximarse a la suma total.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$

23–26 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie necesita sumar para determinar la suma con la exactitud señalada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ $(|\text{error}| < 0.00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\,5^n}$ $(|\text{error}| < 0.0001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{10^n n!}$ $(|\text{error}| < 0.000005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}$ $(|\text{error}| < 0.01)$

27–30 Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie que sea correcta hasta la cuarta cifra decimal.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n}{8^n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^2}{10^n}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{3^n n!}$

31. ¿Es la 50a. suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ una estimación excesiva o una subestimación de la suma total? Explique.

32–34 ¿Para qué valores de p es convergente cada serie?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ **33.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

35. Demuestre que es divergente la serie $\Sigma\,(-1)^{n-1} b_n$, donde $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1/n^2$ si n es par. ¿Por qué no se aplica la prueba de la serie alternante?

36. Siga los pasos siguientes para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sean h_n y s_n las sumas parciales de las series armónica y armónica alternante.

(a) Demuestre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Según el ejercicio 40 de la sección 11.3

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

y, por lo tanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Apoyándose en estos hechos y el inciso (a), demuestre que $s_{2n} \to \ln 2$ cuando $n \to \infty$.

11.6 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y LAS PRUEBAS DE LA RAZÓN Y LA RAÍZ

Dada una serie $\Sigma\, a_n$, considere las series correspondientes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

■ Hay pruebas para la convergencia para series con términos positivos y para series alternantes. Pero, ¿y si los signos de los términos cambian de manera irregular? En el ejemplo 3, se observa que la idea de la convergencia absoluta ayuda a veces en tales casos.

1 DEFINICIÓN Una serie $\Sigma\, a_n$ es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ es convergente.

Observe que si $\Sigma\, a_n$ es una serie con términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y por lo tanto la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$). □

EJEMPLO 2 Ya sabe que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (véase ejemplo 1 de la sección 11.5), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (serie p con $p = 1$) y, por lo tanto, es divergente. □

2 DEFINICIÓN Una serie $\sum a_n$ se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

En el ejemplo 2 se muestra que la serie armónica alternante es condicionalmente convergente. En estos términos, es posible que una serie sea convergente, pero no absolutamente convergente. No obstante, el teorema siguiente muestra que la convergencia absoluta significa convergencia.

3 TEOREMA Si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN Observe la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es cierta porque $|a_n|$ es a_n o bien, $-a_n$. Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\sum |a_n|$ es convergente, así que $\sum 2|a_n|$ es convergente. Por lo tanto, según la prueba de la comparación, $\sum (a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por lo tanto, convergente. □

■ En la figura 1 se ilustran las gráficas de los términos a_n y las sumas parciales s_n de la serie del ejemplo 3. Observe que la serie no es alternante, pero tiene términos positivos y negativos.

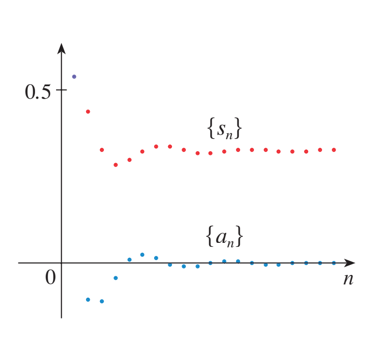


FIGURA 1

V EJEMPLO 3 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie posee términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los siguientes tres son negativos, y los otros tres que siguen son positivos. Los signos no siguen un patrón regular.) Entonces puede aplicar la prueba de comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Puesto que $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, entonces

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n^2$ es convergente (serie p con $p = 2$) y, por lo tanto, $\Sigma\, |\cos n|/n^2$ es convergente según la prueba por comparación. De esta manera, la serie dada $\Sigma\, (\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y, debido a eso, convergente de acuerdo con el teorema 3. □

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una cierta serie es absolutamente convergente

PRUEBA DE LA RAZÓN

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, en consecuencia, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, o bien, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, la regla de comparación no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de $\Sigma\, a_n$.

DEMOSTRACIÓN

(i) La idea es comparar la serie dada con una serie geométrica convergente. Puesto que $L < 1$, puede escoger un número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \qquad \text{y} \qquad L < r$$

el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; es decir, existe un entero N tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r \qquad \text{cuando } n \geqslant N$$

que equivale,

4 $$|a_{n+1}| < |a_n|\, r \qquad \text{cuando } n \geqslant N$$

Al hacer a n sucesivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$, . . . en (4), se obtiene

$$|a_{N+1}| < |a_N|\, r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\, r < |a_N|\, r^3$$

y, en general,

5 $$|a_{N+k}| < |a_N|\, r^k \qquad \text{para toda } k \geqslant 1$$

Ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

es convergente porque es una serie geométrica con $0 < r < 1$. De modo que la desigualdad 5), junto con la prueba de la comparación demuestran que la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

también es convergente. Se infiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Recuerde que una cantidad finita de términos no afecta la convergencia.) Por lo tanto, $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$, o bien, $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, entonces el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será mayor que 1; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

Esto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ siempre que $n \geqslant N$ y de este modo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

En consecuencia, $\Sigma\, a_n$ es divergente según la prueba de la divergencia. □

NOTA La parte (iii) de la regla de comparación establece que si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no proporciona información. Por ejemplo, en cuanto a la serie convergente $\Sigma\, 1/n^2$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

pero para la serie divergente $\Sigma\, 1/n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por lo tanto, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente. En este caso, la regla de comparación no funciona, razón por la cual debe aplicar otra prueba.

EJEMPLO 4 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN Aplique la regla de comparación con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

■ ESTIMACIÓN DE SUMAS

En las tres últimas secciones estudió varios métodos para estimar la suma de la serie, y el método dependía de cuál prueba se usaba para demostrar la convergencia. ¿Qué sucede con las series para las cuales sí funciona la regla de comparación? Hay dos posibilidades: si la serie es alternante, como en el ejemplo 4, entonces es mejor aplicar los métodos de la sección 11.5. Si todos los términos son positivos, en este caso aplique los métodos especiales que se explican en el ejercicio 34.

De esta manera, de acuerdo con la regla de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, en consecuencia, convergente. □

EJEMPLO 5 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ es convergente.

SOLUCIÓN Puesto que los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no necesita los signos del valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(Véase ecuación 3.6.6.) Puesto que $e > 1$, la serie dada es divergente según la prueba de la razón. □

NOTA La prueba de la razón funciona en el ejemplo 5, pero un método más fácil es la prueba de la divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

se infiere que a_n no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, la serie dada es divergente según la prueba de la divergencia.

Es conveniente aplicar la siguiente prueba cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la prueba de la razón y se deja en el ejercicio 37.

PRUEBA DE LA RAÍZ

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por lo tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces la parte (iii) de la prueba de la raíz establece que la prueba no proporciona información. La serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente. (Si $L = 1$ en la prueba de la razón no intente con la prueba de la raíz porque L será una vez más 1. Y si $L = 1$ en la prueba de la raíz, no intente la prueba de la razón porque también fallará.)

EJEMPLO 6 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUCIÓN

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Así, la serie dada converge según la prueba de la raíz. □

REORDENAMIENTOS

La pregunta de si una serie dada que es convergente es absolutamente convergente o condicionalmente convergente, tiene relación con la pregunta si las sumas infinitas se comportan como sumas finitas.

Naturalmente, si reordena los términos en una suma finita, pues el valor de la suma no cambia. Pero esto no siempre sucede en las series infinitas. Con **reordenamiento** de una serie infinita $\Sigma\, a_n$ se da a entender una serie obtenida simplemente al cambiar el orden de los términos. Por ejemplo, un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ podría ser el siguiente:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Resulta que

si $\Sigma\, a_n$ es una serie absolutamente convergente de suma s,
en tal caso cualquier reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ tiene la misma suma s.

Sin embargo, cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar, con lo cual la suma será distinta. Para ilustrar este hecho considere la serie armónica alterna

6 $$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Véase ejercicio 36 en la sección 11.5.) Si multiplica la serie por $\frac{1}{2}$, obtiene

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Si inserta ceros entre los términos de esta serie, tiene

■ Sumar ceros no afecta la suma de la serie; se repite cada uno de los términos de la sucesión de sumas parciales, pero el límite es el mismo.

7 $$0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Ahora sume la serie de las ecuaciones 6 y 7 usando el teorema 11.2.8:

8 $$1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observe que la serie en (8) consta de los mismos términos que en (6), pero reordenados de modo que haya un término negativo después de cada par de términos positivos. Pero las sumas de estas series son diferentes. De hecho, Riemann demostró que

si $\Sigma\, a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, por lo tanto hay un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ que tiene una suma igual a r.

Una demostración de este hecho se plantea en el ejercicio 40.

11.6 EJERCICIOS

1. ¿Qué puede decir acerca de la serie $\Sigma\, a_n$ en cada uno de los casos siguientes?

(a) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–28 Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{(1.1)^n}{n^4}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{2n^2 + 1}\right)^n$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n + 1}\right)^{5n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

25. $1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{(2n - 1)!} + \cdots$

26. $\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n + 2)}$

---

29. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n + 1}{4n + 3} a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ es convergente o divergente.

30. Una serie $\Sigma\, a_n$ está definida de acuerdo con las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ converge o diverge.

31. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + n^2}$

32. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

33. (a) Demuestre que $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ converge para toda x.
(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

34. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie con términos positivos y sea $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, de modo que $\Sigma\, a_n$ es convergente según la prueba de la razón. Como es lo usual, R_n sea el residuo después de n términos, es decir,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Si $\{r_n\}$ es una sucesión decreciente y $r_{n+1} < 1$, demuestre con la suma de una serie geométrica que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Si $\{r_n\}$ es una sucesión creciente, demuestre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

35. (a) Calcule la suma parcial s_5 de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n2^n$. Con ayuda del ejercicio 34 estime el error al usar s_5 como una aproximación a la suma de la serie.
(b) Determine un valor de n de tal modo que s_n no difiera 0.00005 de la suma real. Use este valor de n para obtener un valor aproximado de la suma de la serie.

36. Use la suma de los primeros 10 términos para obtener un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Aplique el ejercicio 34 para estimar el error.

37. Demuestre la prueba de la raíz. [*Sugerencia para la parte (i):* tome cualquier número r tal que $L < r < 1$ y aplique el hecho de que hay un entero N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ cuando $n \geqslant N$.]

38. Hacia 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de la India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper utilizó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.
(a) Verifique que la serie sea convergente.
(b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa sólo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

39. Dada cualquier serie $\Sigma\, a_n$ define una serie $\Sigma\, a_n^+$ si todos sus términos son positivos de $\Sigma\, a_n$ y una serie $\Sigma\, a_n^-$ si todos sus términos son negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específicos,

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que si $a_n > 0$, por lo tanto $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = 0$, siempre que $a_n < 0$, después $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$.
(a) Si $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, demuestre que tanto la serie $\Sigma\, a_n^+$ como la $\Sigma\, a_n^-$ son convergentes.
(b) Si $\Sigma\, a_n$ es condicionalmente convergente, demuestre que tanto la serie $\Sigma\, a_n^+$ como la $\Sigma\, a_n^-$ son divergentes.

40. Demuestre que si $\Sigma\, a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, en este caso hay un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ cuya suma es r. [*Sugerencias:* utilice la notación del ejercicio 39. Tome sólo suficientes términos positivos a_n^+ de modo que su suma sea mayor que r. Luego sume sólo suficientes términos negativos a_n^- para que la suma acumulativa sea menor que r. Continúe así y aplique el teorema 11.2.6.]

11.7 ESTRATEGIA PARA PROBAR SERIES

Ya conoce varias maneras de probar la convergencia o divergencia de una serie. Ahora el problema es decidir cuál prueba aplicar en cada serie. En este aspecto, probar series es parecido a integrar funciones. No hay reglas rígidas y rápidas con respecto a qué prueba aplicar a una serie dada, pero puede seguir las recomendaciones siguientes, puesto que le pueden ser útiles.

No es prudente aplicar una lista de pruebas en un orden específico hasta que una acaba por funcionar. Eso sería un desperdicio de tiempo y esfuerzo. En lugar de eso, al igual que en la integración, la estrategia principal es clasificar las series de acuerdo con su *forma.*

1. Si la serie es de la forma $\Sigma\, 1/n^p$, es una serie p, lo cual significa que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.
2. Si la serie es de la forma $\Sigma\, ar^{n-1}$ o $\Sigma\, ar^n$, es una serie geométrica, la cual converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqslant 1$. Se podrían requerir algunas operaciones algebraicas para hacer que la serie alcance esta forma.
3. Si la serie posee una forma similar a la de una p-serie o a una serie geométrica, entonces se debe considerar una de las pruebas por comparación. En particular, si a_n es una función racional o una función algebraica de n (es decir, que contiene raíces de polinomios), por lo tanto, la serie se debe comparar contra una p-serie. Observe que la mayoría de las series de los ejercicios 11.4 poseen esta forma. (El valor de p se debe escoger como en la sección 11.4, y conservar sólo las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador.) Las pruebas por comparación se aplican sólo en series con términos positivos, pero si $\Sigma\, a_n$ tiene algunos términos negativos, en seguida puede aplicar la prueba por comparación a $\Sigma\, |a_n|$ y probar si hay convergencia absoluta.
4. Si es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces se debe aplicar la prueba para la divergencia.
5. Si la serie es de la forma $\Sigma\, (-1)^{n-1}b_n$, o bien, $\Sigma\, (-1)^n b_n$, entonces una posibilidad obvia es la prueba de la serie alternante.
6. Las series que contienen factoriales u otros productos (incluso una constante elevada a una potencia n-ésima) se prueban en forma aceptable usando la prueba de la razón. Siempre piense que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$ para todas las p-serie y, por lo tanto, todas las funciones racionales o algebraicas de n. En estos términos, la prueba de la razón no se debe aplicar para dichas series.
7. Si a_n es de la forma $(b_n)^n$, entonces la prueba de la raíz podría ser útil.
8. Si $a_n = f(n)$, donde $\int_1^\infty f(x)\, dx$ se puede evaluar con facilidad, entonces la prueba de la integral es efectiva (suponiendo que la hipótesis de esta prueba se cumple).

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

V EJEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Puesto que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, debe usar la prueba de la divergencia. □

EJEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de $n,$ compare la serie dada con la p-serie.

La serie de comparación de la prueba de comparación en el límite es $\Sigma\, b_n$, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$ □

EJEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Puesto que la integral $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La prueba de la razón también funciona. □

EJEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante. □

EJEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la prueba de la razón. □

EJEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, por lo que se aplica la prueba por comparación. □

11.7 EJERCICIOS

1–38 Pruebe si las series son convergentes o divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

11.8 SERIES DE POTENCIAS

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes que se denominan **coeficientes** de la serie**.** Para cada x establecida, la serie (1) es una serie de constantes que puede probar para ver si son convergentes o divergentes. Una serie de potencias podría ser convergente para algunos valores de x y ser divergente para otros. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las cuales la serie es convergente. Observe que f es parecida a un polinomio. La única diferencia es que f tiene una cantidad infinita de términos.

Por ejemplo, si hace $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se transforma en una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es convergente cuando $-1 < x < 1$ y es divergente cuando $|x| \geqslant 1$ (véase ecuación 11.2.5).

En general, una serie de la forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en** $(x - a)$, o bien, **serie de potencias centrada en** a, o también, **serie de potencias con respecto a** a. Observe que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las ecuaciones 1 y 2, se ha adoptado la convención de $(x - a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. Asimismo, note que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geqslant 1$ y de este modo la serie de potencias (2) siempre es convergente cuando $x = a$.

■ SERIES TRIGONOMÉTRICAS
Una serie de potencias es una serie en la cual cada uno de los términos es una función con potencias. Una **serie trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de serie se analiza en la página web

www.stewartcalculus.com

Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series*.

V EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ es convergente?

SOLUCIÓN Aplique la prueba de la razón. Si denota con a_n, como se acostumbra, el n-ésimo término de la serie, entonces $a_n = n!x^n$. Si $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

■ Nótese que
$(n+1)! = (n+1)n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= (n+1)n!$

Según la prueba de la razón, la serie es divergente cuando $x \neq 0$. En estos términos, la serie dada converge sólo cuando $x = 0$. □

V EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ es convergente?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x - 3)^n/n$. En tal caso

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

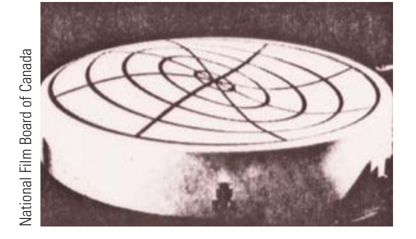
$$= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} |x - 3| \to |x - 3| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la regla de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente cuando $|x - 3| < 1$ y divergente cuando $|x - 3| > 1$. Ahora

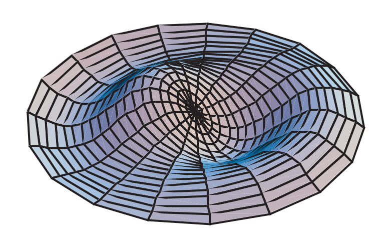
$$|x - 3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

de modo que la serie converge cuando $2 < x < 4$ y diverge cuando $x < 2$ o bien $x > 4$.

La prueba de la razón no proporciona información cuando $|x - 3| = 1$ de modo que debe considerar $x = 2$ y $x = 4$ por separado. Si pone $x = 4$ en la serie, se vuelve $\Sigma\, 1/n$, la serie armónica, la cual es divergente. Si $x = 2$, la serie es $\Sigma\, (-1)^n/n$, la cual es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por lo tanto, la serie de potencias dada converge para $2 \leqslant x < 4$. □


National Film Board of Canada

Ya verá que el uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del ejemplo siguiente se llama **función de Bessel**, en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846), y la función dada en el ejercicio 35 es otro ejemplo de la función de Bessel. En efecto, estas funciones surgieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas. Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, sin olvidar la distribución de temperaturas en una lámina circular y las vibraciones de una membrana de un tambor.



■ Observe cómo la aproximación del modelo generado por computadora (el cual utiliza funciones de Bessel y de cosenos) coincide con la fotografía de una membrana vibratoria de hule.

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

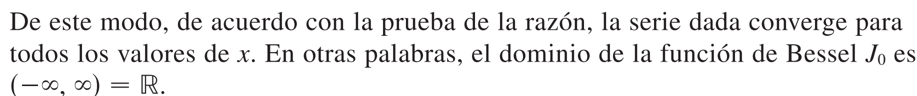
$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. En tal caso

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para toda } x$$


De este modo, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. □

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de las sumas parciales. De esa manera, cuando se define la función de Bessel del ejemplo 3 como la suma de una serie quiere decir que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147\,456}$$

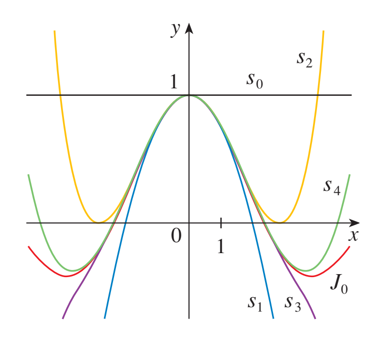


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

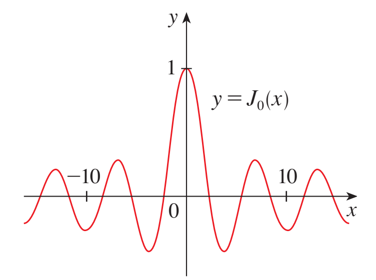


FIGURA 2

En la figura 1 se muestran las gráficas de estas sumas parciales, las cuales son polinomios. Todas son aproximaciones de la función J_0, pero observe que la aproximación es mejor cuando se incluyen más términos. En la figura 2 se ilustra una gráfica más completa de la función de Bessel.

En lo que respecta a la serie de potencias examinadas hasta el momento, el conjunto de valores de x para los cuales la serie es convergente ha resultado ser siempre un intervalo [un intervalo finito de la serie geométrica y la serie del ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del ejemplo 3 y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del ejemplo 1. El teorema siguiente, demostrado en el apéndice F, establece que esto es válido en general.

3 TEOREMA Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

(i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

(ii) La serie converge para toda x.

(iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

El número R en el caso (iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso (i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso (ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso (iii) la desigualdad $|x - a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *extremo* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por lo tanto, en el caso (iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a - R, a + R) \qquad (a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R) \qquad [a - R, a + R]$$

La situación se ilustra en la figura 3.

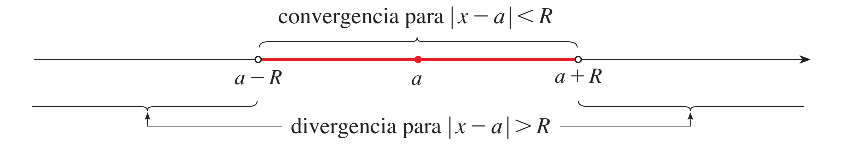


FIGURA 3

Se resumen a continuación el radio y el intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos ya considerados en esta sección.

	Serie	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

En general, la prueba de la razón (o a veces, la prueba de la raíz) se debe usar para determinar el radio de convergencia R. Las pruebas de la razón y la raíz siempre fracasan cuando x es un extremo del intervalo de convergencia, de modo que es necesario verificar los extremos por medio de alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Por lo tanto

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \to 3|x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge si $3|x| < 1$ y es divergente si $3|x| > 1$. En estos términos, es convergente si $|x| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto quiere decir que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que la serie converge en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pero ahora es necesario probar si hay convergencia en los extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

la cual es divergente. (Aplique la prueba de la integral o simplemente observe que es una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

la cual converge de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por lo tanto, la serie dada de potencias converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$, de modo que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. □

V EJEMPLO 5 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Al aplicar la prueba de la razón, se ve que la serie es convergente si $|x+2|/3 < 1$ y que es divergente si $|x+2|/3 > 1$. De modo que es convergente si $|x+2| < 3$ y divergente si $|x+2| > 3$. Así que, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x + 2| < 3$ se puede escribir como $-5 < x < 1$, así que probamos la serie en los extremos -5 y 1. Cuando $x = -5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

la cual es divergente según la prueba de la divergencia [$(-1)^n n$ no converge en 0]. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

la cual también es divergente según la prueba de la divergencia. Por esto, la serie converge sólo cuando $-5 < x < 1$, de modo que el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$. □

11.8 EJERCICIOS

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

3–28 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n 3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

29. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, ¿se infiere que la serie siguiente es convergente?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sean p y q números reales con $p < q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea
(a) (p, q) (b) $(p, q]$
(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. ¿Es posible hallar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[0, \infty)$? Explique.

34. Dibuje las primeras sumas parciales $s_n(x)$ de la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x) = 1/(1 - x)$, sobre una misma pantalla. ¿En qué intervalo parece que convergen estas sumas parciales y $f(x)$?

35. La función J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

se llama *función de Bessel de orden 1*.
(a) Determine el dominio.
(b) Dibuje las primeras sumas parciales en una misma pantalla.
(c) Si su CAS tiene incorporadas las funciones de Bessel, dibuje J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo se aproximan las sumas parciales a J_1.

36. La función A se define mediante

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

que se llama *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés sir George Airy (1801-1892).
(a) Determine el dominio de la función de Airy.
(b) Dibuje las primeras sumas parciales $s_n(x)$ en una misma pantalla.


(c) Si su CAS tiene incorporadas las funciones de Airy, dibuje A en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso b), y observe cómo las sumas parciales se aproximan a A.

37. Una función f está definida mediante

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

es decir, sus coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para toda $n \geqslant 0$. Determine el intervalo de convergencia de la serie y plantee una fórmula explícita para $f(x)$.

38. Si $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+4} = c_n$ para toda $n \geqslant 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

39. Muestre que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, donde $c \neq 0$, en tal caso el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ es $R = 1/c$.

40. Suponga que la serie de potencias $\Sigma\, c_n(x - a)^n$ satisface $c_n \neq 0$ para toda n. Demuestre que si existe $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$, por lo tanto es igual al radio de convergencia de la serie de potencias.

41. Suponga que el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, (c_n + d_n)x^n$?

42. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^{2n}$?

11.9 REPRESENTACIONES DE LAS FUNCIONES COMO SERIES DE POTENCIAS

En esta sección aprenderá a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias mediante la manipulación de series geométricas, o mediante derivación o integración de dichas series. Quizá se pregunte por qué siempre se busca expresar una función conocida como una suma de una cantidad infinita de términos. Más adelante se explica la utilidad de esta estrategia en la integración de funciones que no tienen antiderivadas elementales, en la solución de ecuaciones diferenciales y para aproximar funciones mediante polinomios. (Los científicos lo hacen así para simplificar las expresiones con las que trabajan; los especialistas en computación lo hacen así para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Inicie con una ecuación que estudió antes:

1 $$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

■ Una ilustración geométrica de la ecuación 1 se muestra en la figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales

$$\frac{1}{1 - x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Observe que cuando n se incrementa, $s_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para $f(x)$ en $-1 < x < 1$.

Ya encontró esta ecuación en el ejemplo 5 de la sección 11.2, donde la obtuvo al observar que es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero en este caso la opinión es distinta. Ahora considere la ecuación 1 como expresión de la función $f(x) = 1/(1 - x)$ como una suma de una serie de potencias.

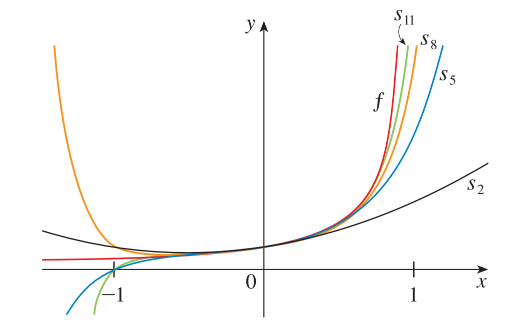



FIGURA 1
$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ y algunas sumas parciales

■ Cuando se pide una serie de potencias en esta sección, se supone que la serie está centrada en 0, a menos que se indique de otra forma.

V EJEMPLO 1 Exprese $1/(1+x^2)$ como la suma de una serie de potencias, y determine el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Al reemplazar x por $-x^2$ en la ecuación 1, queda

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como es una serie geométrica, es convergente cuando $|-x^2| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o bien, $|x| < 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Naturalmente, podría haber determinado el radio de convergencia aplicando la prueba de la razón, pero esa cantidad de trabajo es innecesaria en este caso. □

EJEMPLO 2 Determine una representación para $1/(x+2)$.

SOLUCIÓN Con objeto de poner esta función en la forma del lado izquierdo de la ecuación 1, primero se factoriza un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. De modo que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

EJEMPLO 3 Obtenga una representación como serie de potencias de $x^3/(x+2)$.

SOLUCIÓN Puesto que esta función es justamente x^3 veces la función del ejemplo 2, todo lo que debe hacer es multiplicar esa serie por x^3:

■ Es válido pasar x^3 al otro lado del signo de la suma porque no depende de n. [Aplique el teorema 11.2.8(i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n$$

Como en el ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Para ser capaces de derivar e integrar estas funciones, el siguiente teorema (el cual no será demostrado) establece que es posible hacerlo derivando o integrando cada uno de los términos de la serie, justo como se haría para un polinomio. Esto se denomina **derivación** e **integración término a término**.

2 TEOREMA Si la serie de potencias $\Sigma\, c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por lo tanto, continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$ y

(i) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

(ii) $$\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones (i) y (ii) son R.

■ En el inciso (ii), $\int c_0\,dx = c_0 x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, de modo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

NOTA 1 Las ecuaciones (i) y (ii) del teorema 2 se pueden volver a escribir en la forma

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

(iv) $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n\,dx$$

Se sabe que, por lo que toca a las sumas finitas, la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las ecuaciones (iii) y (iv) aseguran que lo mismo se cumple para sumas infinitas, siempre que esté trabajando con *series de potencias*. (En el caso de otros tipos de series de funciones la situación no es tan simple; véase ejercicio 36.)

NOTA 2 Aunque el teorema 2 establece que el radio de convergencia es el mismo cuando una serie de potencias es derivada o integrada, esto no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Podría suceder que la serie original converja en el extremo, y que la serie derivada sea divergente aquí. (Véase ejercicio 37.)

NOTA 3 La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base de un método eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Estudiará este método en el capítulo 17.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 3 de la sección 11.8 vio que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

se define para toda x. De esta manera, de acuerdo con el teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra derivando término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$ □

V EJEMPLO 5 Exprese $1/(1 - x)^2$ como una serie de potencias derivando la ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Al derivar cada miembro de la ecuación

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se obtiene
$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Si quisiera podría reemplazar n por $n + 1$ y escribir la respuesta como

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n$$

De acuerdo con el teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, $R = 1$. □

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1 - x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observe que, excepto en el caso de un factor de -1, la derivada de esta función es $1/(1 - x)$. Por eso integre ambos miembros de la ecuación 1:

$$-\ln(1 - x) = \int \frac{1}{1 - x}\,dx = \int (1 + x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinar el valor de C haga $x = 0$ en esta ecuación y obtenga $-\ln(1 - 0) = C$. Por lo tanto, $C = 0$ y

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que el de la serie original: $R = 1$. □

Observe qué sucede si hace $x = \frac{1}{2}$ en el resultado del ejemplo 6. Puesto que $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$,

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

V EJEMPLO 7 Encuentre una representación como serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observe que $f'(x) = 1/(1 + x^2)$ y encuentre la serie requerida integrando la serie de potencias para $1/(1 + x^2)$ determinada en el ejemplo 1.

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

■ La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el ejemplo 7 se llama serie de Gregory en honor al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien pronosticó algunos de los descubrimientos de Newton. Ya se demostró que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta que (aunque no es fácil de demostrar) también es válida cuando $x = \pm 1$. Observe que cuando $x = 1$ la serie se transforma en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este admirable resultado se conoce como fórmula de Leibniz para π.

Para determinar C haga $x = 0$ y obtiene $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Por lo tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Puesto que el radio de convergencia de la serie para $1/(1 + x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1. □

EJEMPLO 8

(a) Evalúe $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

(b) Mediante el inciso (a) obtenga una aproximación de $\int_0^{0.5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ que no difiera en 10^{-7} del valor real.

SOLUCIÓN

(a) El primer paso es expresar la integral, $1/(1 + x^7)$, como la suma de una serie de potencias. Como en el ejemplo 1, inicie con la ecuación 1 y reemplace x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

■ Este ejemplo demuestra una manera útil de las representaciones como series de potencias. Integrar $1/(1 + x^7)$ a mano es increíblemente difícil. Diferentes sistemas algebraicos computacionales dan respuestas de distintas formas, pero son extremadamente complicadas. (Si tiene un CAS, inténtelo usted mismo.) La respuesta de la serie infinita que se obtiene en el ejemplo 8(a) es realmente mucho más fácil de manejar que la respuesta finita que proporciona un CAS.

Ahora integre término a término:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.

(b) Si aplica el teorema fundamental del cálculo no importa qué antiderivada use, de modo que utilice la antiderivada del inciso (a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante, puede obtener una aproximación de la suma aplicando el teorema de la estimación de la serie alternante. Si deja de sumar después del término $n = 3$, el error es menor que el término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

De modo que

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$ □

11.9 EJERCICIOS

1. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Suponga que sabe que la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la serie siguiente? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11–12 Exprese la función como la suma de una serie de potencias usando primero fracciones parciales. Determine el intervalo de convergencia.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

13. (a) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Por medio del inciso (a) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Mediante el inciso (b) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Determine una representación como serie de potencias para $f(x) = \ln(1+x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?
(b) Mediante el inciso (a) determine una serie de potencias para $f(x) = x\ln(1+x)$.
(c) Mediante el inciso (a) determine una serie de potencias para $f(x) = \ln(x^2+1)$

15–18 Encuentre una representación como serie de potencias para la función, y determine el radio de convergencia.

15. $f(x) = \ln(5-x)$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \arctan(x/3)$

19–22 Encuentre una representación como serie de potencias para f, y dibuje f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué sucede cuando n se incrementa?

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

20. $f(x) = \ln(x^2+4)$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

22. $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

23–26 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \tan^{-1}(x^2)\,dx$

27–30 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida con seis cifras decimales.

27. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1+x^4)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{0.1} x\arctan(3x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

31. A través del resultado del ejemplo 6, calcule ln 1.1 con cinco cifras decimales.

32. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el ejemplo 4) cumple con la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ con tres cifras decimales.

34. La función de Bessel de orden 1 se define con

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + xJ_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

36. Sea $f_n(x) = (\text{sen}\, nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ es convergente para todos los valores de x, pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ es divergente cuando $x = 2n\pi$, n es un entero. ¿Para qué valores de x la serie $\Sigma f_n''(x)$ es convergente?

37. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Determine los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

38. (a) Empezando con la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Calcule la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Determine la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Utilice la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar que la expresión siguiente para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Aplique el método de completar cuadrados para demostrar que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Mediante la factorización de $x^3 + 1$ como una suma de cubos, escriba de nuevo la integral del inciso (a). Luego exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la fórmula siguiente para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

En la sección anterior, se representaron como series de potencias una cierta clase restringida de funciones. En esta sección se tratan problemas más generales: ¿Qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿Cómo es posible hallar esa representación?

Empiece por suponer que f es cualquier función que se puede representar mediante una serie de potencias

1 $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Trate de determinar qué coeficientes c_n tienen que estar en función de f. Para empezar, observe que si hace $x = a$ en la ecuación 1, en tal caso todos los términos después del primero son 0 y obtiene

$$f(a) = c_0$$

De acuerdo con el teorema 11.9.2, puede derivar la serie de la ecuación 1 término a término:

2 $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y al sustituir $x = a$ en la ecuación 2 tiene

$$f'(a) = c_1$$

En seguida derive ambos miembros de la ecuación 2 y obtiene

3 $$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

Una vez más haga $x = a$ en la ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Aplique el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la ecuación 3 origina

4 $$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Ahora ya puede ver el patrón. Si continúa derivando y sustituyendo $x = a$, obtendrá

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Al resolver esta ecuación para el n-ésimo coeficiente c_n, tiene

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula sigue siendo válida incluso para $n = 0$ si adopta la convención de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. En estos términos, ha demostrado el teorema siguiente:

5 TEOREMA Si f se puede representar como una serie de potencias (expansión) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R$$

entonces sus coeficientes los da la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si sustituye esta fórmula de c_n de nuevo en la serie, observe que si f tiene un desarrollo en serie de potencias en a, después debe ser de la forma siguiente:

6 $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

TAYLOR Y MACLAURIN

■ La serie de Taylor lleva este nombre en honor al matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se llama así para recordar al matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es realmente un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y el matemático escocés James Gregory conoció la serie general de Taylor en 1668 y el matemático suizo John Bernoulli la conoció por 1690. Al parecer, Taylor no conocía el trabajo de Gregory ni de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos relacionados con las series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así porque Colin Maclaurin las popularizó en su libro de texto *Treatise of Fluxions* que se publicó en 1742.

La serie de la ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función *f* en *a*** (o bien, **con respecto a *a*** o **centrada en *a***). Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se transforma en

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

Como este caso surge con bastante frecuencia, se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin.**

NOTA Ya se demostró que *si* f se puede representar como una serie de potencias con respecto a a, después f es igual a la suma de sus series de Taylor. Pero hay funciones que no son iguales a la suma de sus series de Taylor. Un ejemplo de tales funciones se presenta en el ejercicio 70.

EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por lo tanto, la serie de Taylor para f en 0, (es decir, la serie de Maclaurin), es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar el radio de convergencia haga $a_n = x^n/n!$ En tal caso

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

por esto, según la prueba de la razón, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$. □

La conclusión que obtiene del teorema 5 y el ejemplo 1 es que *si* e^x tiene un desarrollo de serie en potencias en 0, por lo tanto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por eso, ¿cómo se puede decir si e^x tiene una representación como serie de potencias?

Investigue la cuestión más general: ¿en qué circunstancias es una función igual a la suma de su serie de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuándo es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Como sucede con cualquier serie convergente, esto quiere decir que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

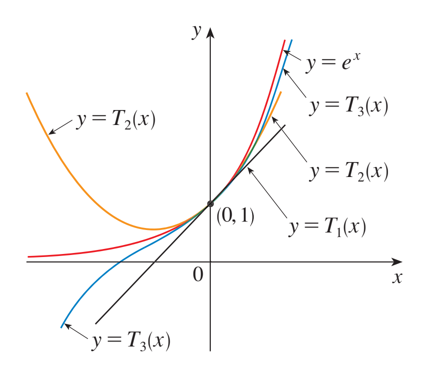


FIGURA 1

■ Cuando n se incrementa, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la figura 1. Esto hace pensar que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

Observe que T_n es un polinomio de grado n llamado **polinomio de Taylor de n-ésimo grado, de f en a.** Por ejemplo, en el caso de la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del ejemplo 1 muestra que los polinomios de Taylor en 0 (o polinomios de Maclaurin), con $n = 1$, 2 y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor se ilustran en la figura 1.

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si hace

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de modo que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si puede de alguna manera demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por lo tanto, ha demostrado lo siguiente:

8 TEOREMA Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, se usa por lo regular el hecho siguiente.

9 DESIGUALDAD DE TAYLOR Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Para entender por qué es cierto para $n = 1$, suponga que $|f''(x)| \leqslant M$. En particular, se tiene $f''(x) \leqslant M$, y de tal manera para $a \leqslant x \leqslant a + d$

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt$$

Una antiderivada de f'' es f', por lo que según la parte 2 del teorema fundamental del cálculo tenemos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x - a) \qquad \text{o bien,} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x - a)$$

■ Otras opciones aparte de la desigualdad de Taylor son las fórmulas siguientes para el residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua en un intervalo I y $x \in I$, por lo tanto

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esta expresión recibe el nombre de *forma integral del término del residuo*. Otra fórmula, que se llama *forma de Lagrange del término del residuo*, establece que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta versión es una generalización del teorema del valor medio, que es el caso $n = 0$).

Las demostraciones de estas fórmulas, además del análisis de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las secciones 11.10 y 11.11, se encuentran en la página web

www.stewartcalculus.com

Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series.*

En estos términos, $$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. De modo que

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Un razonamiento similar, aplicando $f''(x) \geqslant -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

De donde $$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Aunque hemos supuesto supuesto que $x > a$, cálculos similares muestran que esta desigualdad es válida también para $x < a$.

Esto demuestra la desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de manera parecida integrando $n + 1$ veces. (Véase el ejercicio 69 para el caso $n = 2$.)

NOTA En la sección 11.11 se explora el uso de la desigualdad de Taylor en funciones que se aproximan. Aquí, el uso inmediato es junto con el teorema 8.

Con frecuencia, al aplicar los teoremas 8 y 9 es útil recurrir al hecho siguiente.

10 $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Es verdadero porque de acuerdo con el ejemplo 1, la serie $\Sigma\, x^n/n!$ es convergente para toda x y de este modo su n-ésimo término se aproxima a 0.

V EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leqslant d$, después $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Por eso, la desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, establece que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, según la ecuación 10,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se infiere entonces del teorema de la compresión que el $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. De acuerdo con el teorema 8, e^x es igual a la suma de la serie de Maclaurin, es decir,

11 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x$$ □

■ En 1748, Leonhard Euler aplicó la ecuación 12 para determinar el valor de e con 23 dígitos decimales. En 2003 Shigeru Kondo, de nuevo usando la serie en (12), calculó e a más de 50,000 millones de lugares decimales. Las técnicas especiales que utilizaron para acelerar el cálculo se explican en la página web

www.numbers.computation.free.fr

En particular, si hace $x = 1$ en la ecuación 11, obtiene la expresión siguiente para el número e como una suma de una serie infinita:

12 $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Se tiene $f^{(n)}(2) = e^2$ y, de este modo, al hacer $a = 2$ en la definición de la serie de Taylor (6) obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

También se puede verificar, como en el ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Como en el ejemplo 2 puede comprobar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de modo que

13 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para toda } x$$ □

Hay dos desarrollos de series de potencias para e^x, la serie de Maclaurin de la ecuación 11 y la serie de Taylor de la ecuación 13. El primero es mejor si está interesado en valores de x cercanos a 0 y el segundo funciona muy bien si x es cercano a 2.

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa a sen x para toda x.

SOLUCIÓN Acomode los cálculos en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, puede escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

■ En la figura 2 se ilustra la gráfica de sen x junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para sen x.

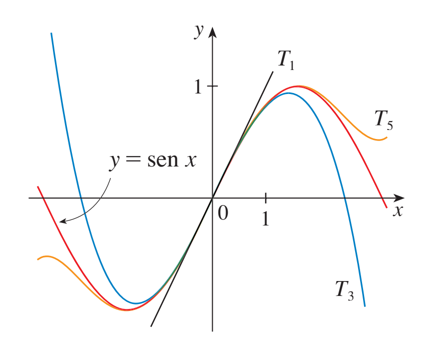


FIGURA 2

Puesto que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm$sen x o bien, $\pm$cos x, sabe que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para toda x. De este modo puede tomar a $M = 1$ en la desigualdad de Taylor

14 $$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De acuerdo con la ecuación 10 el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$, de modo que $|R_n(x)| \to 0$ según el teorema de compresión. Se infiere entonces que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que sen x es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8. □

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

15 $$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para toda } x$$

EJEMPLO 5 Determine la serie de Maclaurin para cos x.

SOLUCIÓN Podría proceder en forma directa como en el ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para sen x dada por la ecuación 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\text{sen}\, x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$
$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

■ La serie de Maclaurin para e^x, sen x y cos x que determinó en los ejemplos 2, 4 y 5 la descubrió Newton aplicando métodos distintos. Estas ecuaciones son notables porque se conoce todo con respecto a cada una de estas funciones si conoce todas sus derivadas en el número 0.

Puesto que la serie de Maclaurin para sen x converge para toda x, el teorema 2 de la sección 11.9 señala que la serie derivada para cos x converge también para toda x. En estos términos,

16 $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para toda } x$$
□

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x \cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para cos x, ecuación 16, por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$ □

EJEMPLO 7 Represente $f(x) = \text{sen}\, x$ como la suma de su serie de Taylor centrada en $\pi/3$.

SOLUCIÓN Primero acomode los valores en columnas

$$f(x) = \text{sen } x \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\text{sen } x \qquad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

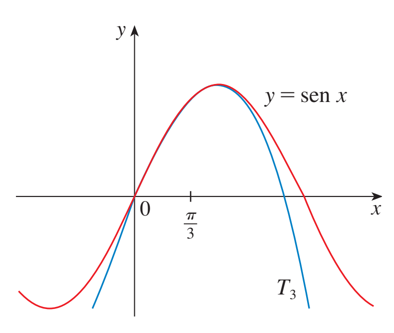
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

y este patrón se repite en forma indefinida. Por lo tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

■ Ha obtenido dos diversas series de representaciones para sen x, la serie de Maclaurin en el ejemplo 4 y la serie de Taylor en el ejemplo 7. Es mejor utilizar la serie de Maclaurin para los valores de x cerca a 0 y la serie de Taylor para x cerca a $\pi/3$. Observe que el tercer polinomio de Taylor T_3 en la figura 3 es una buena aproximación al sen x cerca de $\pi/3$, mas no así cerca de 0. Compárelo con el tercer polinomio de Maclaurin T_3 en la figura 2, donde está el polinomio opuesto verdadero.



La demostración de que esta serie representa sen x para toda x es muy similar a la del ejemplo 4. [Sólo reemplace x por $x - \pi/3$ en (14).] Puede escribir la serie con la notación sigma o suma si separamos los términos que contienen $\sqrt{3}$:

$$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$ □

La serie de potencias obtenidas mediante métodos indirectos en los ejemplos 5 y 6 y en la sección 11.9 son realmente la serie de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el teorema 5 así lo establece, ya que no importa cómo una representación de una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$ se obtenga, siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ En otras palabras, la determinación de los coeficientes es única.

En la tabla siguiente están reunidas, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin deducidas en esta sección y en la anterior.

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Al ordenar el trabajo en columnas

$$f(x) = (1 + x)^k \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = k(1 + x)^{k-1} \qquad f'(0) = k$$

$$f''(x) = k(k-1)(1 + x)^{k-2} \qquad f''(0) = k(k-1)$$

$$f'''(x) = k(k-1)(1 + 2)(1 + x)^{k-3} \qquad f'''(0) = k(k-1)(k-2)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = k(k-1)\cdots(k-n+1)(1 + x)^{k-n} \qquad f^{(n)}(0) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$$

Por lo tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n$$

Esta serie se denomina **serie binomial.** Si su n-ésimo término es a_n, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \left|\frac{k-n}{n+1}\right| |x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}} |x| \to |x| \quad \text{es } n \to \infty$$

Entonces, por la prueba de la razón, la serie binomial converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. □

La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

y los números se llaman **coeficientes del binomio.**

El siguiente teorema expresa que $(1+x)^k$ es igual a la suma de su serie Maclaurin. Es posible demostrar esto al probar que el término restante $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero esto resulta ser muy difícil. La prueba resumida en el ejercicio 71 es mucho más fácil.

17 SERIE BINOMIAL Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie binomial siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no en los extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos extremos si $k \geqslant 0$. Nótese que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k - k)$, de modo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Esto significa que la serie termina y reduce el teorema del binomio ordinario cuando k es un entero positivo. (Véase la página de referencia 1.)

V EJEMPLO 9 Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Escriba $f(x)$ de forma que pueda usar la serie binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Y al usar la serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$ y donde x fue reemplazada por $-x/4$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1 \cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabe de (17) que esta serie converge con $|-x/4| < 1$, es decir, $|x| < 4$, de modo que el radio de convergencia es $R = 4$. □

En la tabla siguiente están reunidas, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin que ha deducido en esta sección y en la anterior..

TABLA 1

Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia.

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \dfrac{k(k-1)}{2!}x^2 + \dfrac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

TEC Module 11.10/11.11 permite ver cómo polinomios sucesivos de Taylor se aproximan a la función original.

Una razón de que las series de Taylor sean importantes, es que permiten integrar funciones que no se podían manejar antes. En efecto, en la introducción de este capítulo mencionamos que Newton integraba a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, y que después integraba la serie término a término. No es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ por medio de las técnicas conocidas hasta este momento, porque su antiderivada no es una función elemental (véase sección 7.5). En el ejemplo siguiente se aplica la idea de Newton para integrar esta función.

V EJEMPLO 10

(a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.

(b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ de tal manera que no difiera 0.001 del valor real.

SOLUCIÓN

(a) Primero encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Aunque es posible usar el método directo, determinémosla simplemente mediante el reemplazo de x con $-x^2$ en la serie de e^x dada en la tabla 1. Por esto, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora integre término a término

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

(b) El teorema fundamental del cálculo

■ Es posible hacer $C = 0$ en la antiderivada del inciso (a).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

El teorema de estimación de la serie alternante demuestra que el error que hay en esta aproximación es menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$ □

Otra aplicación de la serie de Taylor se ilustra en el ejemplo siguiente. El límite podría ser calculado con la regla de l'Hospital, pero en lugar de hacerlo así se recurre a las series.

EJEMPLO 11 Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Al utilizar la serie de Maclaurin para e^x

■ Algunos sistemas algebraicos computacionales calculan los límites de esta manera.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque las series de potencias son funciones continuas. □

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Si las series de potencias se suman o restan, se comportan como polinomios; (el teorema 11.2.8 lo ilustra). En efecto, como lo ilustra el ejemplo siguiente, las series también se pueden multiplicar y dividir como los polinomios. Primero determine los primeros términos porque los cálculos para los siguientes se vuelven tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 12 Calcule los primeros tres términos no cero de la serie de Maclaurin para (a) e^x sen x y (b) tan x.

SOLUCIÓN

(a) Mediante la serie de Maclaurin para e^x y sen x en la tabla 1

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Al multiplicar esta expresión y agrupar por términos semejantes, al igual que con los polinomios:

$$\begin{array}{r} 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\ x \qquad\quad - \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots \\ \hline x + \;\; x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{6}x^4 + \cdots \\ - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4 - \cdots \\ \hline x + \;\; x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots \qquad\quad \end{array}$$

Así, $$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Al utilizar la serie de Maclaurin en la tabla 1

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Aplique un procedimiento como el de la división larga

$$\begin{array}{r|l} & x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \hline 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 - \cdots \\ & x - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{24}x^5 - \cdots \\ \hline & \quad \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x^5 + \cdots \\ & \quad \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x^5 + \cdots \\ \hline & \qquad\qquad \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots \end{array}$$

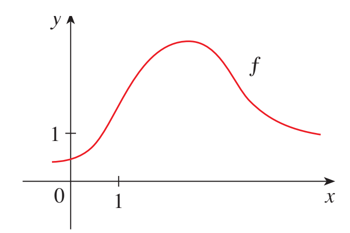
Por consiguiente, $$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$ □

No se ha intentado justificar las manipulaciones formales que se utilizaron en el ejemplo 12, pero son legítimas. Hay un teorema que establece que si tanto $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ como $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, en tal caso la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)g(x)$. En cuanto a la división es necesario que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

11.10 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se proporciona la gráfica de f.



(a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

(b) Explique por qué la serie

$$2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5–12 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$ **6.** $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ **8.** $f(x) = \cos 3x$

9. $f(x) = e^{5x}$ **10.** $f(x) = xe^x$

11. $f(x) = \operatorname{senh} x$ **12.** $f(x) = \cosh x$

13–20 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo de serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.]

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$

14. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$

15. $f(x) = e^x, \quad a = 3$ **16.** $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

17. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$ **18.** $f(x) = \operatorname{sen} x, \; a = \pi/2$

19. $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 9$ **20.** $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1$

21. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 7 representa sen πx para toda x.

22. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa sen x para toda x.

23. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 11 representa senh x para toda x.

24. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 12 representa cosh x para toda x.

25–28 Use la serie binomial para expandir la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

25. $\sqrt{1+x}$ **26.** $\dfrac{1}{(1+x)^4}$

27. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$ **28.** $(1-x)^{2/3}$

29–38 Utilice la serie de Maclaurin que paracere en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

29. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ **30.** $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$ **32.** $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x\cos(\frac{1}{2}x^2)$ **33.** $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x)^3$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ **36.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [*Sugerencia*: utilice $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

39–42 Determine la serie de Maclaurin de f (mediante cualquier método), y su radio de convergencia. Dibuje f y sus primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa con respecto a la correspondencia entre estos polinomios y f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$ **40.** $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$ **42.** $f(x) = 1\text{n}(1 + x^2)$

43. Mediante la serie de Maclaurin para e^x calcule $e^{-0.2}$ con cinco posiciones decimales.

44. Utilice la serie de Maclaurin para sen x a fin de calcular sen 3° con cinco posiciones decimales.

45. (a) Use la serie binomial para expandir $1/\sqrt{1 - x^2}$
(b) Use la parte (a) para hallar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1}x$.

46. (a) Expanda $1/\sqrt[4]{1 + x}$ como una serie de potencias.
(b) Use el inciso (a) para estimar correctamente $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con tres posiciones decimales.

47–50 Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

47. $\int x \cos(x^3)\, dx$

48. $\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$

49. $\int \frac{\cos x - 1}{x}\, dx$

50. $\int \arctan(x^2)\, dx$

51–54 Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

51. $\int_0^1 x \cos(x^3)\, dx$ (tres decimales);

52. $\int_0^{0.2} [\tan^{-1}(x^3) + \operatorname{sen}(x^3)]\, dx$ (cinco decimales)

53. $\int_0^{0.4} \sqrt{1 + x^4}\, dx$ $(|\text{error}| < 5 \times 10^{-6})$

54. $\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2}\, dx$ $(|\text{error}| < 0.001)$

55–57 Mediante las series evalúe el límite.

55. $\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan^{-1}x}{x^3}$

56. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$

57. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

58. Utilice la serie del ejemplo 12(b) para evaluar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$$

Este límite se calculó en el ejemplo 4 de la sección 4.4 utilizando la regla de l'Hospital tres veces. ¿Cuál método prefiere?

59–62 Utilice la multiplicación o la división de series de potencias para determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

59. $y = e^{-x^2} \cos x$

60. $y = \sec x$

61. $y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$

62. $y = e^x \ln(1 - x)$

63–68 Calcule la suma de la serie.

63. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}$

64. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n + 1)!}$

66. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

67. $3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \cdots$

68. $1 - \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} - \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots$

69. Demuestre la desigualdad de Taylor para $n = 2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, en tal caso

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x - a|^3 \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

70. (a) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es igual a la serie de Maclaurin.
(b) Dibuje la función del inciso (a) y comente su comportamiento cerca del origen.

71. Use los pasos siguientes para demostrar (17).
(a) Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1 + x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Sea $h(x) = (1 + x)^{-k} g(x)$ y demuestre que $h'(x) = 0$.
(c) Deduzca que $g(x) = (1 + x)^k$.

72. En el ejercicio 53 de la sección 10.2 se demostró que la longitud de la elipse $x = a \operatorname{sen} \theta$, $y = b \cos \theta$, donde $a > b > 0$, es

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta$$

donde $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. Expanda el integrando como serie binomial y use el resultado del ejercicio 46 de la sección 7.1 para expresar L como una serie en potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.

PROYECTO DE LABORATORIO

CAS UN LÍMITE ESCURRIDIZO

Este proyecto es sobre la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)}$$

1. Utilice su sistema algebraico computacional para evaluar $f(x)$ para $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$, y 0.0001. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
2. Use el CAS para dibujar f cerca de $x = 0$. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
3. Intente evaluar $\lim_{x\to 0} f(x)$ con la regla de l'Hospital, usando el CAS para hallar las derivadas del numerador y el denominador. ¿Qué descubrió? ¿Cuántas aplicaciones de la regla de l'Hospital se requieren?
4. Evalúe $\lim_{x\to 0} f(x)$ con ayuda del CAS para encontrar la cantidad suficiente de términos de la serie de Taylor del numerador y el denominador. (Utilice el comando `taylor` en Maple o `Series` en Mathematica).
5. Utilice el comando límite en su CAS para calcular directamente $\lim_{x\to 0} f(x)$ (La mayor parte de los sistemas algebraicos computacionales utilizan el método del problema 4 para calcular límites.)
6. En vista de las respuestas a los problemas 4 y 5, ¿cómo explica los resultados de los problemas 1 y 2?

REDACCIÓN DE PROYECTO

CÓMO DESCUBRIÓ NEWTON LA SERIE BINOMIAL

El Teorema Binomial, que proporciona el desarrollo de $(a + b)^k$, ya lo conocían los matemáticos chinos muchos siglos antes de que naciera Newton, en especial para el caso donde el exponente k es un entero positivo. En 1665, cuando Newton tenía 22 años, descubrió por primera vez el desarrollo de la serie infinita $(a + b)^k$ cuando k es un exponente fraccionario, positivo o negativo. No publicó sus descubrimientos, pero los planteó y proporcionó ejemplos de cómo usarlos en una carta de fecha 13 de junio de 1676, carta que (ahora se llama *epistola prior*), que envió a Henry Oldenburg, secretario de la *Royal Society of London*, para que la transmitiera a Leibniz. Cuando éste contestó, le preguntó a Newton cómo había descubierto las series binomiales. Newton escribió una segunda carta, la *epistola posterior,* del 24 de octubre de 1676, en la cual explica con lujo de detalles la manera como llegó a su descubrimiento mediante una ruta muy indirecta. Estaba investigando las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Son fáciles de calcular si n es par. Al observar patrones y al interpolar, Newton fue capaz de adivinar las respuestas de valores impares de n. Por lo tanto se dio cuenta de que podía obtener las mismas respuestas expresando $(1 - x^2)^{n/2}$ como una serie infinita.

Escriba un ensayo sobre el descubrimiento de Newton. Inicie dando el enunciado de serie binomial en la notación de Newton (véase *epistola prior* en la página 285 de [4] o la página 402 de [2]). Explique por qué la versión de Newton es equivalente al teorema 17 de la página 742. Luego lea la *epistola posterior* de Newton (página 287 de [4] o página 404 de [2]) y explique los patrones que descubrió Newton en las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Muestre cómo podía él calcular el área bajo las curvas restantes y cómo comprobó su respuesta. Para finalizar, explique cómo estos descubrimientos llevaron a las series binomiales. Los libros de Edwards [1] y Katz [3] contienen comentarios de las cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, pp. 178-187.
2. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: HarperCollins, 1993, pp. 463-466.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

11.11 APLICACIONES DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR

En esta sección se exploran dos tipos de aplicaciones de los polinomios de Taylor. Primero se examina cómo se usan para aproximar funciones; a los científicos de la computación les gustan porque los polinomios son los más sencillos de las funciones. Luego investigamos cómo los físicos y los ingenieros los usan en campos como la relatividad, óptica, radiación de cuerpos negros, dipolos eléctricos, la velocidad de las ondas en el agua y la construcción de carreteras en el desierto.

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE POLINOMIOS

Suponga que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

En la sección 11.10 se presentó la notación $T_n(x)$ para la n-ésima suma parcial de esta serie y se le llamó polinomio de n-ésimo grado de Taylor de f en a. Así,

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Puesto que f es la suma de su serie de Taylor, sabe que $T_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ y de este modo T_n se puede usar como una aproximación de f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que el polinomio de primer grado de Taylor

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

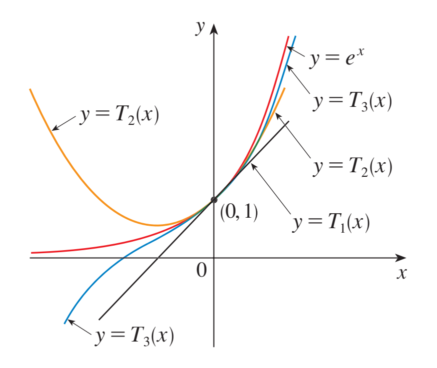


FIGURA 1

es lo mismo que la linealización de f en a que estudió en la sección 3.10. Note también que T_1 y su derivada tienen los mismos valores en a que f y f'. En general, se puede demostrar que las derivadas de T_n en a concuerdan con las de f hasta las derivadas de orden n, inclusive (véase ejercicio 38).

Con el fin de ilustrar estas ideas, vea una vez más las gráficas de $y = e^x$ y sus primeros polinomios de Taylor, como se ilustran en la figura 1. La gráfica de T_1 es la tangente a $y = e^x$ en (0, 1); esta tangente es la mejor aproximación lineal a e^x cerca de (0, 1). La gráfica de T_2 es la parábola $y = 1 + x + x^2/2$, y la gráfica de T_3 es la curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es un ajuste más cercano a la curva exponencial $y = e^x$ que T_2. El polinomio siguiente de Taylor T_4 sería una aproximación mejor, y así sucesivamente.

	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

Los valores de la tabla proporcionan una demostración numérica de la convergencia de los polinomios de Taylor $T_n(x)$ a la función $y = e^x$. Cuando $x = 0.2$ la convergencia es muy rápida, pero cuando $x = 3$ es un poco más lenta. De hecho, entre más lejos esté x de 0 es un poco más lenta. $T_n(x)$ converge más despacio hacia e^x.

Cuando usa un polinomio de Taylor T_n para aproximar una función f, debe preguntarse: ¿qué tan buena es una aproximación? ¿Qué tan grande quiere que sea n con objeto de que alcance una precisión deseada? Para responder estas preguntas, es necesario que examine el valor absoluto del residuo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Hay tres métodos posibles para estimar el tamaño del error:

1. Si cuenta con una calculadora que trace gráficas o una computadora, la puede usar para dibujar $|R_n(x)|$ y de ahí estimar el error.

2. Si sucede que la serie es alternante, puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante.

3. En todos los casos puede aplicar la desigualdad de Taylor (Teorema 11.10.9), el cual establece que si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, por lo tanto

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

V EJEMPLO 1

(a) Obtenga una aproximación de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por medio del polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 8$.

(b) ¿Qué tan exacta es esta aproximación cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUCIÓN

(a)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \qquad f(8) = 2$$
$$f'(x) = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f'(8) = \tfrac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f''(8) = -\tfrac{1}{144}$$
$$f'''(x) = \tfrac{10}{27}x^{-8/3}$$

En estos términos, el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$T_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2$$
$$= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

La aproximación deseada es

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) La serie de Taylor no es alternante cuando $x < 8$, de modo que no puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante en este ejemplo. Pero sí puede usar la desigualdad de Taylor con $n = 2$ y $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

donde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, tiene $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ y de esa manera

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

Por lo tanto, puede hacer $M = 0.0021$. Asimismo, $7 \leqslant x \leqslant 9$, de modo que $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ y $|x-8| \leqslant 1$. Después la desigualdad de Taylor da

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

En estos términos, si $7 \leqslant x \leqslant 9$, la aproximación en el inciso (a) no difiere en más de 0.0004 del valor real. □

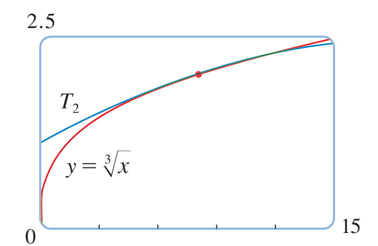


FIGURA 2

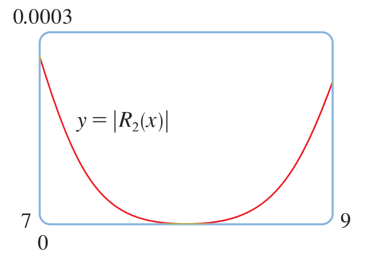


FIGURA 3

Con la ayuda de una calculadora para trazar gráficas o de una computadora compruebe el cálculo del ejemplo 1. En la figura 2 se muestra que las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = T_2(x)$ están muy cercanas entre sí cuando x está cerca de 8. En la figura 3 se ilustra la gráfica de $|R_2(x)|$ calculada a partir de la expresión

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

A partir de la gráfica:

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Así, la estimación de error mediante métodos gráficos es ligeramente mejor que cuando se hace a partir de la desigualdad de Taylor, en este caso.

V EJEMPLO 2

(a) ¿Cuál es el error máximo posible al utilizar la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

cuando $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$? Utilice esta aproximación para calcular sen 12° con seis cifras decimales.

(b) ¿Para qué valores de x esta aproximación no difiere en más de 0.00005 del valor real?

SOLUCIÓN

(a) Observe que la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

es alternante para todos los valores no cero de x, y los términos sucesivos decrecen en tamaño porque $|x| < 1$, de modo que puede usar el teorema de estimación de la serie alternante. El error en la aproximación de sen x por medio de los tres términos de su serie de Maclaurin es cuando mucho

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$$

Si $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$, entonces $|x| \leqslant 0.3$, de modo que el error es más pequeño que

$$\frac{(0.3)^7}{5040} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

Para calcular sen 12° primero convierta a radianes.

$$\operatorname{sen} 12° = \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3 \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5 \frac{1}{5!} \approx 0.20791169$$

Por esto, con seis dígitos decimales, sen 12° ≈ 0.207912.

(b) El error será menor que 0.00005 si

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0.00005$$

Al resolver la desigualdad y encontrar x

$$|x|^7 < 0.252 \qquad \text{o bien,} \qquad |x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$$

De modo que la aproximación dada no difiere en más de 0.00005 cuando $|x| < 0.82$. □

TEC En Module 11.10/11.11 se muestran en forma gráfica los residuos de las aproximaciones de los polinomios de Taylor.

¿Qué sucede si recurre a la desigualdad de Taylor para resolver el ejemplo 2? Puesto que $f^{(7)}(x) = -\cos x$, tiene $|f^{(7)}(x)| \leqslant 1$ y de esa manera

$$|R_6(x)| \leqslant \frac{1}{7!}|x|^7$$

De este modo llegamos a la misma estimación que con el teorema de la estimación de la serie alternante.

¿Qué hay con respecto a los métodos gráficos? En la figura 4 se ilustra la gráfica de

$$|R_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

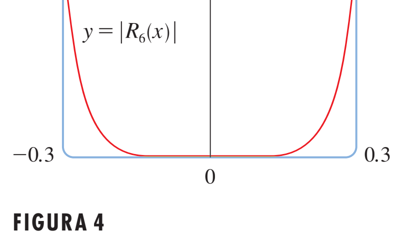


FIGURA 4

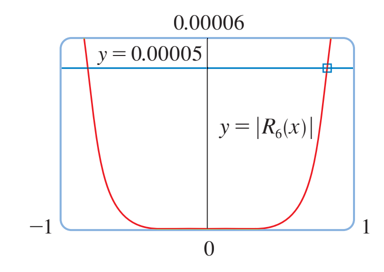


FIGURA 5

y observe que $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$ cuando $|x| \leqslant 0.3$. Es la misma estimación que obtuvo en el ejemplo 2. En el caso del inciso (b) quiere $|R_6(x)| < 0.00005$, de modo que dibuja tanto $y = |R_6(x)|$ como $y = 0.00005$ en la figura 5. Si coloca el cursor en el punto de intersección derecho, verá que la desigualdad se cumple cuando $|x| < 0.82$. Una vez más llega a la misma estimación que obtuvo en la solución del ejemplo 2.

Si se hubiera pedido que aproximara sen 72° en lugar de sen 12° en el ejemplo 2, habría sido prudente utilizar los polinomios de Taylor en $a = \pi/3$ (en lugar de $a = 0$), porque son mejores aproximaciones de sen x para valores de x cercanos a $\pi/3$. Observe que 72° es cercano a 60°, es decir, $\pi/3$ radianes, y las derivadas de sen x son fáciles de calcular en $\pi/3$.

La figura 6 muestra las gráficas de las aproximaciones de los polinomios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad\qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

a la curva seno. Puede ver que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ es una buena aproximación a sen x en un intervalo más y más grande.

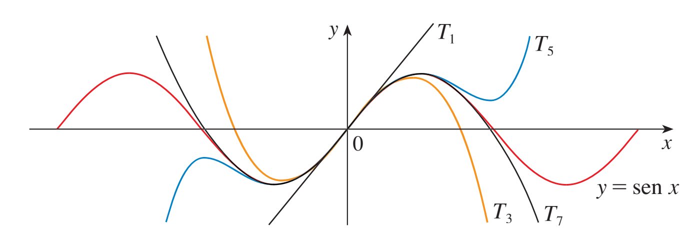


FIGURA 6

Las calculadoras y computadoras aplican el tipo de cálculo hecho en los ejemplos 1 y 2. Por ejemplo, cuando usted presiona la tecla sen o e^x de su calculadora, o bien, cuando un programador de computadoras utiliza una subrutina en el caso de una función trigonométrica o exponencial o de Bessel, en muchas máquinas se calcula una aproximación polinomial. Con frecuencia, el polinomio es uno de Taylor que ha sido modificado de modo que el error se extiende más uniformemente en todo el intervalo.

APLICACIONES EN LA FÍSICA

Los polinomios de Taylor también se usan con mucha frecuencia en la física. Con objeto de entender una ecuación, los físicos simplifican a menudo una función considerando sólo los dos o tres términos de su serie de Taylor. En otras palabras, los físicos usan un polino-

mio de Taylor como una aproximación de la función. La desigualdad de Taylor se puede usar para medir la exactitud de la aproximación. En el ejemplo siguiente, se muestra una manera en la cual esta idea se usa en la relatividad especial.

V EJEMPLO 3 En la teoría de Einstein de la relatividad especial, la masa de un objeto que se desplaza con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Demuestre que cuando v es muy pequeña comparada con c, esta expresión para K concuerda con la física clásica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Aplique la desigualdad de Taylor para estimar la diferencia en estas expresiones para K cuando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUCIÓN

(a) Mediante las expresiones dadas para K y m obtiene

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$

$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

■ La curva superior de la figura 7 es la gráfica de la expresión de la energía cinética K de un objeto con velocidad v en la relatividad especial. La curva inferior muestra la función usada para K en la física clásica newtoniana. Cuando v es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, las curvas son prácticamente idénticas.

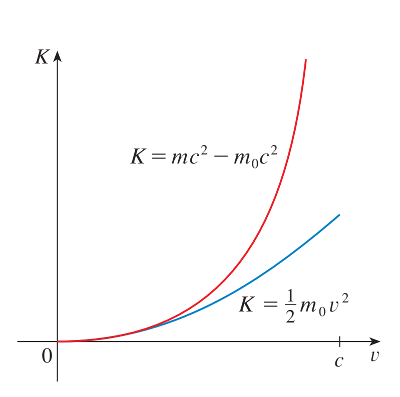


FIGURA 7

Con $x = -v^2/c^2$, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ es más fácil de calcular que una serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por lo tanto

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots$$

y

$$K = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right]$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$$

Si v es mucho más pequeña que c, entonces todos los términos después del primero son muy pequeños cuando se les compara con el primer término. Si los omite, obtiene

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Si $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$ y M es un número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, entonces aplica la desigualdad de Taylor para escribir

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Tiene $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ y sabe que $|v| \leqslant 100$ m/s, de modo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Así, con $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

De modo que cuando $|v| \leqslant 100$ m/s, la magnitud del error al usar la expresión newtoniana para la energía cinética es cuanto mucho $(4.2 \times 10^{-10})m_0$. □

Estos conceptos también se aplican en el campo de la óptica. La figura 8 es una adaptación de *Optics*, 4a. ed. de Eugene Hecht, Reading, MA: Addison-Wesley, 2002, p. 153. Representa una onda de la fuente puntual S que se encuentra una interfaz esférica de radio R centrado en C. El rayo SA se refracta hacia P.

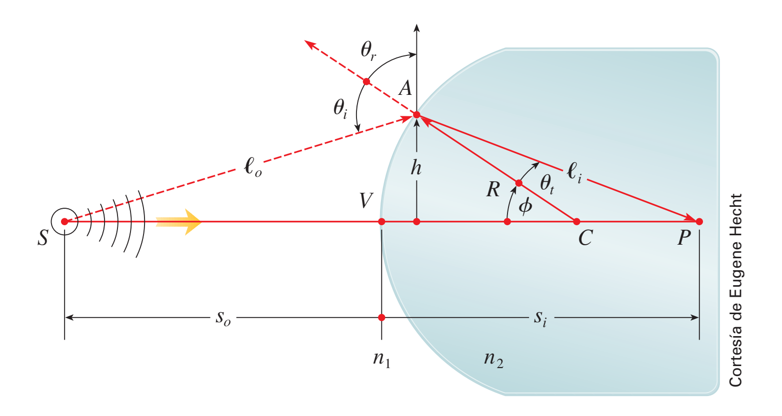


FIGURA 8
Refracción en una interfaz esférica

Al aplicar el principio de Fermat de que la luz viaja en el menor tiempo posible, Hecht deduce la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

donde n_1 y n_2 son índices de refracción y ℓ_o, ℓ_i, s_o y s_i son las distancias indicadas en la figura 8. De acuerdo con la ley de los cosenos aplicada en los triángulos ACS y ACP, tiene

■ En este caso utilice la identidad

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

$$\boxed{2} \qquad \ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

Como es un poco complicado trabajar con la ecuación 1, Gauss, en 1841, la simplificó usando la aproximación lineal $\cos\phi \approx 1$ para valores pequeños de ϕ. (Esto equivale a usar el polinomio de Taylor de grado 1.) Por lo tanto la ecuación se transforma en la siguiente ecuación más sencilla, que se le pide demostrar en el ejercicio 34(a):

$$\boxed{3} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de Gauss* u *óptica de primer orden*, y se ha vuelto la herramienta teórica básica para diseñar lentes.

Una teoría más exacta se obtiene al aproximar $\cos\phi$ por medio de su polinomio de Taylor de grado 3 (que es el mismo que el polinomio de Taylor de grado 2). Esto considera los rayos para los cuales ϕ no es tan pequeña, es decir, rayos que golpean la superficie

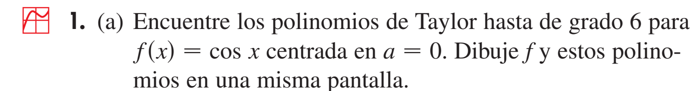
a mayores distancias h por arriba del eje. En el ejercicio 34(b) se le pide usar esta aproximación para deducir la ecuación más exacta

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right] \qquad \boxed{4}$$

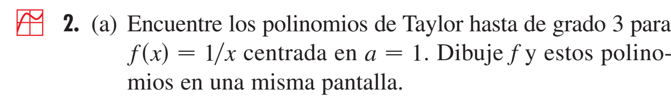
La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de tercer orden.*

Otras aplicaciones de los polinomios de Taylor a la física y la ingeniería se exploran en los ejercicios 32, 33, 35, 36 y 37 y en el proyecto de aplicación de la página 757.

11.11 EJERCICIOS



1. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 6 para $f(x) = \cos x$ centrada en $a = 0$. Dibuje f y estos polinomios en una misma pantalla.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/4$, $\pi/2$ y π.
(c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen en $f(x)$.



2. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 3 para $f(x) = 1/x$ centrada en $a = 1$. Dibuje f y estos polinomios en una misma pantalla.
(b) Evalúe f y estos polinomios en $x = 0.9$ y 1.3.
(c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen en $f(x)$.

3–10 Determine los polinomios de Taylor $T_n(x)$ para la función f en el número a. Dibuje f y T_n en la misma pantalla.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$

4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$

5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$

6. $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x, \quad a = 0$

7. $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad a = 0$

8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad a = 1$

9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$

10. $f(x) = \tan^{-1}x, \; a = 1$

11–12 Use un sistema algebraico computacional para encontrar los polinomios de Taylor T_n con centro en a para $n = 2, 3, 4, 5$. Luego dibuje estos polinomios y f en la misma pantalla.

11. $f(x) = \cot x, \quad a = \pi/4$

12. $f(x) = \sqrt[3]{3 + x^2}, \quad n = 0$

13–22
(a) Encuentre un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor con grado n en el número a.
(b) Con la desigualdad de Taylor estime la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x está en el intervalo dado.
(c) Compruebe el resultado del inciso (b) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4.2$

14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.8 \leqslant x \leqslant 1.2$

16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \leqslant x \leqslant 0.2$

18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.1$

20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

23. Mediante la información del ejercicio 5 estime cos 80° con cinco cifras decimales.

24. Mediante la información del ejercicio 16 estime sen 38° con cinco cifras decimales.

25. Aplique la desigualdad de Taylor para determinar el número de términos de la serie de Maclaurin para e^x que se debe usar para estimar $e^{0.1}$ de tal manera que no difiera de 0.00001 del valor real.

26. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ son necesarios para estimar ln 1.4 con 0.001 de precisión?

27–29 Aplique el teorema de estimación de la serie alternante o la desigualdad de Taylor para estimar los valores de x para los cuales la aproximación dada es exacta y está dentro del error establecido. Compruebe gráficamente su respuesta.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{error}| < 0.01)$

28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{error}| < 0.005)$

29. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{error}| < 0.005)$

30. Suponga que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

y la serie de Taylor de f con centro en 4 converge a $f(x)$ para toda x en el intervalo de convergencia. Demuestre que el polinomio de Taylor de quinto grado aproxima $f(5)$ con error menor a 0.0002.

31. Un vehículo se desplaza a una velocidad de 20 m/s y a una aceleración de 2 m/s^2 en un instante dado. Mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, estime qué tanto se desplazará el automóvil en el siguiente segundo. ¿Sería razonable utilizar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el minuto siguiente?

32. La resistividad ρ de un conductor es el recíproco de la conductividad y se mide en unidades ohm-metros (Ω-m). La resistividad de un metal dado depende de la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura en °C. Hay tablas que dan los valores de α (llamado coeficiente de temperatura) y ρ_{20} (la resistividad a 20°C) para varios metales. Excepto a temperaturas muy bajas, la resistividad varía casi en forma lineal con la temperatura, por lo que es común aproximar la expresión para $\rho(t)$ mediante su polinomio de Taylor de primero o segundo grados en $t = 20$.

(a) Encuentre expresiones para estas aproximaciones lineales y cuadráticas.

(b) Por lo que se refiere al cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039$/°C y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Dibuje la resistividad del cobre y las aproximaciones lineales y cuadráticas para $-250°$ C $\leqslant t \leqslant 1000$°C.

(c) ¿Para qué valores de t la aproximación lineal concuerda con la expresión exponencial de tal manera que no difiera 1% del valor real?

33. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos opuestos. Si las cargas son q y $-q$ y hay una distancia d entre ellas, en tal caso el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

Al expandir esta expresión para E como serie en potencias de d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$ cuando P está alejada del dipolo.



34. (a) Deduzca la ecuación 3 para la óptica de Gauss a partir de la ecuación 1 aproximando cos ϕ en la ecuación 2 mediante su polinomio de Taylor de primer grado.

(b) Demuestre que si cos ϕ es reemplazado por su polinomio de Taylor de tercer grado en la ecuación 2, en tal caso la ecuación 1 se transforma en la ecuación 4 para una óptica de tercer orden. [*Sugerencia:* utilice los dos primeros términos de la serie binomial para ℓ_o^{-1} y ℓ_i^{-1}. Aplique también $\phi \approx$ sen ϕ.]

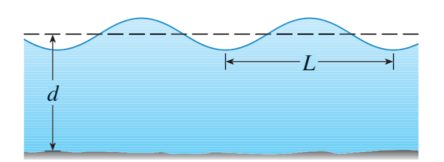
35. Si una onda de agua de longitud L se desplaza con una velocidad v a través de un cuerpo de agua de profundidad d como en la figura, por lo tanto

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Si el agua es profunda, demuestre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

(b) Si el agua es poco profunda, aplique la serie de Maclaurin para tanh para demostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Así, en agua poco profunda, la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de la onda).

(c) Mediante el teorema de estimación de la serie alternante, demuestre que si $L > 10d$, entonces la estimación $v^2 \approx gd$ es exacta dentro de $0.014gL$.



36. El periodo de un péndulo con longitud L que subtiende un ángulo máximo θ_0 con la vertical es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. En el ejercicio 40 de la sección 7.7 se aproximó esta integral usando la regla de Simpson.

(a) Desarrolle el integrando como una serie binomial y use el resultado del ejercicio 46 de la sección 7.1 para demostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Si θ_0 no es demasiado grande, se usa a menudo la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtenida usando sólo el primer término de la serie. Se obtiene una mejor aproximación si se usan sólo dos términos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos los términos de la serie después del primero tienen coeficientes que son cuanto mucho $\frac{1}{4}$. Aplique este hecho para comparar esta serie con una serie geométrica y demuestre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leqslant T \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Mediante las desigualdades del inciso (b), estime el periodo de un péndulo con $L = 1$ m y $\theta_0 = 10°$. ¿Cómo es si se le compara con la estimación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? ¿Cómo es si $\theta_0 = 42°$?

37. Si un topógrafo mide diferencias en la altitud cuando hace planos para una carretera que cruza un desierto, se deben hacer correcciones tomando en cuenta la curvatura de la Tierra.

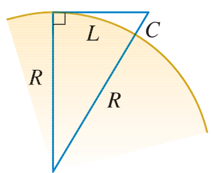
(a) Si R es el radio de la Tierra y L es la longitud de la carretera, demuestre que la corrección es

$$C = R \sec(L/R) - R$$

(b) Mediante un polinomio de Taylor demuestre que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare las correcciones dadas por las fórmulas en los incisos (a) y (b) para una carretera que mide 100 km de longitud. Tome como radio de la Tierra 6 370 km



38. Demuestre que T_n y f tienen las mismas derivadas en a hasta el orden n.

39. En la sección 4.9 utilizó el método de Newton para obtener un valor aproximado de una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, y a partir de una aproximación inicial x_1 obtuvo aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, donde

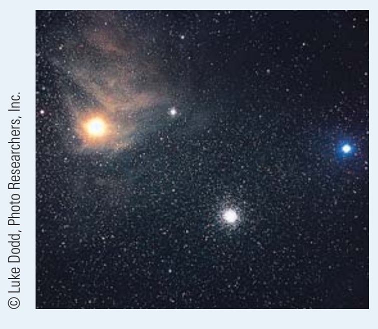
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Aplique la desigualdad de Taylor con $n = 1$, $a = x_n$ y $x = r$ para demostrar que si $f''(x)$ existe en un intervalo I que contiene r, x_n y x_{n+1}, y $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para toda $x \in I$, por lo tanto

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Esto quiere decir que si x_n es exacta con d cifras decimales, en tal caso x_{n+1} es exacta con alrededor de $2d$ cifras decimales. Más exactamente, si el error en la etapa n es cuanto mucho 10^{-m}, por lo tanto el error en la etapa $n + 1$ es cuanto mucho $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROYECTO DE APLICACIÓN — RADIACIÓN PROVENIENTE DE LAS ESTRELLAS



© Luke Dodd, Photo Researchers, Inc.

Cualquier objeto emite radiaciones cuando se calienta. Un *cuerpo negro* es un sistema que absorbe toda la radiación que le llega. Por ejemplo, una superficie negra mate o una cavidad grande con un pequeño agujero en su pared, (como un alto horno), es un cuerpo negro y emite radiación de cuerpo negro. Incluso la radiación que llega del Sol está cerca de ser radiación de un cuerpo negro.

La ley de Rayleigh-Jeans, propuesta a fines del siglo XIX, expresa la densidad de energía de radiación de cuerpo negro de longitud de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins (K) y k es la constante de Boltzmann. La ley de Rayleigh-Jeans concuerda con las mediciones experimentales para longitudes de onda largas, pero no sucede lo mismo con las longitudes de onda cortas. [La ley predice que $f(\lambda) \to \infty$ cuando $\lambda \to 0^+$ pero los experimentos han demostrado que $f(\lambda) \to 0$.] Este hecho recibe el nombre de *catástrofe ultravioleta*.

En 1900, Max Planck encontró un mejor modelo, (que se conoce ahora como ley de Planck), para la radiación de cuerpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins, y

$$h = \text{constante de Planck} = 6.6262 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2.997925 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.3807 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

1. Con ayuda de la regla de l'Hospital demuestre que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para la ley de Planck. De este modo, esta ley modela la radiación de cuerpo negro mejor que la ley de Rayleigh-Jeans para longitudes de onda cortas.

2. Use un polinomio de Taylor para demostrar que, en el caso de las longitudes de onda largas, la ley de Planck da aproximadamente los mismos valores que la ley de Rayleigh-Jeans.

3. Dibuje f de acuerdo con ambas leyes en una misma pantalla y comente sobre las similitudes y las diferencias. Use $T = 5\,700$ K (la temperatura del Sol). (Quizá quiera cambiar de metros a la unidad más conveniente de micrómetros: 1 μm $= 10^{-6}$ m.)

4. Use la gráfica del problema 3 para estimar el valor de λ para el cual $f(\lambda)$ es un máximo según la ley de Planck.

5. Investigue cómo la gráfica de f cambia cuando T varía. (Utilice la ley de Planck). En particular, dibuje f para las estrellas Betelgeuse ($T = 3\,400$ K), Proción ($T = 6\,400$ K) y Sirio ($T = 9\,200$ K) así como para el Sol. ¿Cuál es la variación de la radiación total emitida, es decir (el área bajo la curva), con T? Apóyese en las gráficas y explique por qué a Sirio se le conoce como estrella azul y a Betelgeuse como una estrella roja.

11 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?
(b) ¿Qué es una serie convergente?
(c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
(d) ¿Qué significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?
(b) ¿Qué es una sucesión monótona?
(c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?
(b) ¿Qué es una p-serie? ¿En qué circunstancias es convergente?

4. Suponga que $\sum a_n = 3$ y s_n es la n-ésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Enuncie lo siguiente.
(a) Prueba de la divergencia
(b) Prueba de la integral
(c) Prueba por comparación
(d) Prueba por comparación en el límite
(e) Prueba de la serie alternante
(f) Prueba de la razón
(g) Prueba de la raíz

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?
(b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?
(c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

7. (a) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo estima su suma?
(b) Si una serie es convergente según la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?
(c) Si una serie es convergente según la prueba de la serie alternante, ¿cómo estima su suma?

8. (a) Escriba la forma general de una serie de potencias.
(b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?
(c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.
(a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?
(b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)\,dx$?

10. (a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrada en a.
(b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.
(c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.
(d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?
(e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.
(a) $1/(1 - x)$ (b) e^x (c) $\operatorname{sen} x$
(d) $\cos x$ (e) $\tan^{-1} x$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1 + x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, dé la razón o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum a_n$ es convergente.

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ es convergente.

3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.

4. Si $\sum c_n 6^n$ es convergente, entonces $\sum c_n(-2)^n$ es convergente.

5. Si $\sum c_n 6^n$ es convergente, entonces $\sum c_n(-6)^n$ es convergente.

6. Si $\sum c_n x^n$ diverge cuando $x = 6$, entonces diverge cuando $x = 10$.

7. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\sum 1/n^3$.

8. La prueba de la razón se puede usar para determinar si converge $\sum 1/n!$

9. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ y $\sum b_n$ diverge, entonces la serie $\sum a_n$ diverge.

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

11. Si $-1 < \alpha < 1$, en tal caso $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.

12. Si $\sum a_n$ es divergente, luego $\sum |a_n|$ es divergente.

13. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge para toda x, por lo tanto $f'''(0) = 2$.

14. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, en consecuencia $\{a_n + b_n\}$ es divergente.

15. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n b_n\}$ es divergente.

16. Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

17. Si $a_n > 0$ y $\sum a_n$ converge, por lo tanto converge $\sum (-1)^n a_n$.

18. Si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

19. $0.99999\ldots = 1$

20. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

EJERCICIOS

1–8 Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, determine su límite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$

2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$

3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$

5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$

6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$

8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Una sucesión se define recursivamente mediante las ecuaciones $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y $a_n < 2$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

10. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ y mediante una gráfica determine el valor más pequeño de N que corresponde a $\varepsilon = 0.1$ en la definición exacta de límite.

11–22 Determine si la serie es convergente o divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$

15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1.2)^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{n}$

23–26 Determine si la serie es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1) 3^n}{2^{2n+1}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27–31 Calcule la suma de la serie.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n + 1) - \tan^{-1} n]$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Exprese el decimal periódico $4.17326326326\ldots$ como una fracción.

33. Demuestre que $\cosh x \geq 1 + \frac{1}{2}x^2$ para toda x.

34. ¿Para qué valores de x converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$?

35. Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ con cuatro dígitos decimales.

36. (a) Determine la suma parcial s_5 de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ y estime el error al usarla como aproximación de la suma de la serie.
(b) Calcule la suma de esta serie con cinco dígitos decimales.

37. Use la suma de los primeros ocho términos para aproximarse a la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime el error que se origina en esta aproximación.

38. (a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ es convergente.

(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

39. Demuestre que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$$

es también absolutamente convergente.

40–43 Encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n4^n}$

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

44. Calcule el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

46. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

47–54 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Puede aplicar el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o las series conocidas, como la serie geométrica, serie binomial o la serie de Maclaurin para e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\tan^{-1}x$.

47. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

48. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(1 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

55. Evalúe $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ como una serie infinita.

56. Mediante series aproxime $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\, dx$ con dos dígitos decimales.

57–58
(a) Obtenga un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor de grado n en el número a.
(b) Dibuje f y T_n en una misma pantalla.
(c) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.
(d) Compruebe su resultado del inciso (c) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.9 \leq x \leq 1.1$

58. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad 0 \leq x \leq \pi/6$

59. Mediante series evalúe el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. La fuerza de la gravedad que actúa en un objeto de masa m a una altura h por encima de la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad.
(a) Exprese F como una serie en potencias de h/R.
(b) Observe que si aproxima F con el primer término de la serie, obtiene la expresión $F \approx mg$ que se usa por lo común cuando h es mucho más pequeña que R. Aplique el teorema de la estimación de la serie alternante para calcular los valores de h para los cuales la aproximación $F \approx mg$ no difiere 1% (del valor real $R = 6\,400$ km).

61. Suponga que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x.
(a) Si f es una función impar, demuestre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Si f es una función par, demuestre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Si $f(x) = e^{x^2}$, demuestre que $f^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}$

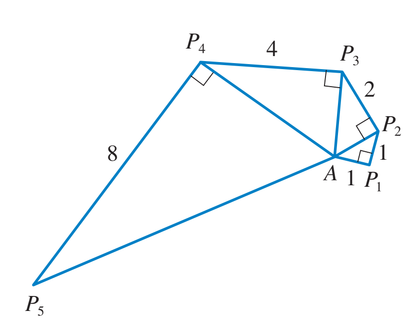


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentre $f^{(15)}(0)$.

2. Una función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

¿Dónde es continua f?

3. (a) Demuestre que $\tan \frac{1}{2}x = \cot \frac{1}{2}x - 2 \cot x$.

(b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

4. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de puntos determinados de acuerdo con la figura. Por lo tanto, $|AP_1| = 1$, $|P_n P_{n+1}| = 2^{n-1}$ y el ángulo $AP_n P_{n+1}$ es un ángulo recto. Calcule $\lim_{n \to \infty} \angle P_n A P_{n+1}$.

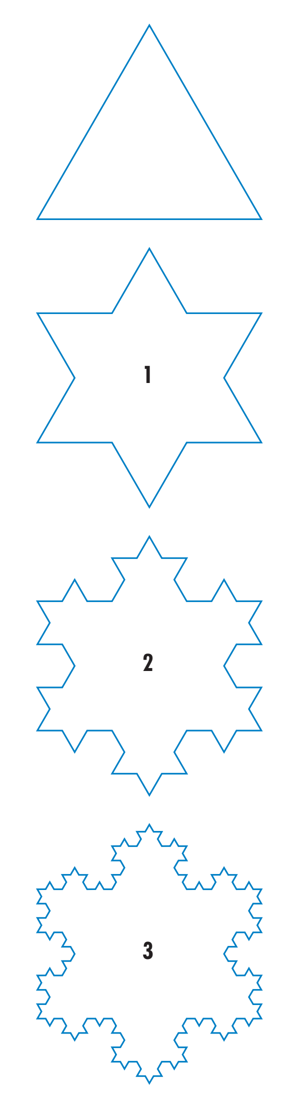


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. Para construir la **curva del copo de nieve**, inicie con un triángulo equilátero de lados de longitud igual a 1. El paso 1 de la construcción consta de dividir cada lado en tres partes iguales, construir un triángulo equilátero en la parte media y luego borrar la parte media (véase figura). El paso 2 es repetir el paso 1 en cada lado del polígono resultante. Se repite este procedimiento en cada paso posterior. La curva del copo de nieve es la curva que resulta de repetir este proceso indefinidamente.

(a) Sean s_n, l_n y p_n respectivamente el número de lados, la longitud de un lado y la longitud total de la curva de aproximación n-ésima, es decir, la curva obtenida después del paso n del trazo. Encuentre fórmulas para s_n, l_n y p_n.

(b) Demuestre que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

(c) Sume una serie infinita para encontrar el área encerrada por la curva del copo de nieve.

Los incisos (b) y (c) demuestran que la curva del copo de nieve es infinitamente larga pero encierra un área finita.

6. Calcule la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

donde los términos son los recíprocos de los enteros positivos cuyos únicos factores primos son 2s y 3s.

7. (a) Demuestre que para $xy \neq -1$,

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

si el primer miembro queda entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Demuestre que

$$\arctan \tfrac{120}{119} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(c) Deduzca la fórmula siguiente de John Machin (1680-1751):

$$4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Aplique la serie de Maclaurin del arctan para demostrar que

$$0.197395560 < \arctan \tfrac{1}{5} < 0.197395562$$

(e) Demuestre que

$$0.004184075 < \arctan \tfrac{1}{239} < 0.004184077$$

(f) Deduzca que el valor siguiente es correcto con siete cifras decimales,

$$\pi \approx 3.1415927$$

Machin aplicó este método en 1706 para determinar π con 100 cifras decimales. Recientemente, con la ayuda de computadoras, se ha calculado cada vez con mayor exactitud el valor de π. Yasumada Kanada de la University of Tokyo recién calculó el valor de π a un billón de lugares decimales!

8. (a) Demuestre una fórmula similar a la del problema 7(a), pero que contenga arccot en lugar de arctan.
(b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccot}(n^2 + n + 1)$$

9. Determine el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ y calcule la suma.

10. Si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$$

Si no encuentra cómo demostrarlo, intente con la estrategia de resolución de problemas *usando las analogías* (véase página 76). Intente primero los casos especiales $k = 1$ y $k = 2$. Si puede ver cómo demostrar la afirmación para estos casos, probablemente verá cómo demostrarlo en general.

11. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

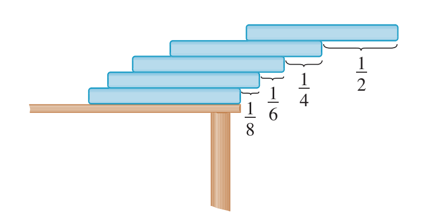
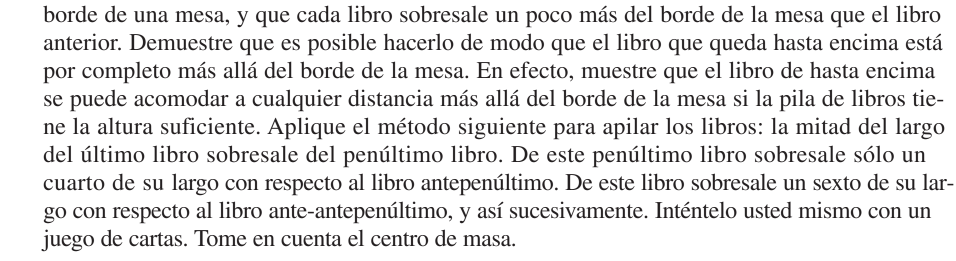


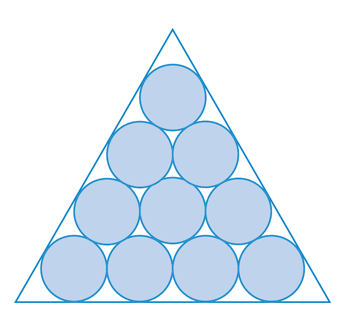
FIGURA PARA EL PROBLEMA 12


12. Suponga que posee una gran cantidad de libros, todos del mismo tamaño, y que los apila en el borde de una mesa, y que cada libro sobresale un poco más del borde de la mesa que el libro anterior. Demuestre que es posible hacerlo de modo que el libro que queda hasta encima está por completo más allá del borde de la mesa. En efecto, muestre que el libro de hasta encima se puede acomodar a cualquier distancia más allá del borde de la mesa si la pila de libros tiene la altura suficiente. Aplique el método siguiente para apilar los libros: la mitad del largo del último libro sobresale del penúltimo libro. De este penúltimo libro sobresale sólo un cuarto de su largo con respecto al libro antepenúltimo. De este libro sobresale un sexto de su largo con respecto al libro ante-antepenúltimo, y así sucesivamente. Inténtelo usted mismo con un juego de cartas. Tome en cuenta el centro de masa.


13. Si la curva $y = e^{-x/10} \operatorname{sen} x$, $x \geqslant 0$, gira alrededor del eje x, el sólido resultante se observa como un infinito collar de esferillas decreciente.
(a) Encuentre el volumen exacto de la n-ésima esferilla. (Use una tabla de integrales o sistema computarizado de álgebra.)
(b) Encuentre el volumen total de las esferillas.

14. Si $p > 1$, evalúe la expresión.

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. Suponga que círculos de igual diámetro están acomodados apretadamente en n filas dentro de un triángulo equilátero. (La figura ilustra el caso $n = 4$.) Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

16. Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante las ecuaciones

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Calcule la suma de la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Tome el valor de x^x en 0 como 1 e integre una serie término a término, y con esto demuestre que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

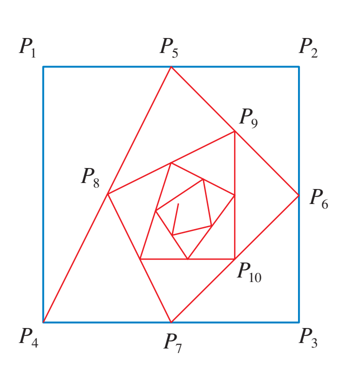


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. Inicie con los vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de un cuadrado, y localice puntos como se muestra en la figura: P_5 es el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, P_7 es el punto medio de P_3P_4, y así sucesivamente. La trayectoria espiral de la poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7 \ldots$ se aproxima al punto P dentro del cuadrado.

(a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), demuestre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ y encuentre una ecuación similar para las coordenadas y.

(b) Determine las coordenadas de P.

19. Si $f(x) = \Sigma_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ tiene radio positivo de convergencia y $e^{f(x)} = \Sigma_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, demuestre que

$$nd_n = \sum_{i=1}^{n} ic_i d_{n-i} \qquad n \geqslant 1$$

20. Se trazan triángulos rectángulos como en la figura. Cada uno de los triángulos tiene una altura de 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestre que esta sucesión de triángulos da una cantidad indefinida de vueltas alrededor de P mostrando que $\Sigma\,\theta_n$ es una serie divergente.

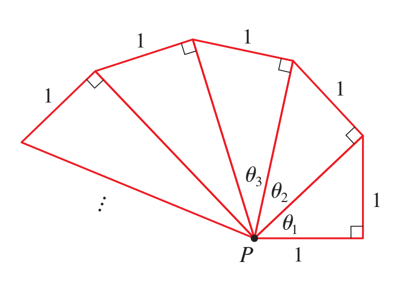


FIGURA PARA EL PROBLEMA 20

21. Considere la serie cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos que se pueden escribir con la notación de base 10 sin usar el dígito 0. Demuestre que esta serie es convergente y que la suma es menor que 90.

22. (a) Demuestre que la serie de Maclaurin de la función

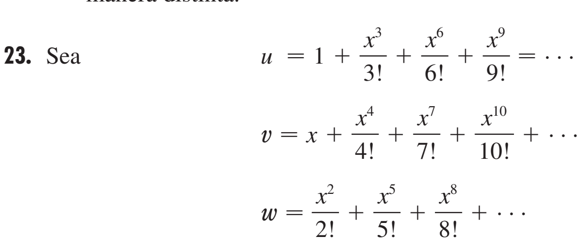


$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \qquad \text{es} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci, es decir, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugerencia:* Escriba $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ y multiplique ambos lados de esta ecuación por $1 - x - x^2$.]

(b) Determine una fórmula explícita para el n-ésimo número de Fibonacci, escribiendo $f(x)$ como una suma de fracciones parciales y con ello obteniendo la serie de Maclaurin de una manera distinta.

23. Sea



$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} = \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

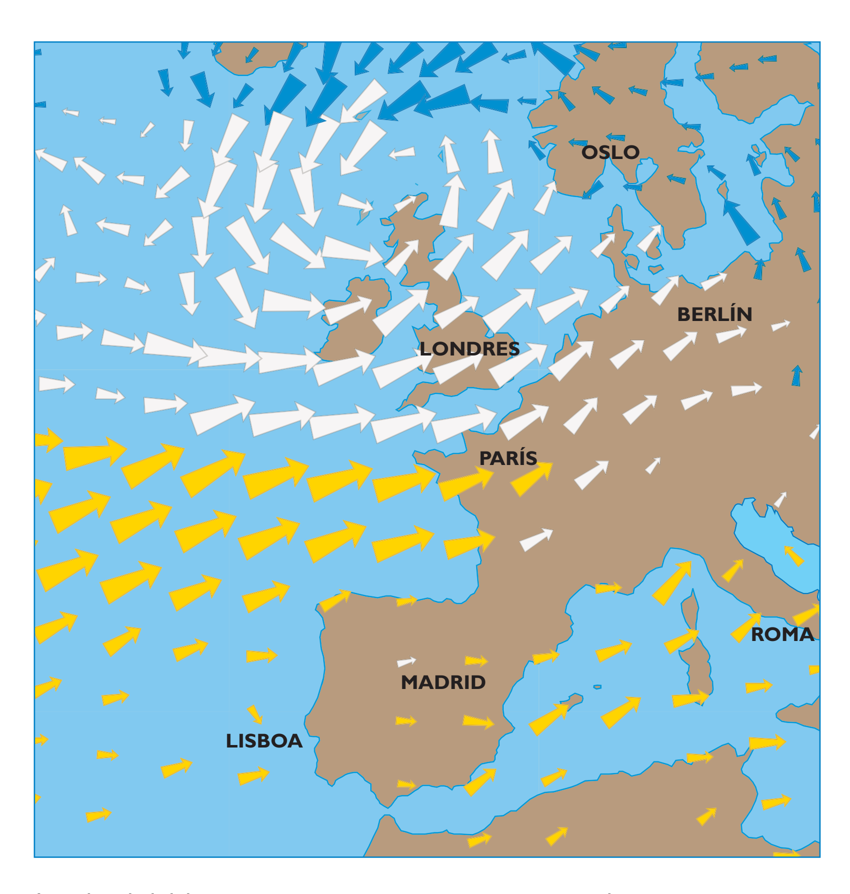
Demuestre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

24. Demuestre que si $n > 1$, la $n-$ésima suma parcial de la serie armónica no es un entero.

Sugerencia: Sea 2^k la máxima potencia de 2 que es menor o igual a n y sea M el producto de todos los enteros nones que sean menores o iguales a n. Suponga que $s_n = m$, un entero. Entonces $M2^ks_n = M2^km$. El lado derecho de esta ecuación es par. Pruebe que el lado izquierdo es impar al demostrar que cada uno de sus términos es un entero par, excepto el último.

12

VECTORES Y LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO



La velocidad del viento es un vector porque tiene magnitud y dirección. En la ilustración se muestran vectores de velocidad que indican el patrón del viento en el Atlántico norte y Europa occidental el 28 de febrero de 2007. Las flechas grandes indican vientos más fuertes.

En este capítulo se introducen los vectores y sistemas coordenados para el espacio tridimensional. Éste será el escenario para el estudio del cálculo de funciones de dos variables en el capítulo 14, porque la gráfica de tal función es una superficie en el espacio. En este capítulo se verá que los vectores proveen descripciones particularmente simples de líneas y planos en el espacio.

Para localizar un punto en un plano, son necesarios dos números. Se sabe que cualquier punto en el plano se puede representar como un par ordenado (a, b) de números reales, donde a es la coordenada x y b es la coordenada y. Por esta razón, un plano se llama bidimensional. Para localizar un punto en el espacio, se requieren tres números. Se representa cualquier punto en el espacio mediante una tercia ordenada (a, b, c) de números reales.

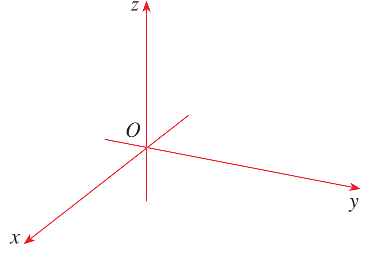


FIGURA 1
Ejes coordenados

A fin de representar puntos en el espacio, se elige primero un punto fijo O (el origen) y tres líneas dirigidas por O que son perpendiculares entre sí, llamados **ejes coordenados** y marcados como eje x, eje y y eje z. Por lo común, se considera que los ejes x y y son horizontales, y que el eje z es vertical, y se dibuja la orientación de los ejes como en la figura 1. La dirección del eje z se determina mediante la **regla de la mano derecha,** como se ilustra en la figura 2: si curva los dedos de su mano derecha alrededor del eje z en la dirección de una rotación de 90º en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje positivo x al eje positivo y, entonces su dedo pulgar apunta en la dirección positiva del eje z.

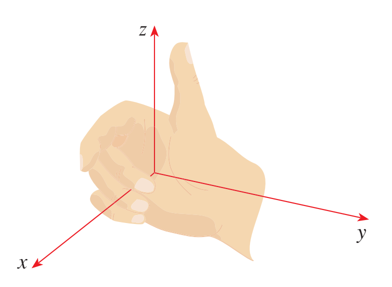
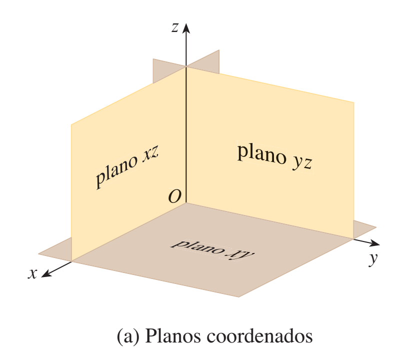


FIGURA 2
Regla de la mano derecha

Los tres ejes coordenados determinan los tres **planos coordenados** ilustrados en la figura 3(a). El plano xy es el plano que contiene los ejes x y y; el plano yz contiene los ejes y y z; el plano xz contiene los ejes x y z. Estos tres planos coordenados dividen el espacio en ocho partes, llamados **octantes**. El **primer octante**, en primer plano, se determina mediante los ejes positivos.



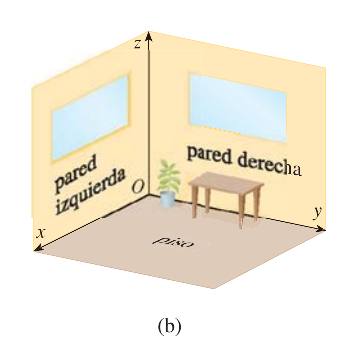


FIGURA 3 (a) Planos coordenados (b)

Debido a que muchas personas tienen cierta dificultad para visualizar diagramas de figuras tridimensionales, se podría encontrar útil hacer lo siguiente [véase figura 3(b)]. Mire cualquier esquina inferior de una habitación y llame a la esquina el origen. La pared a su izquierda es el plano xz, la pared sobre su lado derecho es el plano yz y el piso es el plano xy. El eje x corre a lo largo de la intersección del piso y la pared izquierda. El eje y corre a lo largo de la intersección del piso y la pared derecha. El eje z corre hacia arriba desde el piso hacia el techo a lo largo de la intersección de las dos paredes. Usted se localiza en el primer octante y ahora puede imaginar otras siete habitaciones situadas en los otros siete octantes (tres en el mismo piso y cuatro en el piso de abajo), todos conectados por el punto de esquina común O.

Ahora si P es cualquier punto en el espacio, sea a la distancia (dirigida) del plano yz a P, sea b la distancia del plano xz a P y sea c la distancia del plano xy a P. Se representa el punto P mediante la tercia ordenada (a, b, c) de números reales y se llaman a a, b y c las **coordenadas** de P; a es la coordenada x, b es la coordenada y y c es la coordenada z. Así, para localizar el punto (a, b, c) se puede empezar en el origen O y moverse a unidades a lo largo del eje x, luego b unidades paralelas al eje y y luego c unidades paralelas al eje z como en la figura 4.

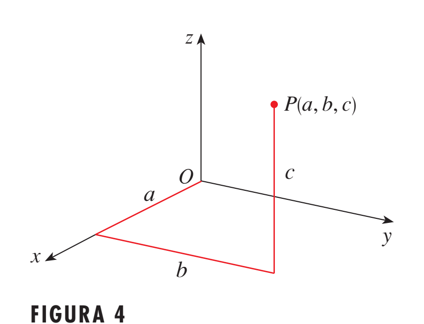


FIGURA 4

El punto $P(a, b, c)$ determina una caja rectangular como en la figura 5. Si se traza una perpendicular de P al plano xy, se obtiene un punto Q con coordenadas $(a, b, 0)$ conocido como la **proyección** de P en el plano xy. De manera similar, $R(0, b, c)$ y $S(a, 0, c)$ son las proyecciones de P sobre el plano yz y el plano xz, respectivamente.

Como representaciones numéricas, los puntos $(-4, 3, -5)$ y $(3, -2, -6)$ se dibujan en la figura 6.

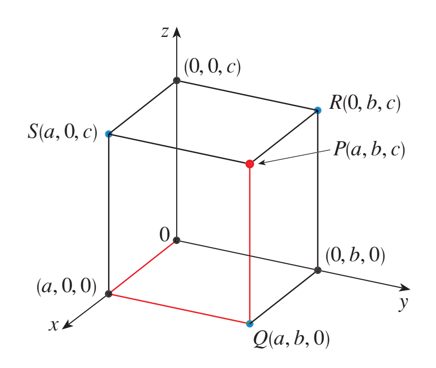
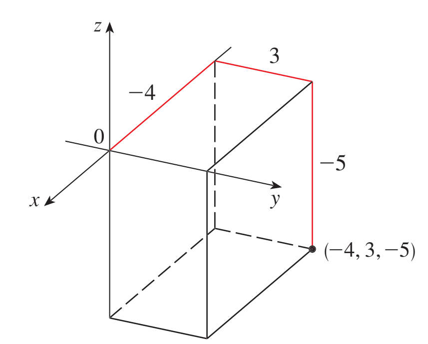


FIGURA 5



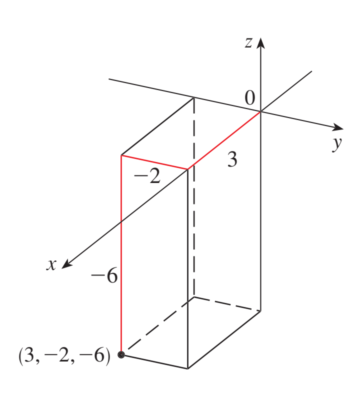


FIGURA 6

El producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de las tercias ordenadas de números reales y se denota por $\mathbb{R}^3$. Se ha dado una correspondencia uno a uno entre los puntos P en el espacio y las tercias ordenadas (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$. Se denomina **sistema coordenado rectangular tridimensional**. Observe que, en términos de coordenadas, el primer octante se puede describir como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son positivas.

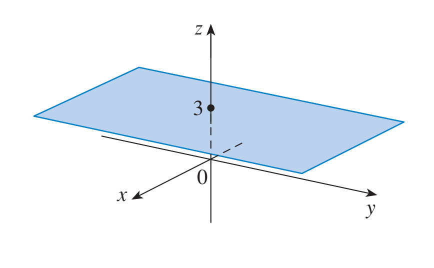
En geometría analítica bidimensional, la gráfica de una ecuación en x y y es una curva en $\mathbb{R}^2$. En geometría analítica tridimensional, una ecuación en x, y y z representa una *superficie* en $\mathbb{R}^3$.

V EJEMPLO 1 ¿Qué superficies en $\mathbb{R}^3$ están representadas por las siguientes ecuaciones?

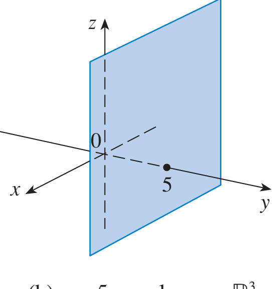
(a) $z = 3$ (b) $y = 5$

SOLUCIÓN

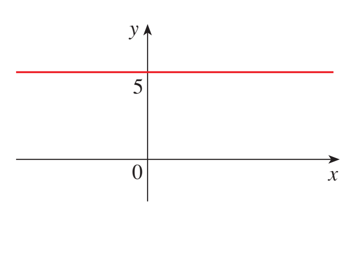
(a) La ecuación $z = 3$ representa el conjunto $\{(x, y, z) \mid z = 3\}$, que es el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya coordenada z es 3. Éste es el plano horizontal que es paralelo al plano xy y está tres unidades arriba de él como en la figura 7(a).



(a) $z = 3$, un plano en $\mathbb{R}^3$



(b) $y = 5$, un plano en $\mathbb{R}^3$



(c) $y = 5$, una línea en $\mathbb{R}^2$

FIGURA 7

(b) La ecuación $y = 5$ representa el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuya coordenada y es 5. Éste es el plano vertical que es paralelo al plano xz y está cinco unidades a la derecha de él como en la figura 7(b). □

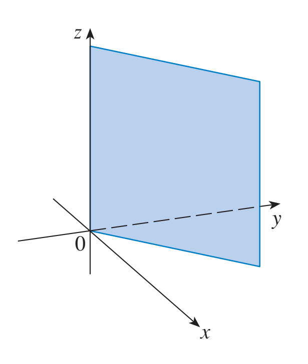


FIGURA 8
El plano $y = x$

NOTA Cuando se tiene una ecuación, se debe entender del contexto si representa una curva en $\mathbb{R}^2$ o una superficie en $\mathbb{R}^3$. En el ejemplo 1, $y = 5$ representa un plano en $\mathbb{R}^3$, pero por supuesto $y = 5$ también puede representar una línea en $\mathbb{R}^2$ si se trata con geometría analítica bidimensional. Véase la figura 7(b) y (c).

En general, si k es una constante, entonces $x = k$ representa un plano paralelo al plano yz, $y = k$ es un plano paralelo al plano xz y $z = k$ es un plano paralelo al plano xy. En la figura 5, las caras de una caja rectangular se forman mediante los tres planos coordenados $x = 0$ (el plano yz), $y = 0$ (el plano xz) y $z = 0$ (el plano xy) y los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.

V EJEMPLO 2 Describa y bosqueje la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $y = x$.

SOLUCIÓN La ecuación representa el conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas x y y son iguales, es decir, $\{(x, x, z) \mid x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$. Éste es un plano vertical que interseca al plano xy en la línea $y = x$, $z = 0$. La porción de este plano que yace en el primer octante se bosqueja en la figura 8. □

La fórmula familiar para la distancia entre dos puntos en un plano se extiende fácilmente a la siguiente fórmula tridimensional.

FÓRMULA DE DISTANCIA EN TRES DIMENSIONES La distancia $|P_1P_2|$ entre los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

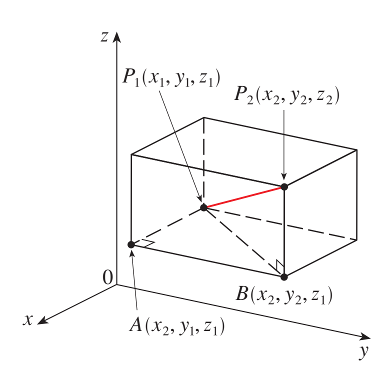


FIGURA 9

Para ver por qué esta fórmula es cierta, se construye una caja rectangular como en la figura 9, donde P_1 y P_2 son vértices opuestos, y las caras de la caja son paralelas a los planos coordenados. Si $A(x_2, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_1)$ son los vértices de la caja indicados en la figura, entonces

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \qquad |AB| = |y_2 - y_1| \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

Debido a que los triángulos P_1BP_2 y P_1AB son rectángulos, dos aplicaciones del teorema de Pitágoras dan

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$

y

$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Al combinar estas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

EJEMPLO 3 La distancia del punto $P(2, -1, 7)$ al punto $Q(1, -3, 5)$ es

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$ □

EJEMPLO 4 Halle una ecuación de una esfera con radio r y centro $C(h, k, l)$.

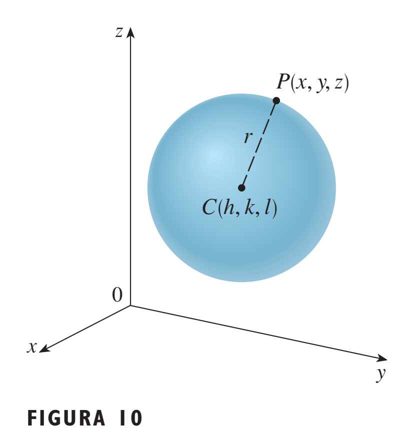


FIGURA 10

SOLUCIÓN Por definición, una esfera es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia desde C es r. (Véase figura 10). Así, P está sobre la esfera si y sólo si $|PC| = r$. Al elevar al cuadrado ambos lados, se tiene $|PC|^2 = r^2$ o bien

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$ □

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 4.



ECUACIÓN DE UNA ESFERA Una ecuación de una esfera con centro $C(h, k, l)$ y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

En particular, si el centro es el origen O, entonces una ecuación de la esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

EJEMPLO 5 Muestre que $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ es la ecuación de una esfera, y determine su centro y radio.

SOLUCIÓN Se puede reescribir la ecuación dada en la forma de una ecuación de una esfera si se completan los cuadrados:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 2z + 1) = -6 + 4 + 9 + 1$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 8$$

Al comparar esta ecuación con la forma estándar, se ve que es la ecuación de una esfera con centro $(-2, 3, -1)$ y radio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. □

EJEMPLO 6 ¿Qué región en $\mathbb{R}^3$ está representada por las siguientes desigualdades?

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4 \qquad z \leqslant 0$$

SOLUCIÓN Las desigualdades

$$1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$$

se pueden reescribir como

$$1 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 2$$

de modo que representan los puntos (x, y, z) cuya distancia desde el origen es por lo menos 1 y a lo sumo 2. Pero se tiene también que $z \leqslant 0$, por lo tanto los puntos están sobre o debajo del plano xy. Así, las desigualdades representan la región que yace entre (o sobre) las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y debajo de (o sobre) el plano xy. El bosquejo se muestra en la figura 11. □

FIGURA 11

12.1 EJERCICIOS

1. Suponga que empieza en el origen, se mueve a lo largo del eje x una distancia de 4 unidades en la dirección positiva y luego se mueve hacia abajo una distancia de 3 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas de su posición?

2. Bosqueje los puntos (0, 5, 2), (4, 0, -1), (2, 4, 6) y (1, -1, 2) en un solo conjunto de ejes coordenados.

3. ¿Cuál de los puntos $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$, y $R(0, 3, 8)$ está más próximo al plano xz? ¿Qué punto yace en el plano yz?

4. ¿Cuáles son las proyecciones del punto (2, 3, 5) en los planos xy, yz y xz? Dibuje una caja rectangular con el origen y (2, 3, 5) como vértices opuestos y con sus caras paralelas a los planos coordenados. Indique los vértices de la caja. Halle la longitud de la diagonal de la caja.

5. Describa y bosqueje la superficie en $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación $x + y = 2$.

6. (a) ¿Qué representa la ecuación $x = 4$ en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué representa en $\mathbb{R}^3$? Ilustre con bosquejos.
(b) ¿Qué representa la ecuación $y = 3$ en $\mathbb{R}^3$? ¿Qué representa $z = 5$? ¿Qué representa el par de ecuaciones $y = 3$, $z = 5$? En otras palabras, describa el conjunto de puntos (x, y, z) tal que $y = 3$ y $z = 5$. Ilustre con un bosquejo.

7–8 Halle las longitudes de los lados del triángulo PQR. ¿Es un triángulo rectángulo? ¿Es un triángulo isósceles?

7. $P(3, -2, -3)$, $Q(7, 0, 1)$, $R(1, 2, 1)$

8. $P(2, -1, 0)$, $Q(4, 1, 1)$, $R(4, -5, 4)$

9. Determine si los puntos yacen en una línea recta.
(a) $A(2, 4, 2)$, $B(3, 7, -2)$, $C(1, 3, 3)$
(b) $D(0, -5, 5)$, $E(1, -2, 4)$, $F(3, 4, 2)$

10. Determine la distancia de $(3, 7, -5)$ a cada uno de lo siguiente.
(a) El plano xy (b) El plano yz
(c) El plano xz (d) El eje x
(e) El eje y (f) El eje z

11. Halle una ecuación de la esfera con centro $(1, -4, 3)$ y radio 5. ¿Cuál es la intersección de esta esfera con el plano xz?

12. Encuentre una ecuación de la esfera con centro $(2, -6, 4)$ y radio 5. Describa su intersección con cada uno de los planos coordenados.

13. Halle una ecuación de la esfera que pasa por el punto $(4, 3, -1)$ y tiene centro (3, 8, 1).

14. Obtenga una ecuación de la esfera que pasa por el origen y cuyo centro es (1, 2, 3).

15–18 Muestre que la ecuación representa una esfera y determine su centro y radio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$

16. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 2z + 17 = 0$

17. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8x + 24z + 1$

18. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$

19. (a) Demuestre que el punto medio del segmento de recta de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

(b) Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ y $C(4, 1, 5)$.

20. Obtenga una ecuación de una esfera si uno de sus diámetros tiene puntos terminales (2, 1, 4) y (4, 3, 10).

21. Encuentre las ecuaciones de las esferas con centro $(2, -3, 6)$ que tocan (a) el plano xy, (b) el plano yz, (c) el plano xz.

22. Halle una ecuación de la esfera más grande con centro (5, 4, 9) que está contenida en el primer octante.

23–32 Describa en palabras la región de $\mathbb{R}^3$ representada por la ecuación o desigualdad.

23. $y = -4$

24. $x = 10$

25. $x > 3$

26. $y \geqslant 0$

27. $0 \leqslant z \leqslant 6$

28. $z^2 = 1$

29. $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$

30. $x = z$

31. $x^2 + z^2 \leqslant 9$

32. $x^2 + y^2 + z^2 > 2z$

33–36 Escriba las desigualdades para describir la región.

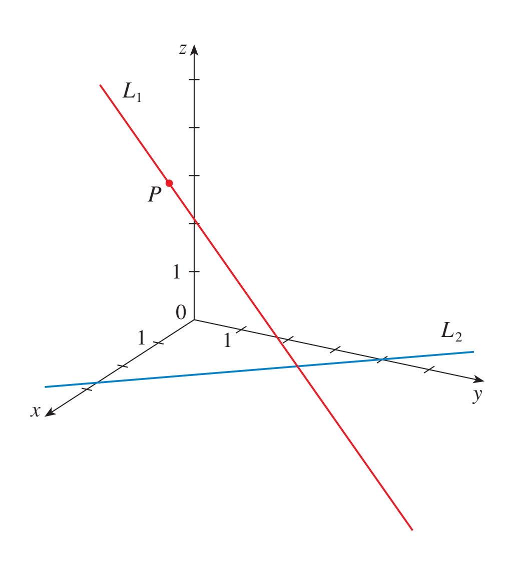
33. La región entre el plano yz y el plano vertical $x = 5$.

34. El cilindro sólido que está sobre o debajo del plano $z = 8$ y sobre o por encima del disco del plano xy con centro en el origen y radio 2.

35. La región que consta de los puntos entre (pero no sobre) las esferas de radios r y R centradas en el origen, donde $r < R$.

36. La semiesfera superior sólida de la esfera de radio 2 centrada en el origen.

37. La figura muestra una línea L_1 en el espacio y una segunda línea L_2, que es la proyección de L_1 en el plano xy. (En otras palabras, los puntos en L_2 están directamente debajo, o arriba, de los puntos en L_1.)



(a) Halle las coordenadas del punto P sobre la línea L_1.
(b) Localice en el diagrama los puntos A, B y C, donde la línea L_1 corta al plano xy, plano yz y el plano xz, respectivamente.

38. Considere los puntos P tales que la distancia de P a $A(-1, 5, 3)$ es dos veces la distancia de P a $B(6, 2, -2)$. Muestre que el conjunto de tales puntos es una esfera y determine su centro y radio.

39. Obtenga una ecuación del conjunto de todos los puntos equidistantes de los puntos $A(-1, 5, 3)$ y $B(6, 2, -2)$. Describa el conjunto.

40. Encuentre el volumen del sólido que está dentro de las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$$

y
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

12.2 VECTORES

Los científicos emplean el término **vector** para indicar una cantidad (p. ej., un desplazamiento o velocidad o fuerza) que tiene magnitud y dirección. Un vector se representa por lo común mediante una flecha o un segmento de recta dirigido. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la flecha apunta en la dirección del vector. Un vector se denota por medio de una letra en negrita (**v**) o escribiendo una flecha sobre la letra ($\vec{v}$).

Por ejemplo, suponga que una partícula se mueve a lo largo de un segmento de recta del punto A al punto B. El **vector de desplazamiento v**, correspondiente, mostrado en la figura 1, tiene **punto inicial** A (la cola) y el **punto terminal** B (la punta) y esto se indica escribiendo $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$. Observe que el vector $\mathbf{u} = \overrightarrow{CD}$ tiene la misma longitud y la misma dirección que **v** aun cuando está en diferente posición. Se dice que **u** y **v** son **equivalentes** (o **iguales**) y se escribe $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. El **vector cero**, denotado **0**, tiene longitud 0. Es el único vector sin dirección específica.

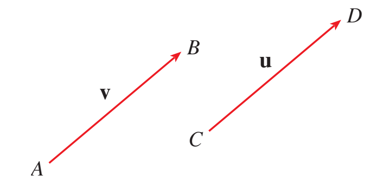


FIGURA 1
Vectores equivalentes

COMBINACIÓN DE VECTORES

Suponga que una partícula se mueve de A a B, así que su vector de desplazamiento es $\overrightarrow{AB}$. Entonces la partícula cambia de dirección y se mueve de B a C, con vector de desplazamiento $\overrightarrow{BC}$ como en la figura 2. El efecto combinado de estos desplazamientos es que la partícula se ha movido de A a C. El vector de desplazamiento resultante $\overrightarrow{AC}$ se llama la *suma* de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y se escribe

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

En general, si se empieza con vectores **u** y **v**, primero se mueve a **v** de modo que su cola coincida con la punta de **u** y se define la suma de **u** y **v** como sigue.

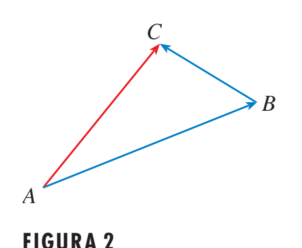


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE SUMA VECTORIAL Si **u** y **v** son vectores colocados de modo que el punto inicial de **v** esté en el punto terminal de **u**, entonces la **suma u + v** es el vector del punto inicial de **u** al punto terminal de **v**.

La definición de suma vectorial se ilustra en la figura 3. Se puede ver por qué esta definición a veces se llama **ley del triángulo**.

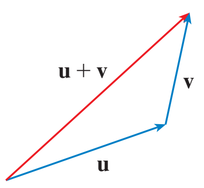


FIGURA 3 Ley del triángulo

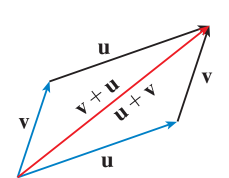


FIGURA 4 Ley del paralelogramo

En la figura 4 se empieza con los mismos vectores **u** y **v** como en la figura 3, y se dibuja otra copia de **v** con el mismo punto inicial que **u**. Al completar el paralelogramo, se ve que **u** + **v** = **v** + **u**. Esto da otra forma de construir la suma: Si se colocan **u** y **v** de modo que empiecen en el mismo punto, entonces **u** + **v** yace a lo largo de la diagonal del paralelogramo con **u** y **v** como lados. (Esto se llama **ley del paralelogramo**.)

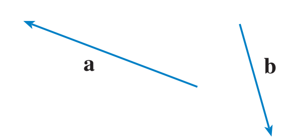


FIGURA 5



V EJEMPLO 1 Dibuje la suma de los vectores **a** y **b** mostrados en la figura 5.

SOLUCIÓN Primero se traslada **b** y se coloca su cola en la punta de **a**, teniendo cuidado de dibujar una copia de **b** que tiene la misma longitud y dirección. Luego se dibuja el vector **a** + **b** [véase figura 6(a)] empezando en el punto inicial de **a** y terminando en el punto terminal de la copia de **b**.

De manera alternativa, se podría colocar **b** para que empiece donde comienza **a** y construir **a** + **b** mediante la ley del paralelogramo como en la figura 6(b).

TEC En Visual 12.2 se muestra cómo funcionan las leyes del triángulo y el paralelogramo para varios vectores **u** y **v**.

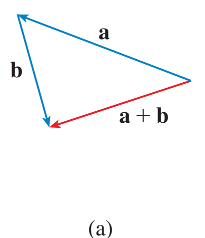


FIGURA 6 (a) (b) □

Es posible multiplicar un vector por un número real c. (En este contexto se llama al número real c un **escalar** para distinguirlo de un vector). Por ejemplo, se desea que 2**v** sea el mismo vector que **v** + **v**, que tiene la misma dirección que **v,** pero tiene el doble de largo. En general, se multiplica un vector por un escalar como sigue.

DEFINICIÓN DE MULTIPLICACIÓN ESCALAR Si c es un escalar y **v** es un vector, entonces el **múltiplo escalar** c**v** es el vector cuya longitud es $|c|$ multiplicado por la longitud de **v** y cuya dirección es la misma que **v** si $c > 0$ y es opuesta a **v** si $c < 0$. Si $c = 0$ o **v** = **0**, entonces c**v** = **0**.

Esta definición se ilustra en la figura 7. Se ve que los números reales funcionan como factores de escala aquí; ésa es la razón de que se llamen escalares. Observe que los dos vectores no cero son **paralelos** si son múltiplos escalares entre sí. En particular, el vector −**v** = (−1)**v** tiene la misma longitud que **v**, pero apunta en la dirección opuesta. Se le llama el **negativo** de **v**.

Por la **diferencia u − v** de dos vectores se entiende

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

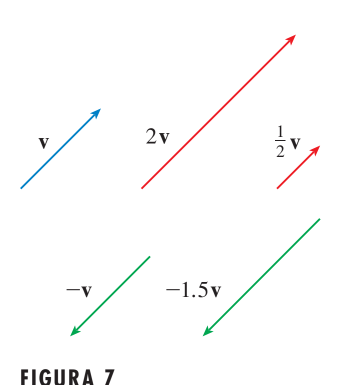


FIGURA 7

Múltiplos escalares de v

Así que se puede construir **u** − **v** si se dibuja primero el negativo de **v**, −**v**, y luego sumarlo a **u** por la ley del paralelogramo como en la figura 8(a). De manera alternativa, puesto que **v** + (**u** − **v**) = **u**, el vector **u** − **v**, cuando se suma a **v**, da **u**. Así que se podría construir **u** − **v** como en la figura 8(b) por medio de la ley del triángulo.

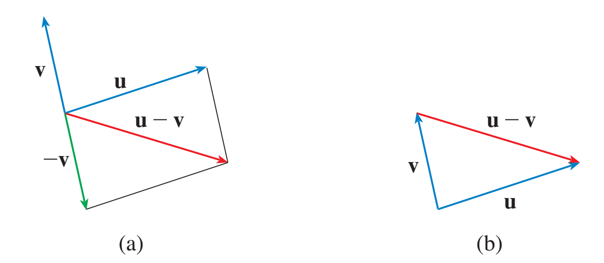


FIGURA 8
Trazo de **u** − **v**

EJEMPLO 2 Si **a** y **b** son los vectores mostrados en la figura 9, dibuje **a** − 2**b**.

SOLUCIÓN Primero se dibuja el vector −2**b** que apunta en la dirección opuesta a **b** es el doble de largo. Se coloca con su cola en la punta de **a** y luego se usa la ley del triángulo para dibujar **a** + (−2**b**) como en la figura 10.



FIGURA 9 **FIGURA 10**

□

COMPONENTES

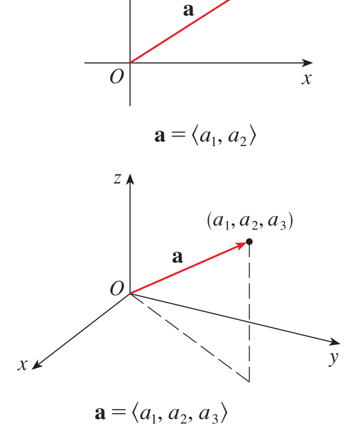


FIGURA 11

Para ciertos propósitos es mejor introducir un sistema coordenado y tratar a los vectores algebraicamente. Si se coloca el punto inicial de un vector **a** en el origen de un sistema coordenado rectangular, entonces el punto terminal de **a** tiene coordenadas de la forma (a_1, a_2) o (a_1, a_2, a_3), lo cual depende de si el sistema de coordenadas es de dos o tres dimensiones (véase figura 11). Estas coordenadas se llaman las **componentes** de **a** y se escribe

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Se emplea la notación $\langle a_1, a_2 \rangle$ para el par ordenado que se refiere a un vector para no confundirlo con el par ordenado (a_1, a_2) que se refiere a un punto en el plano.

Por ejemplo, los vectores mostrados en la figura 12 son los equivalentes al vector $\overrightarrow{OP} = \langle 3, 2 \rangle$ cuyo punto terminal es $P(3, 2)$. Lo que tienen en común es que el punto terminal se alcanza desde el punto inicial mediante un desplazamiento de tres unidades a la derecha y dos hacia arriba. Se puede considerar a estos vectores geométricos como

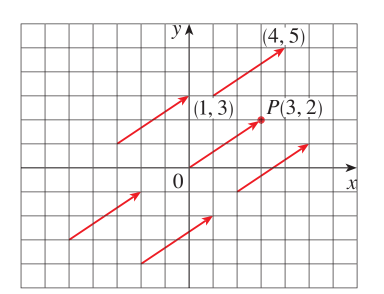


FIGURA 12
Representaciones del vector $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$

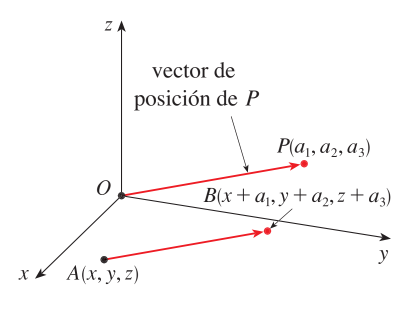


FIGURA 13
Representaciones de $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

representaciones de un vector algebraico $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$. La representación particular $\overrightarrow{OP}$ del origen al punto $P(3, 2)$ se llama el **vector posición** del punto P.

En tres dimensiones, el vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es el **vector de posición** del punto $P(a_1, a_2, a_3)$. (Véase figura 13). Considere cualquier otra representación $\overrightarrow{AB}$ de $\mathbf{a}$, donde el punto inicial es $A(x_1, y_1, z_1)$ y el punto terminal es $B(x_2, y_2, z_2)$. Entonces se debe tener $x_1 + a_1 = x_2$, $y_1 + a_2 = y_2$, y $z_1 + a_3 = z_2$ y, por lo tanto, $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ y $a_3 = z_2 - z_1$. Así, se tiene el siguiente resultado.

1 Dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, el vector $\mathbf{a}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

V EJEMPLO 3 Encuentre el vector representado por el segmento de recta dirigido con punto inicial $A(2, -3, 4)$ y punto terminal $B(-2, 1, 1)$.

SOLUCIÓN Por (1), el vector correspondiente a $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = \langle -2 - 2, 1 - (-3), 1 - 4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle$$ □

La **magnitud** o **longitud** del vector $\mathbf{v}$ es la longitud de cualquiera de sus representaciones, y se denota por el símbolo $|\mathbf{v}|$ o $\|\mathbf{v}\|$. Al usar la fórmula de distancia para calcular la longitud de un segmento OP, se obtienen las siguientes fórmulas.

La longitud del vector bidimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

La longitud del vector tridimensional $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

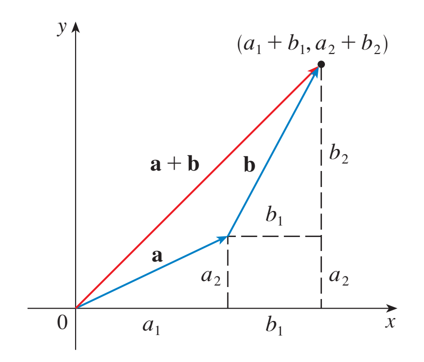


FIGURA 14

¿Cómo se suman algebraicamente los vectores? En la figura 14 se muestra que si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces la suma es $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$, por lo menos para el caso donde las componentes son positivas. En otras palabras, *para sumar vectores algebraicos se suman sus componentes*. De manera similar, *para restar vectores se restan componentes*. De los triángulos similares de la figura 15 se ve que las componentes de $c\mathbf{a}$ son ca_1 y ca_2. Así que *para multiplicar un vector por un escalar se multiplica cada componente por ese escalar*.

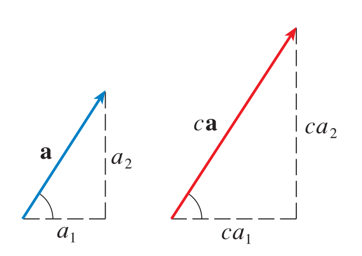


FIGURA 15

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

De manera similar, para vectores en tres dimensiones,

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

V EJEMPLO 4 Si $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -2, 1, 5 \rangle$, encuentre $|\mathbf{a}|$ y los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

SOLUCIÓN

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle + \langle -2, 1, 5 \rangle$$
$$= \langle 4 + (-2), 0 + 1, 3 + 5 \rangle = \langle 2, 1, 8 \rangle$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 4, 0, 3 \rangle - \langle -2, 1, 5 \rangle$$
$$= \langle 4 - (-2), 0 - 1, 3 - 5 \rangle = \langle 6, -1, -2 \rangle$$

$$3\mathbf{b} = 3\langle -2, 1, 5 \rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(5) \rangle = \langle -6, 3, 15 \rangle$$

$$2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = 2\langle 4, 0, 3 \rangle + 5\langle -2, 1, 5 \rangle$$
$$= \langle 8, 0, 6 \rangle + \langle -10, 5, 25 \rangle = \langle -2, 5, 31 \rangle$$

□

Se denota mediante V_2 el conjunto de los vectores en dos dimensiones y con V_3 el conjunto de los vectores en tres dimensiones. De manera más general, después se necesitará considerar el conjunto V_n de los vectores n-dimensionales. Un vector n-dimensional es una n-ada ordenada:

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales que se llaman las componentes de **a**. La suma y la multiplicación escalar se definen en términos de componentes sólo para los casos $n = 2$ y $n = 3$.

■ Los vectores en n dimensiones se emplean para listar varias cantidades de una manera organizada. Por ejemplo, las componentes de un vector en seis dimensiones

$$\mathbf{p} = \langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 \rangle$$

podrían representar los precios de seis ingredientes distintos requeridos para hacer un producto particular. Los vectores en cuatro dimensiones $\langle x, y, z, t \rangle$ se emplean en teoría de la relatividad, donde las primeras tres componentes especifican una posición en el espacio y la cuarta representa el tiempo.

PROPIEDADES DE VECTORES Si **a**, **b**, y **c** son vectores en V_n y c y d son escalares, entonces

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	**2.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	**4.** $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$	**6.** $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$	**8.** $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Estas ocho propiedades de vectores se pueden comprobar fácilmente ya sea en forma geométrica o algebraica. Por ejemplo, la propiedad 1 se puede ver de la figura 4 (es equivalente a la ley del paralelogramo) o como sigue para el caso $n = 2$:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1, a_2 \rangle + \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$$
$$= \langle b_1 + a_1, b_2 + a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle + \langle a_1, a_2 \rangle$$
$$= \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Q
c
(a + b) + c
= a + (b + c)
a + b
b + c
b
P
a

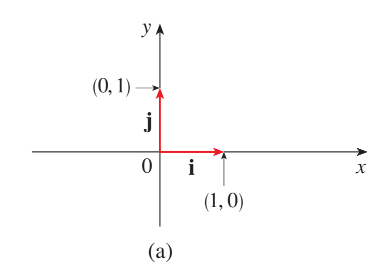
FIGURA 16

Se puede ver por qué la propiedad 2 (la ley asociativa) es cierta al observar la figura 16 y aplicar la ley del triángulo varias veces: El vector $\overrightarrow{PQ}$ se obtiene ya sea al construir primero $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y sumar después **c** o al sumar **a** al vector $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Tres vectores en V_3 juegan un papel especial. Sean

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Estos vectores **i**, **j** y **k** se denominan **vectores base estándar**. Tienen longitud 1 y apuntan en las direcciones de los ejes positivos x, y y z. De manera similar, en dos dimensiones se define $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. (Véase figura 17.)



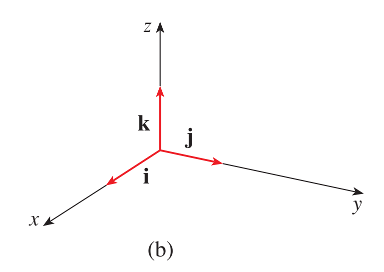


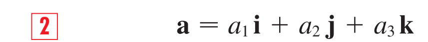
FIGURA 17

Vectores base estándar en V_2 y V_3

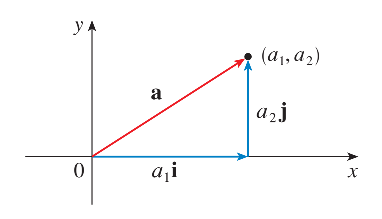
Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, entonces se puede escribir

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$

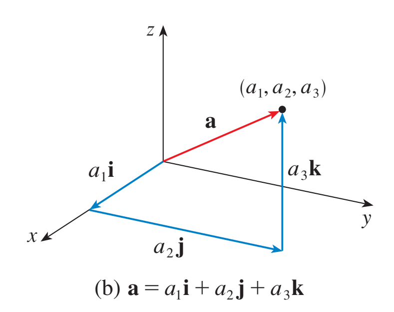
$$= a_1\langle 1, 0, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1, 0 \rangle + a_3\langle 0, 0, 1 \rangle$$



2 $$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}$$



(a) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

FIGURA 18

Así, cualquier vector en V_3 se puede expresar en términos de los **vectores base estándar i, j** y **k**. Por ejemplo,

$$\langle 1, -2, 6 \rangle = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

De manera similar, en dos dimensiones, se puede escribir

3 $$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$$

Véase en la figura 18 la interpretación geométrica de las ecuaciones 3 y 2 y compare con la figura 17.

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, exprese el vector $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ en términos de **i**, **j** y **k**.

SOLUCIÓN Se emplean las propiedades 1, 2, 5, 6 y 7 de los vectores para obtener

$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + 3(4\mathbf{i} + 7\mathbf{k})$$

$$= 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k} + 12\mathbf{i} + 21\mathbf{k} = 14\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$ □

Un **vector unitario** es un vector cuya longitud es 1. Por ejemplo, **i**, **j** y **k** son vectores unitarios. En general, si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces el vector unitario que tiene la misma dirección que **a** es

4 $$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

A fin de comprobar esto, sea $c = 1/|\mathbf{a}|$. Entonces $\mathbf{u} = c\mathbf{a}$ y c es un escalar positivo, así que **u** tiene la misma dirección que **a**. También,

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1$$

EJEMPLO 6 Encuentre el vector unitario en la dirección del vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN El vector dado tiene longitud

$$|2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

así, por la ecuación 4, el vector unitario con la misma dirección es

$$\tfrac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \tfrac{2}{3}\mathbf{i} - \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$$ □

APLICACIONES

Los vectores son útiles en muchos aspectos de física e ingeniería. En el capítulo 13 se verá cómo describir la velocidad y la aceleración de objetos que se mueven en el espacio. Aquí se examinan fuerzas.

Una fuerza se representa mediante un vector porque tiene una magnitud (medida en libras o newtons) y una dirección. Si sobre un objeto actúan varias fuerzas, la **fuerza resultante** que experimenta el objeto es la suma vectorial de estas fuerzas.

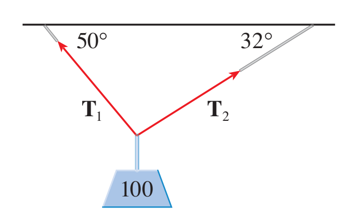


FIGURA 19

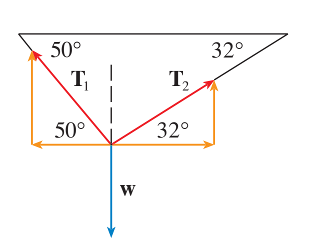


FIGURA 20

EJEMPLO 7 Una pesa de 100 lb cuelga de dos alambres como se muestra en la figura 19. Determine las tensiones (fuerzas) $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en ambos alambres y sus magnitudes.

SOLUCIÓN Se expresa primero $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en términos de sus componentes horizontal y vertical. De la figura 20 se ve que

5 $$\mathbf{T}_1 = -|\mathbf{T}_1| \cos 50°\, \mathbf{i} + |\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50°\, \mathbf{j}$$

6 $$\mathbf{T}_2 = |\mathbf{T}_2| \cos 32°\, \mathbf{i} + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32°\, \mathbf{j}$$

La resultante $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ de las tensiones contrarresta el peso $\mathbf{w}$ y, por lo tanto, se debe tener

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 = -\mathbf{w} = 100\mathbf{j}$$

Así,

$$\left(-|\mathbf{T}_1| \cos 50° + |\mathbf{T}_2| \cos 32°\right)\mathbf{i} + \left(|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32°\right)\mathbf{j} = 100\mathbf{j}$$

Al igualar componentes, se obtiene

$$-|\mathbf{T}_1| \cos 50° + |\mathbf{T}_2| \cos 32° = 0$$
$$|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + |\mathbf{T}_2| \operatorname{sen} 32° = 100$$

Al despejar $|\mathbf{T}_2|$ de la primera de estas ecuaciones y sustituir en la segunda, se obtiene

$$|\mathbf{T}_1| \operatorname{sen} 50° + \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50°}{\cos 32°} \operatorname{sen} 32° = 100$$

Así, las magnitudes de las tensiones son

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{100}{\operatorname{sen} 50° + \tan 32° \cos 50°} \approx 85.64 \text{ lb}$$

y $$|\mathbf{T}_2| = \frac{|\mathbf{T}_1| \cos 50°}{\cos 32°} \approx 64.91 \text{ lb}$$

Al sustituir estos valores en (5) y (6), se obtienen los vectores de tensión

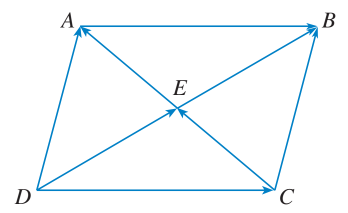
$$\mathbf{T}_1 \approx -55.05\,\mathbf{i} + 65.60\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{T}_2 \approx 55.05\,\mathbf{i} + 34.40\,\mathbf{j}$$ □

12.2 EJERCICIOS

1. ¿Las siguientes cantidades son vectores o escalares? Explique.
(a) El costo de un boleto de teatro.
(b) La corriente en un río.
(c) La trayectoria de vuelo inicial de Houston a Dallas.
(d) La población del mundo.

2. ¿Cuál es la relación entre el punto $(4, 7)$ y el vector $\langle 4, 7\rangle$? Ilustre con un bosquejo.

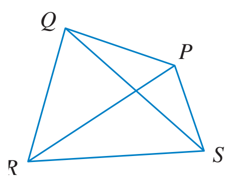
3. Nombre los vectores iguales en el paralelogramo mostrado.



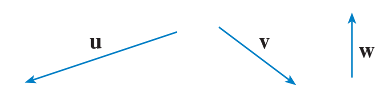
4. Escriba cada combinación de vectores como un solo vector.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$

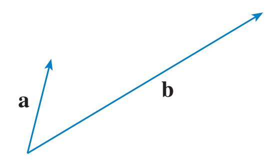
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



5. Copie los vectores de la figura y empléelos para dibujar los siguientes vectores.
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$
(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$



6. Copie los vectores de la figura y utilícelos para dibujar los siguientes vectores.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
(c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$
(e) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$



7–12 Encuentre un vector $\mathbf{a}$ con la representación dada por el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$. Dibuje $\overrightarrow{AB}$ y la representación equivalente empezando en el origen.

7. $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ **8.** $A(-2, -2)$, $B(5, 3)$

9. $A(-1, -1)$, $B(2, 2)$ **10.** $A(2, 1)$, $B(0, 6)$

11. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **12.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

13–16 Encuentre la suma de los vectores dados e ilustre geométricamente.

13. $\langle -1, 4\rangle$, $\langle 6, -2\rangle$ **14.** $\langle -2, -1\rangle$, $\langle 5, 7\rangle$

15. $\langle 0, 1, 2\rangle$, $\langle 0, 0, -3\rangle$ **16.** $\langle -1, 0, 2\rangle$, $\langle 0, 4, 0\rangle$

17–20 Encuentre $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

17. $\mathbf{a} = \langle 5, -12\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -6\rangle$

18. $\mathbf{a} = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\,\mathbf{j}$

19. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = 2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$

21–23 Halle un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

21. $-3\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j}$ **22.** $\langle -4, 2, 4\rangle$

23. $8\,\mathbf{i} - \mathbf{i} + 4\,\mathbf{k}$

24. Determine un vector que tenga la misma dirección que $\langle -2, 4, 2\rangle$ pero tiene longitud 6.

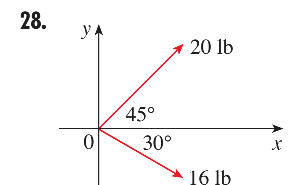
25. Si $\mathbf{v}$ se encuentra en el primer cuadrante y forma un ángulo $\pi/3$ con el eje x positivo y $|\mathbf{v}| = 4$, determine $\mathbf{v}$ en forma de componentes.

26. Si un niño jala un trineo por la nieve con una fuerza de 50 N ejercida a un ángulo de 38° arriba de la horizontal, encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

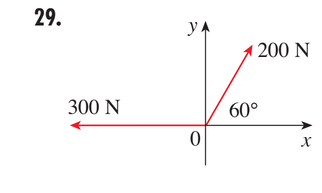
27. Un mariscal de campo lanza un balón con ángulo de elevación de 40° y una velocidad de 60 ft/s. Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector velocidad.

28–29 Encuentre la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con el eje x positivo.

28.



29.

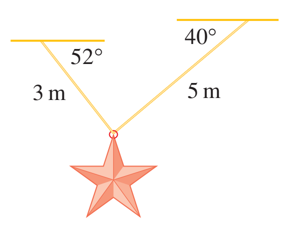


30. La magnitud de un vector de velocidad se llama *rapidez*. Suponga que un viento sopla desde la dirección N45°W a una rapidez de 50 km/h. (Esto significa que la dirección desde la que sopla el viento es 45° al oeste de la dirección norte). Un piloto dirige

un avión en la dirección N60°E a una rapidez de aire (rapidez en aire tranquilo) de 250 km/h. El *curso verdadero*, o *ruta*, del avión es la dirección de la resultante de los vectores de velocidad del avión y el viento. La *rapidez absoluta* del avión es la magnitud de la resultante. Encuentre el curso verdadero y la rapidez absoluta del avión.

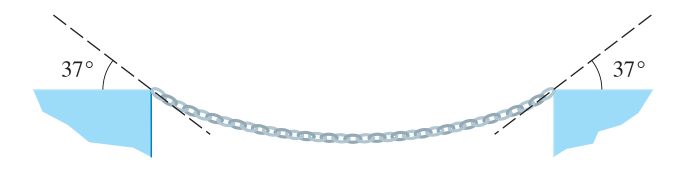
31. Una mujer camina al oeste en la cubierta de un barco a 3 millas/h. El barco se mueve al norte a una velocidad de 22 millas/h. Encuentre la rapidez y la dirección de la mujer respecto a la superficie del agua.

32. Cuerdas de 3 m y 5 m de longitud están atadas a una estrella decorativa suspendida sobre una plaza principal. La decoración tiene una masa de 5 kg. Las cuerdas, sujetadas a distintas alturas, forman ángulos de 52° y 40° con la horizontal. Encuentre la tensión en cada alambre y la magnitud de cada tensión.



33. Un tendedero está atado entre dos postes separados 8 m. La línea está bastante tensa y tiene una comba insignificante. Cuando se cuelga una camisa húmeda con una masa de 0.8 kg a la mitad de la línea, el punto medio baja 8 cm. Determine la tensión en cada mitad del tendedero.

34. La tensión **T** en cada extremo de la cadena tiene magnitud 25 N. ¿Cuál es el peso de la cadena?



35. Encuentre los vectores unitarios que sean paralelos a la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (2, 4).

36. (a) Encuentre los vectores unitarios que sean paralelos a la recta tangente a la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/6, 1)$.
(b) Encuentre los vectores unitarios que sean perpendiculares a la recta tangente.
(c) Trace la curva $y = 2 \operatorname{sen} x$ y los vectores en las partes (a) y (b), todos comenzando en $(\pi/6, 1)$.

37. Si A, B y C son los vértices de un triángulo, determine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

38. Sea C el punto sobre el segmento de recta AB que está al doble de distancia de lo que está de A. Si $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, y $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$, muestre que $\mathbf{c} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

39. (a) Dibuje los vectores $\mathbf{a} = \langle 3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 7, 1 \rangle$.
(b) Muestre, por medio de un bosquejo, que hay escalares s y t tales que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.
(c) Use el bosquejo para estimar los valores de s y t.
(d) Encuentre los valores exactos de s y t.

40. Suponga que **a** y **b** son vectores no nulos que no son paralelos y **c** es cualquier vector en el plano determinado por **a** y **b**. Dé un argumento geométrico para mostrar que **c** se puede escribir como $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para escalares apropiados s y t. Después dé un argumento por medio de componentes.

41. Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, describa el conjunto de los puntos (x, y, z) tal que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = 1$.

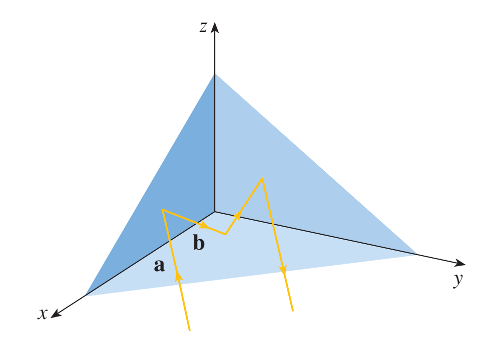
42. Si $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ y $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, describa el conjunto de los puntos (x, y) tal que $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = k$, donde $k > |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

43. En la figura 16 se da una demostración geométrica de la propiedad 2 de los vectores. Use las componentes para dar una demostración algebraica de este hecho para el caso $n = 2$.

44. Demuestre en forma algebraica la propiedad 5 de los vectores para el caso $n = 3$. Después use triángulos semejantes para dar una demostración geométrica.

45. Use vectores para demostrar que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

46. Suponga que los tres planos coordenados poseen espejos y que un rayo luminoso dado por el vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ choca primero con el plano xz, como se muestra en la figura. Use el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para mostrar que la dirección del rayo reflejado está dada por $\mathbf{b} = \langle a_1, -a_2, a_3 \rangle$. Deduzca que, después de ser reflejado por los tres espejos mutuamente perpendiculares, el rayo resultante es paralelo al rayo inicial. (Los científicos espaciales estadounidenses emplearon este principio, junto con rayos láser y una configuración de espejos esquinados sobre la Luna, para calcular de manera muy precisa la distancia de la Tierra a la Luna).



12.3 PRODUCTO PUNTO

Hasta el momento se han sumado dos vectores y multiplicado un vector por un escalar. Surge la pregunta: ¿es posible multiplicar dos vectores de modo que su producto sea una cantidad útil? El resultado es el producto punto, cuya definición se da a continuación. Otro es el producto cruz, que se analiza en la siguiente sección.

1 DEFINICIÓN Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el **producto punto** de **a** y **b** es el número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Así, para hallar el producto punto de **a** y **b** se multiplican las componentes correspondientes y se suman. El resultado no es un vector. Es un número real, es decir, un escalar. Por esta razón, el producto punto se llama a veces **producto escalar** (o **producto interior**). Aunque la definición 1 se da para vectores tridimensionales, el producto punto de vectores bidimensionales se define de un modo similar:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

V EJEMPLO 1

$$\langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 3, -1 \rangle = 2(3) + 4(-1) = 2$$

$$\langle -1, 7, 4 \rangle \cdot \left\langle 6, 2, -\tfrac{1}{2} \right\rangle = (-1)(6) + 7(2) + 4\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

$$(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 1(0) + 2(2) + (-3)(-1) = 7$$

□

El producto punto obedece muchas de las leyes que se cumplen para productos ordinarios de números reales. Éstas se expresan en el siguiente teorema.

2 PROPIEDADES DEL PRODUCTO PUNTO Si **a**, **b** y **c** son vectores en V_3 y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$

5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

Estas propiedades se demuestran fácilmente por medio de la definición 1. Por ejemplo, aquí están las demostraciones de las propiedades 1 y 3:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2$

3.
$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle \\
&= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
&= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\
&= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\
&= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}
\end{aligned}$$

Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicios. □

Al producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se le puede dar una interpretación geométrica en términos del **ángulo θ entre a y b**, que se define como el ángulo entre las representaciones de **a** y **b** que

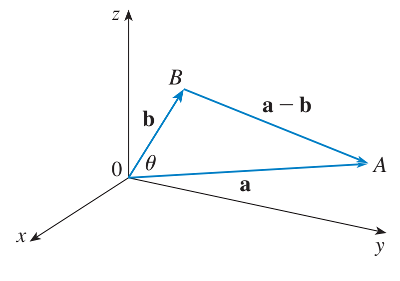


FIGURA 1

empiezan en el origen, donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. En otras palabras, θ es el ángulo entre los segmentos de recta $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ en la figura 1. Note que si **a** y **b** son vectores paralelos, entonces $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

Los físicos emplean la fórmula del siguiente teorema como la *definición* del producto punto.

3 TEOREMA Si θ es el ángulo entre los vectores **a** y **b**, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

DEMOSTRACIÓN Si se aplica la ley de los cosenos al triángulo OAB en la figura 1, se obtiene

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB| \cos \theta \tag{4}$$

(Observe que la ley de los cosenos aún se aplica en casos límite cuando $\theta = 0$ o π, o $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.) Pero $|OA| = |\mathbf{a}|$, $|OB| = |\mathbf{b}|$ y $|AB| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, de modo que la ecuación 4 se convierte en

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta \tag{5}$$

Al usar las propiedades 1, 2 y 3 del producto punto, se puede reescribir el lado izquierdo de esta ecuación como sigue:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación 5 da

$$|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

Así, $$-2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$

o bien, $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$$ □

EJEMPLO 2 Si los vectores **a** y **b** tienen longitudes 4 y 6, y el ángulo entre ellos es $\pi/3$, encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

SOLUCIÓN Con el teorema 3, se tiene

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\pi/3) = 4 \cdot 6 \cdot \tfrac{1}{2} = 12$$ □

La fórmula del teorema 3 permite hallar también el ángulo entre dos vectores.

6 COROLARIO Si θ es el ángulo entre los vectores no nulos **a** y **b**, entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

V EJEMPLO 3 Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 5, -3, 2 \rangle$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3 \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{38}$$

y puesto que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(5) + 2(-3) + (-1)(2) = 2$$

se tiene, del corolario 6,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{2}{3\sqrt{38}}$$

Así que el ángulo entre **a** y **b** es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 1.46 \quad (\text{u } 84^\circ)$$ □

Los vectores no nulos **a** y **b** se llaman **perpendiculares** u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\theta = \pi/2$. Entonces el teorema 3 da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\pi/2) = 0$$

y a la inversa si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, entonces $\cos\theta = 0$, por lo tanto, $\theta = \pi/2$. El vector **0** es considerado perpendicular a los vectores. En consecuencia, se tiene el siguiente método para determinar si dos vectores son ortogonales.

7 **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

EJEMPLO 4 Muestre que $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

estos vectores son perpendiculares por (7). □

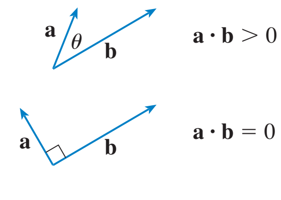


FIGURA 2

TEC Visual 12.3A muestra una animación de la figura 2.

Debido a que $\cos\theta > 0$ si $0 \leqslant \theta < \pi/2$ y $\cos\theta < 0$ si $\pi/2 < \theta \leqslant \pi$, se ve que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es positivo para $\theta < \pi/2$ y negativo para $\theta > \pi/2$. Se puede considerar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ como medida del grado al que **a** y **b** apuntan en la misma dirección. El producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es positivo si **a** y **b** apuntan en la misma dirección general, 0 si son perpendiculares y negativo si apuntan en direcciones opuestas generalmente (véase figura 2). En el caso extremo donde **a** y **b** apuntan en exactamente la misma dirección, se tiene $\theta = 0$, así que $\cos\theta = 1$ y

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Si **a** y **b** apuntan en exactamente direcciones opuestas, entonces $\theta = \pi$ y, por lo tanto, $\cos\theta = -1$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

ÁNGULOS Y COSENOS DIRECTORES

Los **ángulos directores** de un vector **a** diferente de cero son los ángulos α, β y γ (en el intervalo $[0, \pi]$) que **a** forma con los ejes positivos x, y y z (véase la figura 3).

Los cosenos de estos ángulos directores, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$, se llaman **cosenos directores** de un vector **a**. Si se emplea el corolario con **i** en lugar de **b**, se obtiene



8 $$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

(Esto se puede ver directamente de la figura 3.)

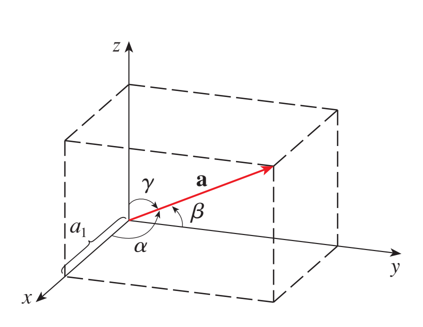


FIGURA 3

De manera similar, se tiene también

9 $$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Al elevar al cuadrado las expresiones de las ecuaciones 8 y 9, y sumar, se ve que

10 $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Se pueden usar también las ecuaciones 8 y 9 para escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle |\mathbf{a}| \cos\alpha, |\mathbf{a}| \cos\beta, |\mathbf{a}| \cos\gamma \rangle \\ &= |\mathbf{a}| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

11 $$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

la cual dice que los cosenos directores de **a** son las componentes del vector unitario en la dirección de **a**.

EJEMPLO 5 Encuentre los ángulos de dirección del vector $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$.

SOLUCIÓN Puesto que $|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, las ecuaciones 8 y 9 dan

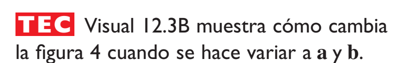
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

y, por lo tanto,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74° \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58° \qquad \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37°$$ □

PROYECCIONES

En la figura 4 se muestran las representaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de dos vectores **a** y **b** con el mismo punto inicial P. Si S es el pie de la perpendicular de R a la recta que contiene a $\overrightarrow{PQ}$, entonces el vector con representación $\overrightarrow{PS}$ se llama **vector proyección** de **b** sobre **a** y se denota por $\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. Puede pensarlo como una sombra de **b**.



Visual 12.3B muestra cómo cambia la figura 4 cuando se hace variar a **a** y **b**.

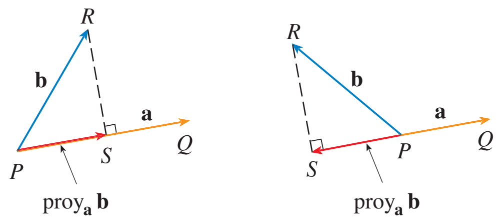


FIGURA 4
Proyecciones de vectores

La **proyección escalar** de **b** sobre **a** (llamada también la **componente de b a lo largo de a**) se define como la magnitud de la proyección vectorial, que es el número $|\mathbf{b}| \cos\theta$,

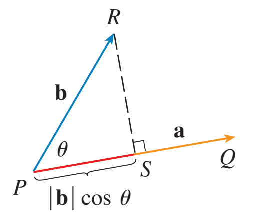


FIGURA 5
Proyección escalar

donde θ es el ángulo entre **a** y **b**. (Véase la figura 5). Esto se denota por $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$. Observe que es negativa si $\pi/2 < \theta \leq \pi$. La ecuación

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \cos\theta)$$

muestra que el producto punto de **a** y **b** se puede interpretar como la longitud de **a** multiplicada por la proyección escalar de **b** sobre **a**. Puesto que

$$|\mathbf{b}| \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b}$$

la componente de **b** a lo largo de **a** se calcula tomando el producto punto de **b** con el vector unitario en la dirección de **a**. Estas ideas se resumen como sigue.

Proyección escalar de **b** sobre **a**: $\quad \text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

Proyección vectorial de **b** sobre **a**: $\quad \text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right)\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\,\mathbf{a}$

Observe que la proyección vectorial es la proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**.

V EJEMPLO 6 Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 2 \rangle$ sobre $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 1 \rangle$.

SOLUCIÓN Puesto que $|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$, la proyección escalar de **b** sobre **a** es

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1) + 3(1) + 1(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La proyección vectorial es esta proyección escalar multiplicada por el vector unitario en la dirección de **a**:

$$\text{proy}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{3}{\sqrt{14}}\,\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{14}\,\mathbf{a} = \left\langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14} \right\rangle$$ □

Un uso de las proyecciones ocurre en física para calcular el trabajo. En la sección 6.4, se define el trabajo hecho por una fuerza constante F al mover un objeto por una distancia d como $W = Fd$, pero esto se aplica sólo cuando la fuerza se dirige a lo largo de la línea de movimiento del objeto. Sin embargo, suponga que la fuerza constante es un vector $\mathbf{F} = \overrightarrow{PR}$ que apunta en alguna otra dirección como en la figura 6. Si la fuerza mueve al objeto de P a O, entonces el **vector de desplazamiento** es $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$. El **trabajo** hecho por esta fuerza se define como el producto de la componente de la fuerza a lo largo de **D** y la distancia recorrida:

$$W = (|\mathbf{F}| \cos\theta)|\mathbf{D}|$$

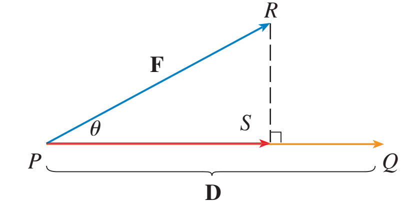


FIGURA 6

Pero entonces, del teorema 3, se tiene

12 $$W = |\mathbf{F}||\mathbf{D}| \cos\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

Así, el trabajo hecho por una fuerza constante **F** es el producto punto **F** · **D**, donde **D** es el vector de desplazamiento.

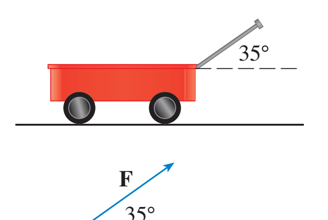


FIGURA 7

EJEMPLO 7 Un carrito es jalado una distancia de 100 m a lo largo de una trayectoria horizontal por una fuerza constante de 70 N. La manija del carrito se mantiene a un ángulo de 35° sobre la horizontal.

SOLUCIÓN Si **F** y **D** son los vectores de fuerza y desplazamiento, como se ilustra en la figura 7, entonces el trabajo hecho es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = |\mathbf{F}||\mathbf{D}| \cos 35°$$

$$= (70)(100) \cos 35° \approx 5734 \text{ N·m} = 5734 \text{ J}$$ □

EJEMPLO 8 Una fuerza está dada por un vector $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y mueve una partícula del punto $P(2, 1, 0)$ al punto $Q(4, 6, 2)$. Encuentre el trabajo hecho.

SOLUCIÓN El vector de desplazamiento es $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2, 5, 2 \rangle$, así que por la ecuación 12, el trabajo hecho es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \langle 3, 4, 5 \rangle \cdot \langle 2, 5, 2 \rangle$$

$$= 6 + 20 + 10 = 36$$

Si la unidad de longitud está en metros y la magnitud de la fuerza se mide en newtons, entonces el trabajo hecho es 16 joules. □

12.3 EJERCICIOS

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son significativas? ¿Cuáles carecen de sentido? Explique.
(a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2. Encuentre el producto punto de dos vectores si sus longitudes son 6 y $\frac{1}{3}$ y el ángulo entre ellos es $\pi/4$.

3–10 Encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

3. $\mathbf{a} = \langle -2, \frac{1}{3} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 12 \rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle -2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0.7, 1.2 \rangle$

5. $\mathbf{a} = \langle 4, 1, \frac{1}{4} \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -3, -8 \rangle$

6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$

7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

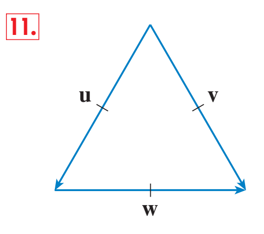
8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 5$, el ángulo entre **a** y **b** es $2\pi/3$

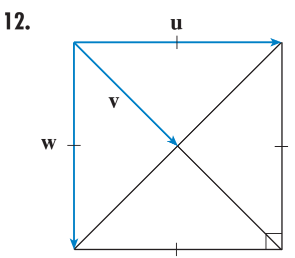
10. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{6}$, el ángulo entre **a** y **b** es 45°

11–12 Si **u** es un vector unitario, encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Demuestre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
(b) Demuestre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

14. Un vendedor ambulante vende a hamburguesas, b hot dogs y c bebidas carbonatadas en un día específico. Cobra \$2 por una hamburguesa, \$1.50 por un hot dog y \$1 por una bebida carbonatada. Si $\mathbf{A} = \langle a, b, c \rangle$ y $\mathbf{P} = \langle 2, 1.5, 1 \rangle$, ¿cuál es el significado del producto punto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

15–20 Encuentre el ángulo entre los vectores. (Primero encuentre una expresión exacta y luego aproxime hasta el grado más próximo.)

15. $\mathbf{a} = \langle -8, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle \sqrt{7}, 3 \rangle$

16. $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 5 \rangle$

17. $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4, 3 \rangle$

18. $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 0 \rangle$

19. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

21–22 Encuentre, correctos hasta el grado más próximo, los tres ángulos del triángulo con los vértices dados.

21. $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$

22. $D(0, 1, 1)$, $E(-2, 4, 3)$, $F(1, 2, -1)$

23–24 Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$
(c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$
(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

25. Use vectores para decidir si el triángulo con vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$ y $R(6, -2, -5)$ es rectángulo.

26. ¿Para qué valores de b son ortogonales los vectores $\langle -6, b, 2 \rangle$ y $\langle b, b^2, b \rangle$?

27. Encuentre un vector unitario que es ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Encuentre dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60º con $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29–33 Halle los cosenos directores y los ángulos directores del vector. (Dé los ángulos directores correctos hasta el grado más próximo.)

29. $\langle 3, 4, 5 \rangle$

30. $\langle 1, -2, -1 \rangle$

31. $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

32. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

33. $\langle c, c, c \rangle$, donde $c > 0$

34. Si un vector tiene ángulos directores $\alpha = \pi/4$ y $\beta = \pi/3$, encuentre el tercer ángulo director γ.

35–40 Encuentre el escalar y las proyecciones vectoriales de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$.

35. $\mathbf{a} = \langle 3, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0 \rangle$

36. $\mathbf{a} = \langle 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 1 \rangle$

37. $\mathbf{a} = \langle 3, 6, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2, 3 \rangle$

38. $\mathbf{a} = \langle -2, 3, -6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, -1, 4 \rangle$

39. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

40. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Muestre que el vector $\text{ort}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$. (Se llama una **proyección ortogonal** de $\mathbf{b}$).

42. Para los vectores del ejercicio 36, encuentre $\text{ort}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ e ilustre dibujando los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ y $\text{ort}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$.

43. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, encuentre el vector $\mathbf{b}$ tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = 2$.

44. Suponga que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no nulos.
(a) ¿Bajo qué circunstancias $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \text{comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$?
(b) ¿En qué circunstancias $\text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = \text{proy}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$?

45. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ que mueve un objeto del punto (0, 10, 8) al punto (6, 12, 20) a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

46. Un camión de remolque arrastra un auto a lo largo de un camino. La cadena forma un ángulo de 30° con el camino y la tensión en la cadena es de 1 500 N. ¿Cuánto trabajo es realizado por el camión al tirar del auto 1 kilómetro?

47. Un trineo es jalado por una cuerda a lo largo de un sendero nivelado. Una fuerza de 30 libras que actúa a un ángulo de 40° sobre la horizontal mueve al trineo 80 pies. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza.

48. Un bote navega al sur con ayuda de un viento que sopla en la dirección S36E° con magnitud de 400 libras. Encuentre el trabajo realizado por el viento cuando el bote se mueve 120 pies.

49. Use una proyección escalar para mostrar que la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a la línea $ax + by + c = 0$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Use esta fórmula para hallar la distancia del punto $(-2, 3)$ a la línea $3x - 4y + 5 = 0$.

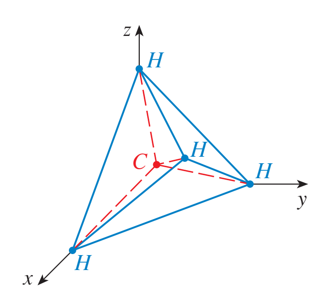
50. Si $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, demuestre que la ecuación vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{b}) = 0$ representa una esfera, y determine su centro y radio.

51. Encuentre el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.

52. Encuentre el ángulo entre una diagonal de un cubo y una diagonal de una de sus caras.

53. Una molécula de metano, CH_4, está estructurada con los cuatro átomos de hidrógeno en los vértices de un tetraedro regular y el átomo de carbono en el centroide. El *ángulo de enlace* es el ángulo formado por la combinación H—C—H; es el ángulo entre las líneas que unen al átomo de carbono con dos de los átomos de hidrógeno. Muestre que el ángulo de enlace es aproximadamente 109.5°. [*Sugerencia:* Tome los vértices del tetraedro como los puntos (1, 0, 0), (0, 1, 0),

(0, 0, 1) y (1, 1, 1) como se muestra en la figura. Entonces el centroide es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.]



54. Si $\mathbf{c} = |\mathbf{a}|\,\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\,\mathbf{a}$, donde **a**, **b** y **c** son los vectores no nulos, muestre que **c** biseca al ángulo entre **a** y **b**.

55. Demuestre las propiedades 2, 4 y 5 del producto punto (teorema 2).

56. Suponga que los lados de un cuadrilátero son de igual longitud y los lados opuestos son paralelos. Use métodos vectoriales para mostrar que las diagonales son perpendiculares.

57. Use el teorema 3 para demostrar la *desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$$

58. La *desigualdad del triángulo para vectores* es

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

(a) Dé una interpretación geométrica de la desigualdad del triángulo.
(b) Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz del ejercicio 57 para demostrar la desigualdad del triángulo. [*Sugerencia:* use el hecho de que $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y emplee la propiedad 3 del producto punto.]

59. La ley del paralelogramo establece que

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

(a) Dé una interpretación geométrica de la ley del paralelogramo.
(b) Demuestre la ley del paralelogramo. (Véase la sugerencia del ejercicio 58.)

60. Demuestre que si $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales, entonces los vectores **u** y **v** deben tener la misma longitud.

12.4 PRODUCTO CRUZ

El **producto cruz** $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores **a** y **b**, a diferencia del producto punto, es un vector. Por esta razón se llama **producto vectorial**. Note que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se define sólo cuando **a** y **b** son vectores *tridimensionales*.

1 DEFINICIÓN Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el **producto cruz** de **a** y **b** es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - a_1b_3,\, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

Esto podría parecer una forma extraña de definir un producto. La razón para la forma particular de la definición 1, es que el producto cruz definido en esta forma tiene muchas propiedades útiles, como se verá pronto. En particular, se mostrará que el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a **a** y **b**.

A fin de hacer la definición 1 más fácil de recordar, se usa la notación de determinantes. Un **determinante de orden 2** se define mediante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por ejemplo,
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$$

Un **determinante de orden 3** se puede definir en términos de determinantes de segundo orden como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \text{(2)}$$

Observe que en cada término del lado derecho de la ecuación 2 hay un número a_i en el primer renglón del determinante, y a_i se multiplica por el determinante de segundo orden obtenido del lado izquierdo al eliminar el renglón y la columna en la que aparece a_i. Observe también el signo menos en el segundo término. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0 - 4) - 2(6 + 5) + (-1)(12 - 0) = -38$$

Si ahora se reescribe la definición 1 usando los determinantes de segundo orden y los vectores base estándar **i**, **j** y **k**, se ve que el producto cruz de los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ es

3
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

En vista de la similitud entre las ecuaciones 2 y 3, con frecuencia se escribe

4
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Aunque el primer renglón del determinante simbólico en la ecuación 4 consta de vectores, si se desarrolla como si fuese un determinante ordinario por medio de la regla de la ecuación 2, se obtiene la ecuación 3. La fórmula simbólica de la ecuación 4 es probablemente la forma más fácil de recordar y calcular productos cruz.

V EJEMPLO 1 Si $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\mathbf{i} - (-5 - 8)\mathbf{j} + (7 - 6)\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$ □

V EJEMPLO 2 Muestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para cualquier vector **a** en V_3.

SOLUCIÓN Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2a_3 - a_3a_2)\mathbf{i} - (a_1a_3 - a_3a_1)\mathbf{j} + (a_1a_2 - a_2a_1)\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$ □

Una de las propiedades más importantes del producto cruz se da en el siguiente teorema.

5 TEOREMA El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

DEMOSTRACIÓN A fin de demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$, se calcula su producto punto como sigue:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\ &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

Un cálculo similar muestra que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. □

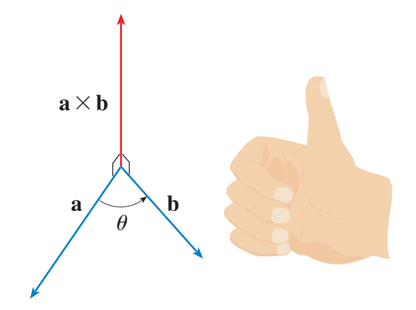


FIGURA 1

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se representan mediante segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial (como en la figura 1), entonces el teorema 5 dice que el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta en una dirección perpendicular al plano por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Resulta que la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por la *regla de la mano derecha*: si los dedos de su mano derecha se curvan en la dirección (por un ángulo de 180°) de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, entonces su dedo pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Ahora que se conoce la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, lo último que se necesita para completar su descripción geométrica es su longitud $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Ésta se determina mediante el siguiente teorema.



6 TEOREMA Si θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (de modo que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), entonces

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$

TEC Visual 12.4 muestra cómo cambia $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ cuando cambia $\mathbf{b}$.

DEMOSTRACIÓN De las definiciones del producto cruz y la longitud de un vector, se tiene

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\ &\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta \qquad \text{(por el Teorema 12.3.3)} \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Al tomar las raíces cuadradas y observar que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ porque $\operatorname{sen}\theta \geqslant 0$ cuando $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, se tiene

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta$$ □

Caracterización geométrica de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Puesto que un vector se determina por completo mediante su magnitud y dirección, ahora se puede decir que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el vector que es perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, cuya orientación se deter-

mina por la regla de la mano derecha, y cuya longitud es $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ sen θ. De hecho, así es exactamente como los físicos *definen* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

7 COROLARIO Dos vectores no nulos **a** y **b** son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

DEMOSTRACIÓN Dos vectores no nulos **a** y **b** son paralelos si y sólo si $\theta = 0$ o π. En cualquier caso sen $\theta = 0$, así que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. □

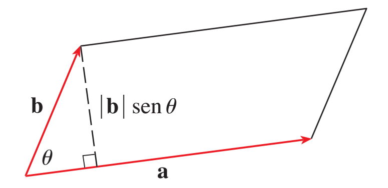


FIGURA 2

La interpretación geométrica del teorema 6 se puede ver examinando la figura 2. Si **a** y **b** se representan mediante segmentos de recta dirigidos con el mismo punto inicial, entonces determinan un paralelogramo con base $|\mathbf{a}|$, altitud $|\mathbf{b}|$ sen θ y área

$$A = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \operatorname{sen} \theta) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

Así, se tiene la siguiente forma de interpretar la magnitud de un producto cruz.

La extensión del producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es igual al área del paralelogramo determinado por **a** y **b**.

EJEMPLO 3 Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y, por lo tanto, es perpendicular al plano a través de P, Q y R. Se sabe de (12.2.1) que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\,\mathbf{i} + (5 - 4)\,\mathbf{j} + (-1 - 6)\,\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\,\mathbf{i} + (-1 - 4)\,\mathbf{j} + (1 - 6)\,\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Se calcula el producto cruz de estos vectores:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 - 35)\,\mathbf{i} - (15 - 0)\,\mathbf{j} + (15 - 0)\,\mathbf{k} = -40\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$$

Así que el vector $\langle -40, -15, 15\rangle$ es perpendicular al plano dado. Cualquier múltiplo escalar no nulo de este vector, como por ejemplo $\langle -8, -3, 3\rangle$, también es perpendicular al plano. □

EJEMPLO 4 Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 3 se calculó que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15\rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes PQ y PR es la longitud de este producto cruz:

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

El área A del triángulo PQR es la mitad del área de este paralelogramo, es decir $\frac{5}{2}\sqrt{82}$. □

Si se aplican los teoremas 5 y 6 a los vectores base estándar **i**, **j** y **k** con $\theta = \pi/2$, se obtiene

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Así, el producto cruz no es conmutativo. También,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

mientras que

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Así, la ley asociativa para la multiplicación por lo común no se cumple; es decir, en general,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Sin embargo, algunas de las leyes usuales del álgebra *se* cumplen para el producto cruz. En el siguiente teorema se resumen las propiedades de los productos vectoriales.

8 TEOREMA Si **a**, **b** y **c** son vectores y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

Estas propiedades se pueden demostrar si se escriben los vectores en términos de sus componentes y se usa la definición de un producto cruz. Se da una demostración de la propiedad 5 y se dejan las demostraciones restantes como ejercicios.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 5 Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, entonces

$$\boxed{9} \quad \begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

□

PRODUCTOS TRIPLES

El producto $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que se presenta en la propiedad 5 se denomina **triple producto escalar** de los vectores **a**, **b** y **c**. Observe de la ecuación 9 que puede escribir el triple producto escalar como un determinante:

$$\boxed{10} \qquad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

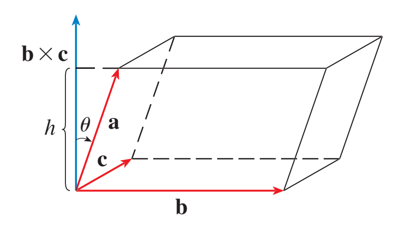


FIGURA 3

La importancia geométrica del triple producto escalar se puede ver considerando el paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** (figura 3). El área de la base del paralelogramo es $A = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$. Si θ es el ángulo entre **a** y $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$, entonces la altura h del paralelepípedo es $h = |\mathbf{a}||\cos\theta|$. (Se debe usar $|\cos\theta|$ en lugar de $\cos\theta$ en caso de que $\theta > \pi/2$.) Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo es

$$V = Ah = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}||\mathbf{a}||\cos\theta| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Así, se ha demostrado la fórmula siguiente.

11 El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores **a**, **b** y **c** es la magnitud de su triple producto escalar:

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|$$

Si se usa la fórmula en (11) y se descubre que el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0, entonces los vectores deben estar en el mimo plano; es decir, son **coplanares**.

V EJEMPLO 5 Use el producto escalar triple para mostrar que los vectores $\mathbf{a} = \langle 1, 4, -7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -9, 18\rangle$ son coplanares.

SOLUCIÓN Se usa la ecuación 10 para calcular su producto escalar triple:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(18) - 4(36) - 7(-18) = 0$$

Por lo tanto, por (11) el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c** es 0. Esto significa que **a**, **b** y **c** son coplanares. □

El producto $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ que se presenta en la propiedad 6 se denomina **triple producto vectorial** de **a**, **b** y **c**. La propiedad 6 se usará para derivar la primera ley de Kepler de movimiento planetario en el capítulo 13. Su prueba se deja como ejercicio 46.

PAR DE TORSIÓN

La idea de un producto cruz ocurre con frecuencia en física. En particular, se considera una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto dado por un vector de posición **r**. (Por ejemplo, si se aprieta un perno aplicando una fuerza a una llave como en la figura 4, se produce un efecto de giro). El **par de torsión** $\boldsymbol{\tau}$ (relativo al origen) se define como el producto cruz de los vectores de posición y fuerza

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

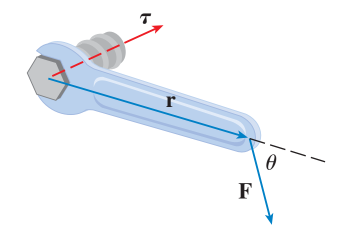


FIGURA 4

y mide la tendencia del cuerpo a girar respecto al origen. La dirección del par de torsión indica el eje de rotación. De acuerdo con el teorema 6, la magnitud del vector de par de torques es

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de posición y fuerza. Observe que la única componente de **F** que puede causar rotación es la que es perpendicular a **r**, es decir, $|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$. La magnitud del par de torsión es igual al área del paralelogramo determinado por **r** y **F**.

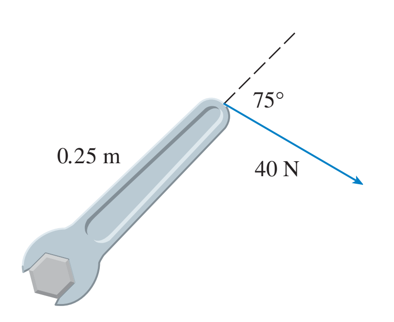


FIGURA 5

EJEMPLO 6 Se aprieta un perno aplicando una fuerza de 40 N a una llave de 0.25 m como se muestra en la figura 5. Encuentre la magnitud del par de torques respecto al centro del perno.

SOLUCIÓN La magnitud del vector del par de torques es

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75° = (0.25)(40) \operatorname{sen} 75°$$

$$= 10 \operatorname{sen} 75° \approx 9.66 \text{ N·m}$$

Si el perno tiene cuerda derecha, entonces el vector de par de torques es

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\,\mathbf{n} \approx 9.66\,\mathbf{n}$$

donde **n** es un vector unitario con dirección hacia la página. □

12.4 EJERCICIOS

1–7 Encuentre el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y compruebe que es ortogonal a **a** y **b**.

1. $\mathbf{a} = \langle 6, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 8, 0 \rangle$

2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 4, 6 \rangle$

3. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

4. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

5. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

8. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Trace **a**, **b** y $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vectores que se inician en el origen.

9–12 Encuentre el vector, no con determinantes, sino usando propiedades de productos cruz.

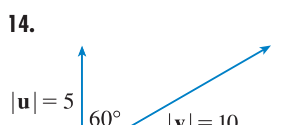
9. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{k}$ **10.** $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$

11. $(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i})$ **12.** $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} - \mathbf{j})$

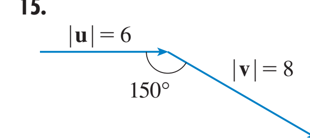
13. Diga si cada expresión es significativa. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si es un vector o un escalar.
(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

14–15 Encuentre $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ y determine si $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dirigido hacia la página o hacia afuera de ésta.

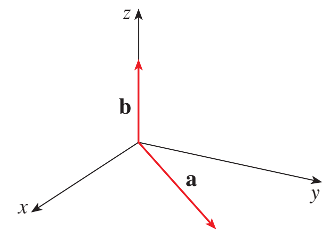
14.



15.



16. En la figura se muestra un vector **a** en el plano xy y un vector **b** en la dirección de **k**. Sus longitudes son $|\mathbf{a}| = 3$ y $|\mathbf{b}| = 2$.
(a) Encuentre $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
(b) Use la regla de la mano derecha para decidir si las componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ son positivas, negativas o 0.



17. Si $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

18. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$, muestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

19. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ y $\langle 0, 4, 4 \rangle$.

20. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

21. Muestre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{a}$ en V_3.

22. Muestre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en V_3.

23. Demuestre la propiedad 1 del teorema 8.

24. Demuestre la propiedad 2 del teorema 8.

25. Demuestre la propiedad 3 del teorema 8.

26. Demuestre la propiedad 4 del teorema 8.

27. Encuentre el área del paralelogramo con vértices $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(4, 2)$ y $D(2, -1)$.

28. Encuentre el área del paralelogramo con vértices $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$ y $N(3, 7, 3)$.

29–32 (a) Encuentre un vector ortogonal no cero al plano que pasa por los puntos P, Q y R, y (b) determine el área del triángulo PQR.

29. $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$

30. $P(2, 1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$, $R(3, 0, 6)$

31. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$

32. $P(-1, 3, 1)$, $Q(0, 5, 2)$, $R(4, 3, -1)$

33–34 Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$.

33. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

34. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

35–36 Halle el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes PQ, PR y PS.

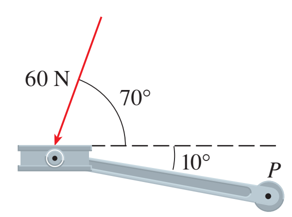
35. $P(2, 0, -1)$, $Q(4, 1, 0)$, $R(3, -1, 1)$, $S(2, -2, 2)$

36. $P(3, 0, 1)$, $Q(-1, 2, 5)$, $R(5, 1, -1)$, $S(0, 4, 2)$

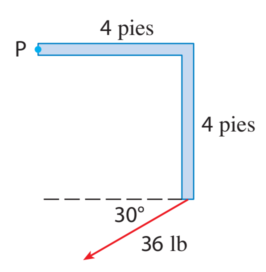
37. Use el producto escalar triple para verificar que los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ son coplanares.

38. Use el producto escalar triple para determinar si los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(3, -1, 6)$, $C(5, 2, 0)$ y $D(3, 6, -4)$ están en el mismo plano.

39. Un pedal de bicicleta es empujado por un pie con una fuerza de 60 N como se ilustra. El eje del pedal es de 18 cm de largo. Encuentre la magnitud del par de torsión respecto a P.



40. Determine la magnitud del par de torsión respecto a P si se aplica una fuerza de 36 lb como se muestra.



41. Una llave de 30 cm de largo yace a lo largo del eje y positivo y sujeta un perno en el origen. Se aplica una fuerza en la dirección $\langle 0, 3, -4 \rangle$ y al final de la llave. Encuentre la magnitud de la fuerza necesaria para suministrar 100 N·m de par de torsión al perno.

42. Sea $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ y sea $\mathbf{u}$ un vector con longitud 3 que empieza en el origen y gira en el plano xy. Encuentre los valores máximo y mínimo de la longitud del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. ¿En qué dirección apunta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

43. (a) Sea P un punto fuera de la línea L que pasa por los puntos Q y R. Muestre que la distancia d desde el punto P a la línea L es

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para hallar la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la línea que pasa por $Q(0, 6, 8)$ y $R(-1, 4, 7)$.

44. (a) Sea P un punto fuera del plano que pasa por los puntos Q, R y S. Muestre que la distancia d desde P al plano es

$$d = \frac{|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$$

donde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{QS}$ y $\mathbf{c} = \overrightarrow{QP}$.

(b) Use la fórmula del inciso (a) para hallar la distancia desde el punto $P(2, 1, 4)$ al plano que pasa por los puntos $Q(1, 0, 0)$, $R(0, 2, 0)$ y $S(0, 0, 3)$.

45. Demuestre que $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

46. Demuestre la propiedad 6 del teorema 8, es decir,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

47. Use el ejercicio 46 para demostrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

48. Demuestre que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{vmatrix}$$

49. Suponga que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

(a) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(b) Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

(c) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

50. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores no coplanares, sean

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)} \qquad \mathbf{k}_2 = \frac{\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$$

(Estos vectores ocurren en el estudio de la cristalografía. Vectores de la forma $n_1\mathbf{v}_1 + n_2\mathbf{v}_2 + n_3\mathbf{v}_3$, donde cada n_i es un entero, forman un *retículo* para un cristal. Vectores escritos de manera similar en términos de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}_3$ forman el *retículo recíproco*).

(a) Muestre que $\mathbf{k}_i$ es perpendicular a $\mathbf{v}_j$ si $i \neq j$.

(b) Muestre que $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{v}_i = 1$ para $i = 1, 2, 3$.

(c) Demuestre que $\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3) = \dfrac{1}{\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)}$.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

GEOMETRÍA DE UN TETRAEDRO

Un tetraedro es un sólido con cuatro vértices P, Q, R y S, y cuatro caras triangulares, como se muestra en la figura.

1. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ vectores con longitudes iguales a las áreas de las caras opuestas a los vértices, P, Q, R y S, respectivamente, y direcciones perpendiculares a las caras respectivas y que apuntan hacia afuera. Demuestre que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

2. El volumen V de un tetraedro es un tercio de la distancia de un vértice a la cara opuesta, multiplicada por el área de la cara.

(a) Encuentre una fórmula para el volumen de un tetraedro en términos de las coordenadas de sus vértices P, Q, R y S.

(b) Encuentre el volumen del tetraedro cuyos vértices son $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(1, 1, 2)$ y $S(3, -1, 2)$.

3. Suponga que el tetraedro de la figura tiene un vértice trirrectangular S. (Esto significa que los tres ángulos en S son ángulos rectos.) Sean A, B y C las áreas de las tres caras que satisfacen a S, y sea D el área de la cara opuesta PQR. Por medio del resultado del problema 1, o de otro modo, demuestre que

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

(Ésta es una versión tridimensional del teorema de Pitágoras.)

12.5 ECUACIONES DE RECTA Y PLANOS

Una recta en el plano xy se determina cuando se dan un punto sobre la recta o límite recta y la dirección de ésta (su pendiente o ángulo de inclinación). La ecuación de la recta se puede escribir entonces con la forma punto-pendiente.

De igual forma, una línea L en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sobre L y la dirección de L. En tres dimensiones la dirección de una recta se describe convenientemente por un vector, así que sea $\mathbf{v}$ un vector paralelo a L. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario sobre L y sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores posición de P_0 y P (es decir, tienen representaciones $\overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{OP}$). Si $\mathbf{a}$ es el vector con representación $\overrightarrow{P_0P}$, como en la figura 1, entonces la ley del triángulo para la suma de vectores da $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}$. Pero puesto que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son vectores paralelos, hay un escalar t tal que $\mathbf{a} = t\mathbf{v}$. Así

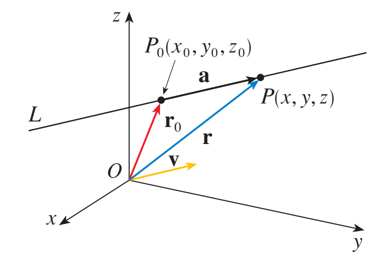


FIGURA 1

1 $$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

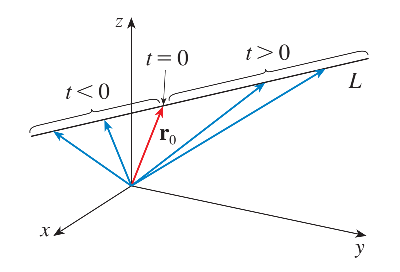


FIGURA 2

que es una **ecuación vectorial** de L. Cada valor del **parámetro** t da el vector de posición $\mathbf{r}$ de un punto sobre L. En otras palabras, cuando t varía, la línea es trazada por la punta del vector $\mathbf{r}$. Como indica la figura 2, sobre el lado de P_0 un punto no tiene, dados los valores positivos de t que corresponden a puntos P sobre L tal que $\overrightarrow{P_0P}$ tiene la misma dirección de $\vec{v}$ y si $t < 0$ tiene dirección opuesta.

Si el vector $\mathbf{v}$ que da la dirección de la línea L se escribe en forma de componente como $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$, entonces se tiene $t\mathbf{v} = \langle ta, tb, tc\rangle$. Se puede escribir también $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, por lo tanto la ecuación vectorial (1) se transforma en

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc\rangle$$

Dos vectores son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales. Por lo tanto, se tienen tres ecuaciones escalares:

2 $$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** de la línea L que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$. Cada valor del parámetro t da un punto (x, y, z) en L.

■ En la figura 3 se muestra la línea L del ejemplo 1 y su relación con el punto dado y con el vector que da su dirección.

EJEMPLO 1

(a) Encuentre una ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto (5, 1, 3) y es paralela al vector $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

(b) Encuentre otros dos puntos sobre la recta.

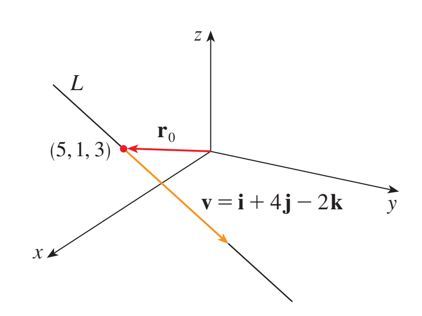


FIGURA 3

SOLUCIÓN

(a) Aquí $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3\rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, así que la ecuación vectorial (1) se convierte en

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

o bien $$\mathbf{r} = (5 + t)\,\mathbf{i} + (1 + 4t)\,\mathbf{j} + (3 - 2t)\,\mathbf{k}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

(b) La elección del valor de parámetro $t = 1$ da $x = 6$, $y = 5$ y $z = 1$, por lo tanto (6, 5, 1) es un punto sobre la recta. De manera similar, $t = -1$ da el punto $(4, -3, 5)$. □

La ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de una recta no son únicas. Si se cambia el punto o el parámetro, o se elige un vector paralelo diferente, entonces cambian las ecuaciones. Por ejemplo, si en lugar de (5, 1, 3), se elige el punto (6, 5, 1) en el ejemplo 1, entonces las ecuaciones paramétricas de la recta se convierten en

$$x = 6 + t \qquad y = 5 + 4t \qquad z = 1 - 2t$$

O bien, si se permanece con el punto (5, 1, 3) pero se elige un vector paralelo $2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, se llega a las ecuaciones

$$x = 5 + 2t \qquad y = 1 + 8t \qquad z = 3 - 4t$$

En general, si un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ se emplea para describir la dirección de una recta L, entonces los números a, b y c se llaman **números directores** de L. Puesto que se podría

usar cualquier vector paralelo a **v** se ve que tres números cualesquiera proporcionales a a, b y c se podrían usar también como un conjunto de números directores para L.

Otra forma de describir una recta L es eliminar el parámetro t de las ecuaciones 2. Si ninguna de las literales a, b o c es 0, se puede resolver cada una de estas ecuaciones para t, igualar los resultados y obtener

3
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones simétricas** de L. Observe que los números a, b y c que aparecen en los denominadores de las ecuaciones 3, son los números directores de L, es decir, las componentes de un vector paralelo a L. Si una de las literales a, b o c es 0, se puede eliminar a t. Por ejemplo, si $a = 0$, se podrían escribir las ecuaciones de L como

$$x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Esto significa que L yace en el plano vertical $x = x_0$.

■ En la figura 4 se muestra la línea L del ejemplo 2 y el punto P donde cruza al plano xy.

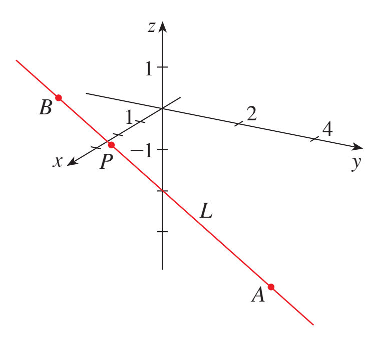


FIGURA 4

EJEMPLO 2

(a) Encuentre las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta que pasa a través de los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(3, -1, 1)$.

(b) ¿En qué punto interseca esta recta el plano xy?

SOLUCIÓN

(a) No se da de manera explícita un vector paralelo a la recta, pero observe que el vector **v** con representación $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a la recta y

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3) \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle$$

Así, los números directores son $a = 1$, $b = -5$ y $c = 4$. Si se toma el punto $(2, 4, -3)$ como P_0, se ve que las ecuaciones paramétricas (2) son

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

y las ecuaciones simétricas (3) son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

(b) La recta intersecta el plano xy cuando $z = 0$, así que se pone $z = 0$ en las ecuaciones simétricas y se obtiene

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

Esto da $x = \frac{11}{4}$ y $y = \frac{1}{4}$, así que la recta intersecta al plano xy en el punto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$. □

En general, el procedimiento del ejemplo 2 muestra que los números directores de la recta L que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ son $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, y $z_1 - z_0$, por lo tanto, las ecuaciones simétricas de L son

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Con frecuencia se necesita una descripción, no de una recta entera, sino de sólo un segmento de recta. ¿Cómo, por ejemplo, se podría describir el segmento de recta AB en el ejemplo 2? Si se escribe $t = 0$ en las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2(a), se obtiene el punto $(2, 4, -3)$ y si se escribe $t = 1$ se obtiene $(3, -1, 1)$. Así que el segmento de recta AB se describe mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o por la ecuación vectorial correspondiente

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + t, 4 - 5t, -3 + 4t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

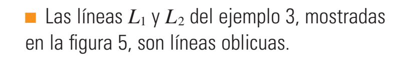
En general, se sabe de la ecuación 1 que la ecuación vectorial de una recta que pasa por (la punta del) vector $\mathbf{r}_0$ en la dirección de un vector $\mathbf{v}$ es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Si la recta pasa también por (la punta de) $\mathbf{r}_1$, entonces se puede tomar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ y, por lo tanto, su ecuación vectorial es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$$

El segmento de recta de $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ se determina mediante el intervalo paramétrico $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4 El segmento de recta $\mathbf{r}_0$ a $\mathbf{r}_1$ se determina mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$


Las líneas L_1 y L_2 del ejemplo 3, mostradas en la figura 5, son líneas oblicuas.

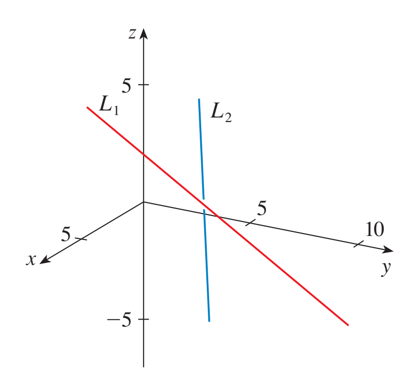


FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Demostrar que las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$
$$x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son **rectas oblicuas**; es decir, no se intersecan y no son paralelas (y, por lo tanto, no pertenecen al mismo plano).

SOLUCIÓN Las líneas no son paralelas porque los vectores correspondientes $\langle 1, 3, -1 \rangle$ y $\langle 2, 1, 4 \rangle$ no son paralelos. (Sus componentes no son proporcionales). Si L_1 y L_2 tuvieran un punto de intersección, habría valores de t y s tales que

$$1 + t = 2s$$
$$-2 + 3t = 3 + s$$
$$4 - t = -3 + 4s$$

Pero si se resuelven las dos primeras ecuaciones, se obtiene $t = \frac{11}{5}$ y $s = \frac{8}{5}$, y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. Por lo tanto, no hay valores de t y de s que satisfagan simultáneamente las tres ecuaciones. Así, L_1 y L_2 no se intersecan. En consecuencia, L_1 y L_2 son rectas oblicuas. □

PLANOS

Aunque una recta en el espacio se determina por un punto y una dirección, es más difícil describir un plano en el espacio. Un solo vector paralelo al plano es insuficiente para llevar la "dirección" del plano, pero un vector perpendicular al plano especifica por completo su dirección. Así, un plano en el espacio se determina por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano y un vector $\mathbf{n}$ que es ortogonal al plano. Este vector ortogonal $\mathbf{n}$ se llama **vector normal.** Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en el plano, y sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de P_0 y P. Entonces el vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ se representa por $\overrightarrow{P_0P}$. (Véase figura 6). El vector normal $\mathbf{n}$ es

FIGURA 6

ortogonal a todo vector en el plano dado. En particular, **n** es ortogonal a $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y, por lo tanto, se tiene

5 $$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

que se puede reescribir como

6 $$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$$

La ecuación 5 o la ecuación 6 reciben el nombre de **ecuación vectorial del plano**.

Para obtener una ecuación escalar del plano, se escribe $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$. Entonces la ecuación vectorial (5) se transforma en

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

o bien,

7 $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

La ecuación 7 es la **ecuación escalar del plano que pasa por** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **con vector normal** $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.

V EJEMPLO 4 Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$. Determine las intersecciones con los ejes y bosqueje el plano.

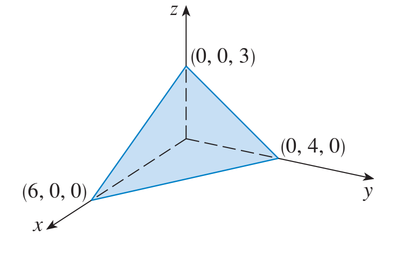


FIGURA 7

SOLUCIÓN Si se escribe $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $z_0 = -1$ en la ecuación 7, se ve que una ecuación del plano es

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

o bien,

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Para hallar la intersección con el eje x, se establece que $y = z = 0$ en esta ecuación y se obtiene $x = 6$. De manera similar, la intersección con el eje y es 4 y la intersección con el eje z es 3. Esto permite bosquejar la porción del plano que yace en el primer octante (véase figura 7). □

Al reunir los términos en la ecuación 7 como se hizo en el ejemplo 4, se puede reescribir la ecuación de un plano como

8 $$ax + by + cz + d = 0$$

donde $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. La ecuación 8 se llama **ecuación lineal** en x, y y z. A la inversa, se puede demostrar que si a, b y c no son 0, entonces la ecuación lineal (8) representa un plano con vector normal $\langle a, b, c \rangle$. (Véase el ejercicio 73.)

EJEMPLO 5 Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ y $R(5, 2, 0)$.

SOLUCIÓN Los vectores **a** y **b** que corresponden a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son

$$\mathbf{a} = \langle 2, -4, 4 \rangle \qquad \mathbf{b} = \langle 4, -1, -2 \rangle$$

■ En la figura 8 se muestra la porción del plano en el ejemplo 5 encerrada por el triángulo PQR.

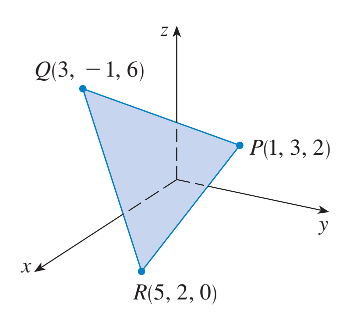


FIGURA 8

Puesto que **a** y **b** están en el plano, su producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal al plano y se puede tomar como el vector normal. Así,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

Con el punto $P(1, 3, 2)$ y el vector normal **n**, una ecuación del plano es

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0$$

o bien,

$$6x + 10y + 7z = 50$$ □

EJEMPLO 6 Encuentre el punto en el cual la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$ intersecta al plano $4x + 5y - 2z = 18$.

SOLUCIÓN Se sustituyen las expresiones para x, y y z de las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

Esto se simplifica a $-10t = 20$, así que $t = -2$. Por lo tanto, el punto de intersección ocurre cuando el valor del parámetro es $t = -2$. Entonces $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5 - 2 = 3$ y por consiguiente el punto de intersección es $(-4, 8, 3)$. □

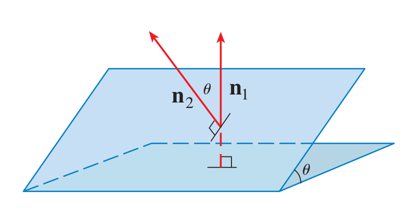


FIGURA 9

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Por ejemplo, los planos $x + 2y - 3z = 4$ y $2x + 4y - 6z = 3$ son paralelos porque sus vectores normales son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Si dos planos no son paralelos, entonces se intersectan en una recta y el ángulo entre los dos planos se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales (véase el ángulo θ en la figura 9).

■ En la figura 10 se muestran los planos del ejemplo 7 y su línea de intersección L.

V EJEMPLO 7

(a) Encuentre el ángulo entre los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$.

(b) Obtenga las ecuaciones simétricas para la recta de intersección L de estos dos planos.

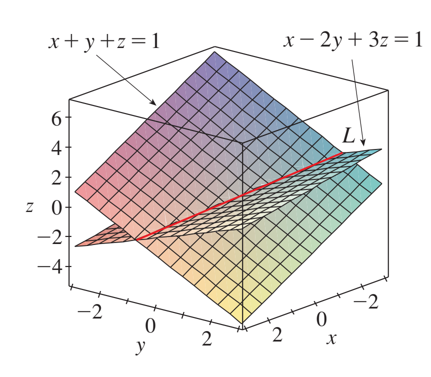


FIGURA 10

SOLUCIÓN

(a) Los vectores normales de estos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3 \rangle$$

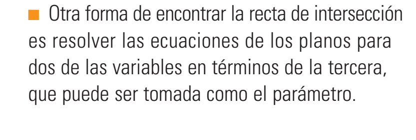
y, por lo tanto, si θ es el ángulo entre los planos, el corolario 12.3.6 da

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1 + 1 + 1}\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72°$$

(b) Primero se necesita hallar un punto sobre L. Por ejemplo, se puede hallar el punto donde la recta intersecta al plano xy si se establece $z = 0$ en las ecuaciones de ambos planos. Esto da las ecuaciones $x + y = 1$ y $x - 2y = 1$, cuya solución es $x = 1$, $y = 0$. Por lo tanto, el punto $(1, 0, 0)$ pertenece a la recta L.

Ahora se observa que, puesto que L yace en ambos planos, es perpendicular a los dos vectores normales. Así, un vector $\mathbf{v}$ paralelo a L está dado por el producto cruz


■ Otra forma de encontrar la recta de intersección es resolver las ecuaciones de los planos para dos de las variables en términos de la tercera, que puede ser tomada como el parámetro.

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

y, por lo tanto, las ecuaciones simétricas de L se pueden escribir como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$ □

NOTA Puesto que una ecuación lineal en (x, y, z) representa un plano y dos planos no paralelos se cortan en una recta, se deduce que dos ecuaciones lineales pueden representar una recta. Los puntos (x, y, z) que satisfacen a $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ están en ambos planos y, por lo tanto, el par de ecuaciones lineales representa la recta de intersección de los planos (si no son paralelos). Por ejemplo, en el ejemplo 7 la recta L se dio como la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$. Las ecuaciones simétricas que se encontraron para L se podrían escribir como

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

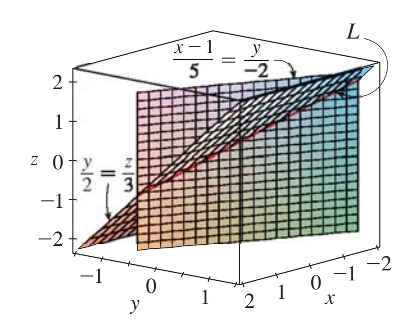


FIGURA 11

que es de nuevo un par de ecuaciones lineales. Exhiben a L como la recta de intersección de los planos $(x - 1)/5 = y/(-2)$ y $y/(-2) = z/(-3)$. (Véase figura 11).

En general, cuando se escriben las ecuaciones de una recta en la forma simétrica

■ En la figura 11 se muestra cómo la línea L del ejemplo 7 se puede considerar también como la línea de intersección de los planos deducidos de sus ecuaciones simétricas.

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

se puede considerar a la recta como la recta de intersección de los dos planos

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \qquad \text{y} \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

EJEMPLO 8 Encuentre una fórmula para la distancia D de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$.

SOLUCIÓN Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ cualquier punto en el plano dado y sea $\mathbf{b}$ el vector correspondiente a $\overrightarrow{P_0P_1}$. Entonces

$$\mathbf{b} = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$$

De la figura 12 se puede ver que la distancia D de P_1 al plano es igual al valor absoluto de la proyección escalar de $\mathbf{b}$ sobre el vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$. (Véase la sección 12.3.) Así,

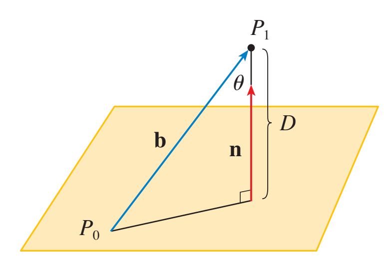


FIGURA 12

$$D = |\text{comp}_{\mathbf{n}}\,\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Puesto que P_0 yace en el plano, sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano y, por lo tanto, se tiene $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Así, la fórmula para D se puede escribir como

9
$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
□

EJEMPLO 9 Encuentre la distancia entre los planos paralelos $10x + 2y - 2z = 5$ y $5x + y - z = 1$.

SOLUCIÓN Primero se nota que los planos son paralelos porque sus vectores normales $\langle 10, 2, -2\rangle$ y $\langle 5, 1, -1\rangle$ son paralelos. Para hallar la distancia D entre los planos, se elige cualquier punto sobre un plano y se calcula su distancia al otro plano. En particular, si se escribe $y = z = 0$ en la ecuación del primer plano, se obtiene $10x = 5$ y, por lo tanto, $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ es un punto en este plano. Por la fórmula 9, la distancia entre $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y el plano $5x + y - z - 1 = 0$ es

$$D = \frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right) + 1(0) - 1(0) - 1\right|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Así que la distancia entre los planos es $\sqrt{3}/6$. □

EJEMPLO 10 En el ejemplo 3 se mostró que las rectas

$$L_1: \quad x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$
$$L_2: \quad x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son oblicuas. Encuentre la distancia entre ellas.

SOLUCIÓN Puesto que las dos rectas L_1 y L_2 son oblicuas, se puede considerar que yacen en dos planos paralelos P_1 y P_2. La distancia entre L_1 y L_2 es la misma que la distancia entre P_1 y P_2, que se puede calcular como en el ejemplo 9. El vector normal común para ambos planos debe ser ortogonal a $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$ (la dirección de L_1) y $\mathbf{v}_2 = \langle 2, 1, 4\rangle$ (la dirección de L_2). Así que un vector normal es

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

Si se escribe $s = 0$ en las ecuaciones de L_2, se obtiene el punto $(0, 3, -3)$ sobre L_2 y, por lo tanto, una ecuación para P_2 es

$$13(x - 0) - 6(y - 3) - 5(z + 3) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 13x - 6y - 5z + 3 = 0$$

Si ahora se establece $t = 0$ en las ecuaciones para L_1, se obtiene el punto $(1, -2, 4)$ sobre P_1. Así, la distancia entre L_1 y L_2 es la misma que la distancia de $(1, -2, 4)$ a $13x - 6y - 5z + 3 = 0$. Por la fórmula 9, esta distancia es

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0.53$$
□

12.5 EJERCICIOS

1. Determine si cada enunciado es verdadero o falso.
   (a) Dos rectas paralelas a una tercera recta son paralelas.
   (b) Dos rectas perpendiculares a una tercera recta son paralelas.
   (c) Dos planos paralelos a un tercer plano son paralelos.
   (d) Dos planos perpendiculares a un tercer plano son paralelos.
   (e) Dos rectas paralelas a un plano son paralelas.
   (f) Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas.
   (g) Dos planos paralelos a una recta son paralelos.
   (h) Dos planos perpendiculares a una recta son paralelos.
   (i) Dos planos se cortan o son paralelos.
   (j) Dos rectas se cortan o son paralelas.
   (k) Un plano y una recta se cortan o son paralelos.

2–5 Encuentre una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para la recta.

2. La recta que pasa por el punto $(6, -5, 2)$ y que es paralela al vector $\langle 1, 3, -\frac{2}{3} \rangle$

3. La recta que pasa por el punto $(2, 2.4, 3.5)$ y es paralela al vector $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

4. La recta que pasa por el punto $(0, 14, -10)$ y paralela a la recta $x = -1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, $z = 3 + 9t$

5. La recta que pasa por el punto $(1, 0, 6)$ y es perpendicular al plano $x + 3y + z = 5$

6–12 Encuentre las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas para la recta.

6. La recta por el origen y el punto $(1, 2, 3)$

7. La recta por los puntos $(1, 3, 2)$ y $(-4, 3, 0)$

8. La recta por los puntos $(6, 1, -3)$ y $(2, 4, 5)$

9. La recta por los puntos $(0, \frac{1}{2}, 1)$ y $(2, 1, -3)$

10. La recta por $(2, 1, 0)$ y perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{i} + \mathbf{k}$

11. La recta por $(1, -1, 1)$ y paralela a la recta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12. La recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x + z = 0$

13. ¿La recta que pasa $(-4, -6, 1)$ y $(-2, 0, -3)$ es paralela a la recta que pasa por $(10, 18, 4)$ y $(5, 3, 14)$?

14. ¿La recta que pasa por $(4, 1, -1)$ y $(2, 5, 3)$ es perpendicular a la recta que pasa por $(-3, 2, 0)$ y $(5, 1, 4)$?

15. (a) Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $(1, -5, 6)$ y es paralela al vector $\langle -1, 2, -3 \rangle$.
    (b) Encuentre los puntos en los que la recta requerida en el inciso (a) corta a los planos coordenados.

16. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(2, 4, 6)$ que es perpendicular al plano $x - y + 3z = 7$.
    (b) ¿En qué puntos esta recta corta a los planos coordenados?

17. Obtenga una ecuación vectorial para el segmento de recta de $(2, -1, 4)$ a $(4, 6, 1)$.

18. Encuentre las ecuaciones paramétricas del segmento de recta de $(10, 3, 1)$ a $(5, 6, -3)$.

19–22 Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se intersectan, determine el punto de intersección.

19. L_1: $x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$

    L_2: $x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$

20. L_1: $x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 2 - t$

    L_2: $x = -1 + s, \quad y = 4 + s, \quad z = 1 + 3s$

21. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 2}{3}$, $\quad L_2$: $\dfrac{x - 3}{-4} = \dfrac{y - 2}{-3} = \dfrac{z - 1}{2}$

22. L_1: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{2} = \dfrac{z - 2}{-1}$

    L_2: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 6}{-1} = \dfrac{z + 2}{3}$

23–38 Encuentre una ecuación del plano.

23. El plano que pasa por el punto $(6, 3, 2)$ y es perpendicular al vector $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. El plano por el punto $(4, 0, -3)$ y con vector normal $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. El plano por el punto $(1, -1, 1)$ y con vector normal $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. El plano por el punto $(-2, 8, 10)$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$

27. El plano por el origen y paralelo al plano $2x - y + 3z = 1$

28. El plano por el punto $(-1, 6, -5)$ y paralelo al plano $x + y + z + 2 = 0$

29. El plano por el punto $(4, -2, 3)$ y paralelo al plano $3x - 7z = 12$

30. El plano que contiene la recta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ y es paralelo al plano $2x + 4y + 8z = 17$

31. El plano que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$

32. El plano que pasa por el origen y los puntos $(2, -4, 6)$ y $(5, 1, 3)$

33. El plano que pasa por los puntos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ y $(-1, -2, -3)$

34. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y contiene a la recta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

35. El plano que pasa por el punto $(6, 0, -2)$ y contiene a la recta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

36. El plano que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y contiene a la recta con ecuaciones simétricas $x = 2y = 3z$

37. El plano que pasa por el punto $(-1, 2, 1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$

38. El plano que pasa por la línea de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$

39–42 Usar ordenadas en el origen para ayudar a trazar el plano.

39. $2x + 5y + z = 10$

40. $3x + y + 2z = 6$

41. $6x - 3y + 4z = 6$

42. $6x + 5y - 3z = 15$

43–45 Encuentre el punto en el que la recta intersecta al plano dado.

43. $x = 3 - t,\ y = 2 + t,\ z = 5t;\quad x - y + 2z = 9$

44. $x = 1 + 2t,\ y = 4t,\ z = 2 - 3t;\quad x + 2y - z + 1 = 0$

45. $x = y - 1 = 2z;\quad 4x - y + 3z = 8$

46. ¿Dónde la recta que pasa por $(1, 0, 1)$ y $(4, -2, 2)$ corta al plano $x + y + z = 6$?

47. Encuentre los números de dirección para la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x + z = 0$.

48. Encuentre el coseno y el ángulo entre los planos $x + y + z = 0$ y $x + 2y + 3z = 1$.

49–54 Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguno. Si no son paralelos ni perpendiculares encuentre el ángulo entre ellos.

49. $x + 4y - 3z = 1,\quad -3x + 6y + 7z = 0$

50. $2z = 4y - x,\quad 3x - 12y + 6z = 1$

51. $x + y + z = 1,\quad x - y + z = 1$

52. $2x - 3y + 4z = 5,\quad x + 6y + 4z = 3$

53. $x = 4y - 2z,\quad 8y = 1 + 2x + 4z$

54. $x + 2y + 2z = 1,\quad 2x - y + 2z = 1$

55–56 (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos y (b) determine el ángulo entre los planos.

55. $x + y + z = 1,\quad x + 2y + 2z = 1$

56. $3x - 2y + z = 1,\quad 2x + y - 3z = 3$

57–58 Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los planos.

57. $5x - 2y - 2z = 1,\quad 4x + y + z = 6$

58. $z = 2x - y - 5,\quad z = 4x + 3y - 5$

59. Encuentre una ecuación para el plano que consta de los puntos que son equidistantes de los puntos $(1, 0, -2)$ y $(3, 4, 0)$.

60. Obtenga una ecuación para el plano que consta de los puntos que son equidistantes de los puntos $(2, 5, 5)$ y $(-6, 3, 1)$.

61. Halle una ecuación del plano con intersección a del eje x e intersección b del eje y e intersección c del eje z.

62. (a) Encuentre el punto en el que se cortan las rectas dadas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 2\rangle$$

y $$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2\rangle + s\langle -1, 1, 0\rangle$$

(b) Encuentre una ecuación del plano que contenga estas rectas.

63. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ que es paralelo al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

64. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ que es perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$ y corta a esta recta.

65. ¿Cuáles de los siguientes cuatro planos son paralelos? ¿Algunos de ellos son idénticos?

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ $\quad P_2$: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ $\quad P_4$: $z = 2x - y - 3$

66. ¿Cuáles de las siguientes cuatro rectas son paralelas? ¿Algunas de ellas son idénticas?

L_1: $x = 1 + t,\quad y = t,\quad z = 2 - 5t$

L_2: $x + 1 = y - 2 = 1 - z$

L_3: $x = 1 + t,\quad y = 4 + t,\quad z = 1 - t$

L_4: $\mathbf{r} = \langle 2, 1, -3\rangle + t\langle 2, 2, -10\rangle$

67–68 Use la fórmula del ejercicio 43 en la sección 12.4 para hallar la distancia del punto a la recta dada.

67. $(4, 1, -2);\quad x = 1 + t,\quad y = 3 - 2t,\quad z = 4 - 3t$

68. $(0, 1, 3);\quad x = 2t,\quad y = 6 - 2t,\quad z = 3 + t$

69–70 Encuentre la distancia del punto al plano dado.

69. $(1, -2, 4),\quad 3x + 2y + 6z = 5$

70. $(-6, 3, 5),\quad x - 2y - 4z = 8$

71–72 Determine la distancia entre los planos paralelos dados

71. $2x - 3y + z = 4,\quad 4x - 6y + 2z = 3$

72. $6z = 4y - 2x, \quad 9z = 1 - 3x + 6y$

73. Muestre que la distancia entre los planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $ax + by + cz + d_2 = 0$ es

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

74. Encuentre las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano $x + 2y - 2z = 1$ y están a dos unidades de él.

75. Muestre que las rectas con ecuaciones simétricas $x = y = z$ y $x + 1 = y/2 = z/3$ son oblicuas, y encuentre la distancia entre estas rectas.

76. Encuentre la distancia entre las rectas oblicuas con ecuaciones paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$, y $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

77. Si a, b y c no son 0, muestre que la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano y $\langle a, b, c\rangle$ es un vector normal al plano.

Sugerencia: suponga que $a \neq 0$ y reescriba la ecuación en la forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

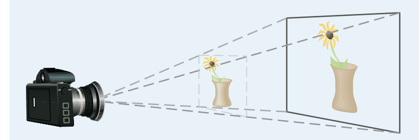
78. Dé una descripción geométrica de cada familia de planos.

(a) $x + y + z = c$

(b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta = 1$

PROYECTO DE LABORATORIO — TRES DIMENSIONES EN PERSPECTIVA



Los programadores de gráficas por computadora enfrentan el mismo problema que los grandes pintores del pasado: cómo representar una escena tridimensional como una imagen plana en un plano bidimensional (una pantalla o un lienzo). Para crear la ilusión de perspectiva, en la que los objetos más cercanos se ven más grandes que los que están lejos, los objetos tridimensionales en la memoria de la computadora son proyectados sobre una pantalla rectangular desde un punto de visión donde se localiza el ojo, o cámara. El volumen de visión, la porción del espacio que será visible, es la región contenida por los cuatro planos que pasan por el punto de visión y una arista de la pantalla. Si el objeto en la escena se extiende más allá de estos cuatro planos, se debe truncar antes de enviar a la pantalla los datos de pixeles. Por lo tanto, estos planos se llaman *planos de truncamiento*.

1. Suponga que la pantalla se representa mediante un rectángulo en el plano yz con vértices $(0, \pm 400, 0)$ y $(0, \pm 400, 600)$, y la cámara se coloca en $(1\,000, 0, 0)$. Una línea L en la escena pasa por los puntos $(230, -285, 102)$ y $(860, 105, 264)$. ¿En qué puntos debe ser recortada L por los planos de truncamiento?

2. Si el segmento de línea recortada se proyecta sobre la pantalla, identifique el segmento de línea resultante.

3. Use ecuaciones paramétricas para trazar las aristas de la pantalla, el segmento de línea recortada y su proyección sobre la pantalla. Después sume las líneas de visión que unen al punto de visión con cada extremo de los segmentos recortados para comprobar que la proyección es correcta.

4. Un rectángulo con vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ y $(599, 67, 122)$ se agrega a la escena. La línea L corta a este rectángulo. Para hacer que el rectángulo aparezca opaco, un programador puede usar la *eliminación de líneas ocultas* que remueve porciones de objetos que están detrás de otros objetos. Identifique la porción de L que se debe eliminar.

12.6 CILINDROS Y SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Ya se han considerado dos tipos especiales de superficies: planos (en la sección 12.5) y esferas (en la sección 12.1). Aquí se investigan otros dos tipos de superficies: cilindros y superficies cuadráticas.

A fin de bosquejar la gráfica de una superficie, es útil determinar las curvas de intersección de la superficie con planos paralelos a los planos coordenados. Estas curvas se llaman **trazas** (o secciones transversales) de la superficie.

CILINDROS

Un **cilindro** es una superficie generada por las líneas rectas paralelas (llamadas generatrices) a una recta dada que intersectan a una curva plana.



V EJEMPLO 1 Bosqueje la gráfica de la superficie $z = x^2$.

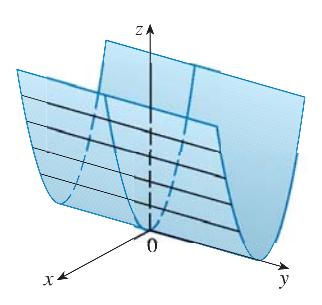


FIGURA 1
La superficie $z = x^2$ es un cilindro parabólico.

SOLUCIÓN Observe que la ecuación de la gráfica $z = x^2$, no tiene que ver con y. Esto significa que cualquier plano vertical con ecuación $y = k$ (paralelo al plano xz) corta a la gráfica en una curva con ecuación $z = x^2$. Así que estas trazas verticales son parábolas. En la figura 1 se muestra cómo se forma la gráfica al tomar la parábola $z = x^2$ en el plano xz y moverla en la dirección del eje y. La gráfica es una superficie, llamada **cilindro parabólico**, hecha de un número infinito de copias desplazadas de la misma parábola. Aquí las generatrices del cilindro son paralelas al eje y. □

Se observa que la variable y falta en la ecuación del cilindro del ejemplo 1. Esto es característico de una superficie cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados. Si una de las variables x, y o z falta en la ecuación de una superficie, entonces la superficie es un cilindro.

EJEMPLO 2 Identifique y bosqueje las superficies.
(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $y^2 + z^2 = 1$

SOLUCIÓN
(a) Puesto que z falta en las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$ representa un círculo de radio 1 en el plano $z = k$, la superficie $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro circular cuyo eje es el eje z (véase figura 2). Aquí las directrices son rectas verticales.

(b) En este caso falta x y la superficie es un cilindro circular cuyo eje es el eje x (véase figura 3). Se obtiene al tomar el círculo $y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$ en el plano yz y moverlo paralelo al eje x.

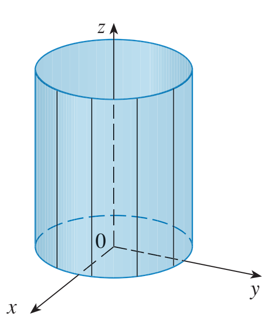


FIGURA 2 $x^2 + y^2 = 1$

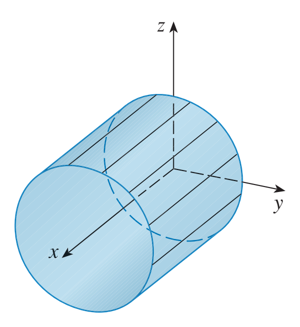


FIGURA 3 $y^2 + z^2 = 1$ □



NOTA Cuando se trata con superficies, es importante reconocer que una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro y no una circunferencia. La traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy es la circunferencia con ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Una **superficie cuadrática** es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y y z. La ecuación más general es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde $A, B, C, \ldots, J$ son constantes, pero por traslación y rotación se puede llevar a una de las dos formas estándar

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \qquad \text{o bien} \qquad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Las superficies cuadráticas son las contrapartes en tres dimensiones de las secciones cónicas en el plano. (Véase la sección 10.5 para un repaso de las secciones cónicas.)

EJEMPLO 3 Use trazas para bosquejar la superficie cuadrática con ecuación

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

SOLUCIÓN Al sustituir $z = 0$, se encuentra que la traza en el plano xy es $x^2 + y^2/9 = 1$, que se reconoce como una ecuación de una elipse. En general, la traza horizontal en el plano $z = k$ es

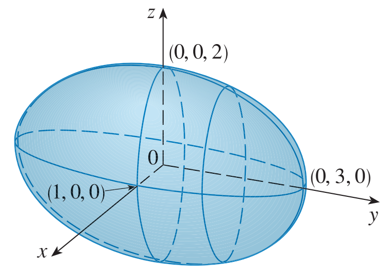
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

que es una elipse, siempre que $k^2 < 4$, es decir, $-2 < k < 2$.

De manera similar, las trazas verticales son también elipses:

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 - k^2 \qquad x = k \qquad (\text{si } -1 < k < 1)$$

$$x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{9} \qquad y = k \qquad (\text{si } -3 < k < 3)$$



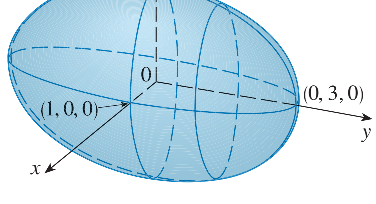


FIGURA 4

La elipsoide $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

En la figura 4 se ilustra cómo con dibujar algunas trazas se indica la forma de la superficie. Se llama **elipsoide** porque todas sus trazas son elipses. Observe que es simétrica con respecto a cada plano coordenado; ésta es una reflexión del hecho de que su ecuación tiene que ver sólo con potencias pares de x, y y z. □

EJEMPLO 4 Use trazas para bosquejar la superficie $z = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Si se escribe $x = 0$, se obtiene $z = y^2$, de modo que el plano yz corta a la superficie en una parábola. Si se escribe $x = k$ (una constante), se obtiene $z = y^2 + 4k^2$. Esto significa que si se corta a la gráfica en secciones con cualquier plano paralelo al plano yz, se obtiene una parábola que abre hacia arriba. De manera similar, si $y = k$, la traza es $z = 4x^2 + k^2$, que es de nuevo una parábola que abre hacia arriba. Si se escribe $z = k$, se obtienen las trazas horizontales $4x^2 + y^2 = k$, que se reconocen como una familia de elipses. Al conocer las formas de las trazas, se puede bosquejar la gráfica de la figura 5. Como resultado de las trazas elípticas y parabólicas, la superficie cuadrática $z = 4x^2 + y^2$ se llama **paraboloide elíptico**.

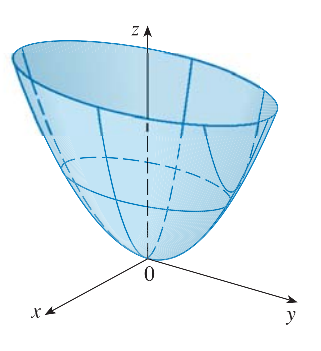


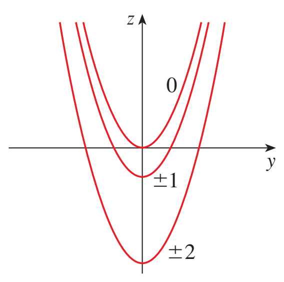
FIGURA 5

La superficie $z = 4x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico. Las trazas horizontales son elipses; las trazas verticales son parábolas.

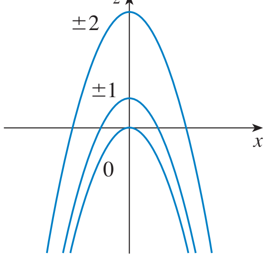
□

V EJEMPLO 5 Bosqueje la superficie $z = y^2 - x^2$.

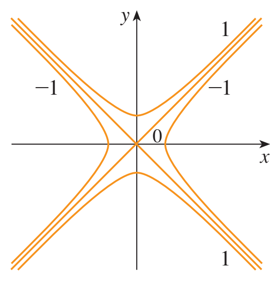
SOLUCIÓN Las trazas en los planos verticales $x = k$ son las parábolas $z = y^2 - k^2$, que abren hacia arriba. Las trazas en $y = k$ son las parábolas $z = -x^2 + k^2$, que abren hacia abajo. Las trazas horizontales son $y^2 - x^2 = k$, una familia de hipérbolas. La familia de trazas se dibuja en la figura 6, y se muestra cómo se aparecen las trazas cuando se colocan en sus planos correctos en la figura 7.



Las trazas en $x = k$ son $z = y^2 - k^2$

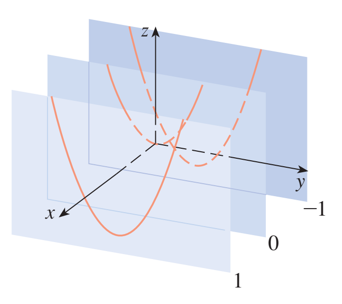


Las trazas en $y = k$ son $z = -x^2 + k^2$

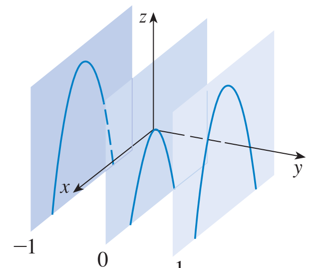


Las trazas en $z = k$ son $y^2 - x^2 = k$

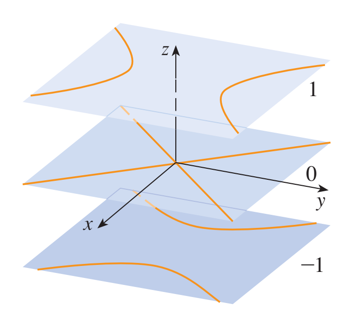
FIGURA 6
Las trazas verticales son parábolas; las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas se marcan con el valor de k.



Trazas en $x = k$



Trazas en $y = k$



Trazas en $z = k$

FIGURA 7
Trazas movidas a sus planos correctos

TEC En Module 12.6A se puede investigar cómo las trazas determinan la forma de una superficie.

En la figura 8 se integran las trazas de la figura 7 para formar la superficie $z = y^2 - x^2$, un **paraboloide hiperbólico.** Observe que la forma de la superficie cerca del origen se asemeja a la de una silla. Esta superficie se investigará más en la sección 14.7 cuando se analicen los puntos silla.

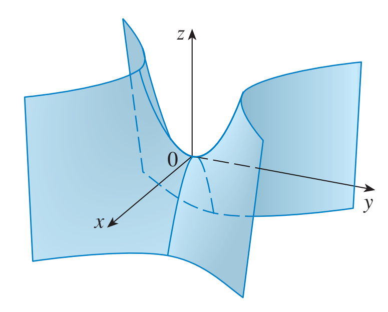


FIGURA 8
La superficie $z = y^2 - x^2$ es un paraboloide hiperbólico.

□

EJEMPLO 6 Bosqueje la superficie $\dfrac{x^2}{4} + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 1$.

SOLUCIÓN La traza en cualquier plano horizontal $z = k$ es la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 + \frac{k^2}{4} \qquad z = k$$

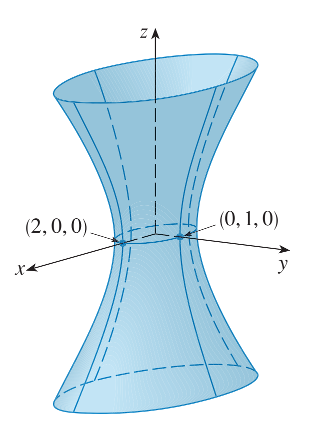


FIGURA 9

pero las trazas en los planos xz y yz son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad y = 0 \qquad \textbf{y} \qquad y^2 - \frac{z^2}{4} = 1 \qquad x = 0$$

Esta superficie se llama **hiperboloide de una hoja** y se bosqueja en la figura 9. □

La idea de usar trazas para dibujar una superficie se emplea en software de graficación tridimensional para computadoras. En la mayor parte de esta clase de software, las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores igualmente espaciados de k, y partes de la gráfica se eliminan por medio de la eliminación de líneas ocultas. En la tabla 1 se muestran las gráficas trazadas por computadora de los seis tipos básicos de superficies cuadráticas en forma estándar. Todas las superficies son simétricas con respecto al eje z. Si una superficie cuadrática es simétrica respecto a un eje diferente, su ecuación cambia como corresponde.

TABLA 1 Gráficas de superficies cuadráticas

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, la elipsoide es una esfera.	Cono	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hipérbolas si $k \neq 0$ pero son pares de líneas si $k = 0$.
Paraboloide elíptico	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico.	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas. Se ilustra el caso donde $c < 0$.	Hiperboloide de dos hojas.	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses si $k > c$ o $k < -c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

TEC En Module 12.6B se puede ver cómo cambiar a, b, y c en la tabla 1 afecta la forma de la superficie cuadrática.

V EJEMPLO 7 Identifique y bosqueje la superficie $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$.

SOLUCIÓN Dividiendo entre -4, primero se escribe la ecuación en la forma estándar:

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, se ve que representa un hiperboloide de dos hojas, la única diferencia es que en este caso el eje del hiperboloide es el eje y. Las trazas en los planos xy y yz son las hipérbolas

$$-x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad z = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1 \qquad x = 0$$

La superficie no tiene traza en el plano xz, pero las trazas en los planos verticales $y = k$ para $|k| > 2$ son las elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

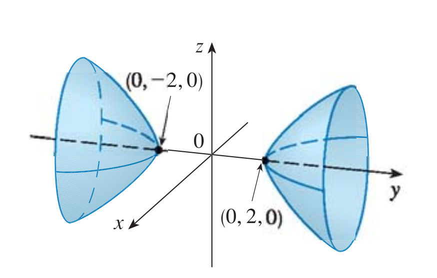


FIGURA 10
$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

que se pueden escribir como

$$\frac{x^2}{\dfrac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\dfrac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

Estas trazas se emplean para hacer el bosquejo de la figura 10. □



EJEMPLO 8 Clasifique la superficie cuadrática $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUCIÓN Al completar el cuadrado se reescribe la ecuación como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Al comparar esta ecuación con la tabla 1, se ve que representa un paraboloide elíptico. Sin embargo, aquí el eje del paraboloide es paralelo al eje y, y ha sido desplazado de modo que su vértice es el punto $(3, 1, 0)$. Las trazas en el plano $y = k$ $(k > 1)$ son las elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

La traza en el plano xy es la parábola con ecuación $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$. El paraboloide se bosqueja en la figura 11.

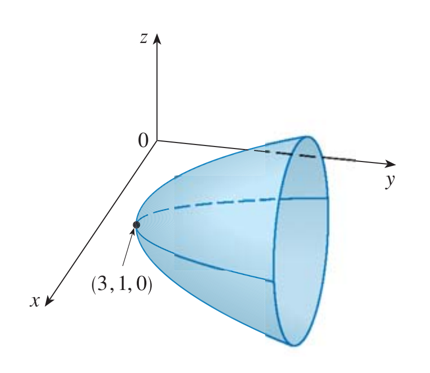


FIGURA 11
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

□

APLICACIONES DE SUPERFICIES CUADRÁTICAS

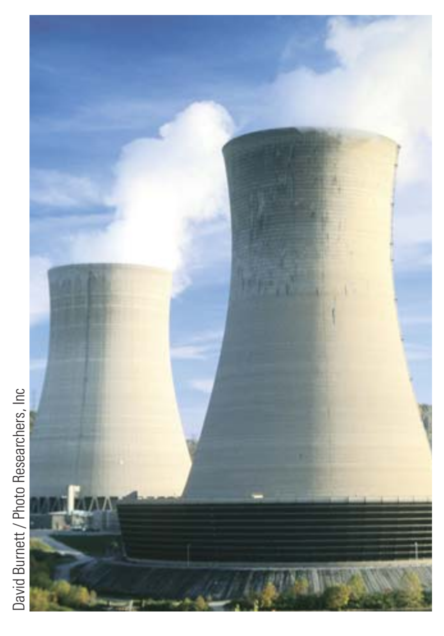
A su alrededor puede hallar ejemplos de superficies cuádricas. De hecho, el mundo en sí es un buen ejemplo. Aun cuando la Tierra se modela por lo general como esfera, un modelo más preciso es un elipsoide porque la rotación de nuestro planeta ha causado un aplanamiento en los polos. (Véase el ejercicio 47.)

Los paraboloides circulares, obtenidos al girar una parábola alrededor de su eje, se usan para recolectar y reflejar luz, sonido y señales de radio y televisión. En un radiotelescopio, por ejemplo, las señales provenientes de estrellas distantes y que incidan en el plato son reflejadas al receptor situado en el foco y ahí son amplificadas. (La idea se explica en el problema 18 de la página 268.) El mismo principio se aplica en micrófonos y antenas de disco en forma de paraboloides.

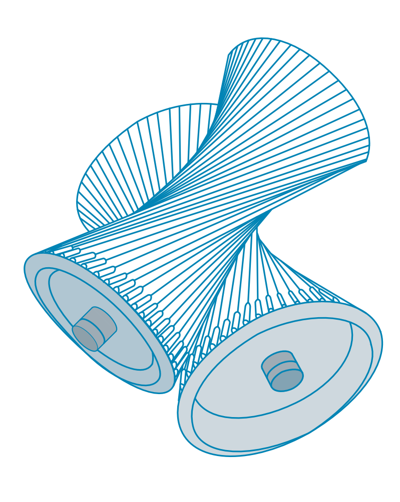
Las torres de enfriamiento para reactores nucleares suelen diseñarse en forma de hiperboloides de una hoja por razones de estabilidad estructural. Se emplean pares de hiperboloides para transmitir movimiento rotacional entre ejes sesgados. (Los dientes de engranajes son las líneas generadoras de los hiperboloides. Véase ejercicio 49.)



Una antena de disco refleja señales al foco de un paraboloide.



Los reactores nucleares tienen torres de enfriamiento en forma de hiperboloides.



Los hiperboloides producen transmisión por engranajes.

12.6 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué representa la ecuación $y = x^2$ como una curva en $\mathbb{R}^2$?
(b) ¿Qué representa como una superficie en $\mathbb{R}^3$?
(c) ¿Qué representa la ecuación $z = y^2$?

2. (a) Bosqueje la gráfica de $y = e^x$ como una curva en $\mathbb{R}^2$.
(b) Bosqueje la gráfica de $y = e^x$ como una superficie en $\mathbb{R}^3$.
(c) Describa y bosqueje la superficie $z = e^y$.

3–8 Describa y bosqueje la superficie.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $x - y^2 = 0$

6. $yz = 4$

7. $z = \cos x$

8. $x^2 - y^2 = 1$

9. (a) Encuentre e identifique las trazas de la superficie cuadrática $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y explique por qué la gráfica se ve como la del hiperboloide de una hoja en la tabla 1.
(b) Si se cambia la ecuación del inciso (a) a $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, ¿cómo se afecta la gráfica?
(c) ¿Qué pasa si se cambia la ecuación del inciso (a) a $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Encuentre e identifique las trazas de la superficie cuadrática $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y explique por qué la gráfica se ve como la del hiperboloide de dos hojas en la tabla 1.
(b) Si la ecuación del inciso (a) se cambia a $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, ¿qué sucede con la gráfica? Bosqueje la nueva gráfica.

11–20 Use trazos para bosquejar e identificar la superficie.

11. $x = y^2 + 4z^2$

12. $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$

13. $x^2 = y^2 + 4z^2$

14. $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$

15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

16. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$

17. $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$

18. $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$

19. $y = z^2 - x^2$

20. $x = y^2 - z^2$

21–28 Compare la ecuación con su gráfica (marcadas I-VIII). Dé razones para sus elecciones.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

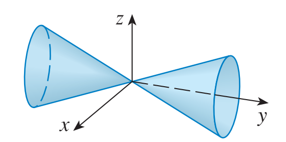
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x^2 + 2z^2$

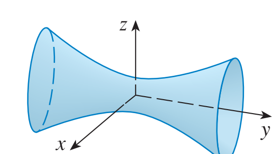
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

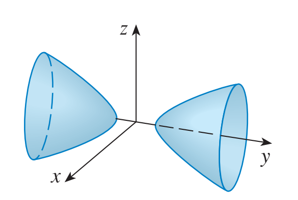
I



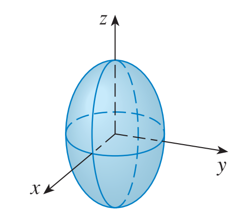
II



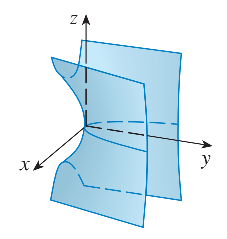
III



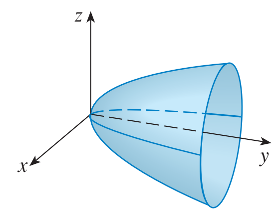
IV



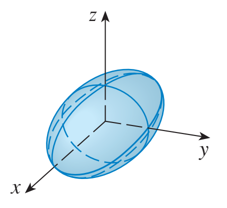
V



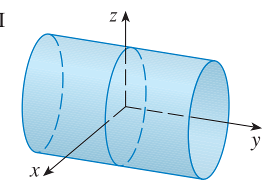
VI



VII



VIII



29–36 Reduzca la ecuación a una de las formas estándar, clasifique la superficie y bosquéjela.

29. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

30. $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

31. $x = 2y^2 + 3z^2$

32. $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37–40 Use una computadora con software de graficación tridimensional para dibujar la superficie. Experimente con los puntos de visión y con dominios para las variables hasta que obtenga una buena vista de la superficie.

37. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

38. $x^2 - y^2 - z = 0$

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

41. Bosqueje la región acotada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Bosqueje la región acotada por las parábolas $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Encuentre una ecuación para la superficie obtenida al hacer girar la parábola $y = x^2$ respecto al eje y.

44. Halle una ecuación para la superficie obtenida al rotar la línea $x = 3y$ respecto al eje x.

45. Encuentre una ecuación para la superficie que consta de los puntos que son equidistantes del punto $(-1, 0, 0)$ y el plano $x = 1$. Identifique la superficie.

46. Obtenga una ecuación para la superficie que consta de los puntos P para los cuales la distancia de P al eje x es dos veces la distancia de P al plano yz. Identifique la superficie.

47. Tradicionalmente, la superficie de la Tierra se ha modelado como esfera, pero el Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS-84) emplea un elipsoide como modelo más preciso. Sitúa el centro de nuestro planeta en el origen y el polo norte en el eje z positivo. La distancia del centro a los polos es 6356.523 km y la distancia a un punto en el ecuador es 6378.137.
(a) Encuentre una ecuación de la superficie terrestre como la utilizada por el WGS-84.
(b) Las curvas de igual latitud son trazos en los planos $z = k$. ¿Cuál es la forma de estas curvas?
(c) Los meridianos (curvas de igual longitud) son trazos en planos de la forma $y = mx$. ¿Cuál es la forma de estos meridianos?

48. Una torre de enfriamiento para un reactor nuclear ha de construirse en forma de hiperboloide de una hoja (vea la foto en la página 810). El diámetro de la base es 280 m y el diámetro

mínimo, 500 m sobre la base, es 200 m. Encuentre una ecuación para la torre.

49. Muestre que si el punto (a, b, c) yace en el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, entonces las líneas con ecuaciones paramétricas $x = a + t$, $y = b + t$, $z = c + 2(b - a)t$ y $x = a + t$, $y = b - t$, $z = c - 2(b + a)t$ yacen por completo sobre este paraboloide. (Esto muestra que el paraboloide hiperbólico es lo que se llama una **superficie generada**; es decir, puede ser generada por el movimiento de una recta. De hecho, este ejercicio muestra que a través de cada punto sobre el paraboloide hiperbólico hay dos líneas generatrices. Las únicas otras superficies cuadráticas que son superficies generadas son los cilindros, conos e hiperboloides de una hoja.)

50. Muestre que la curva de intersección de las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ yace en el plano.

51. Dibuje las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 1 - y^2$ en una pantalla común con el dominio $|x| \leqslant 1.2$, $|y| \leqslant 1.2$ y observe la curva de intersección de estas superficies. Muestre que la proyección de esta curva sobre el plano xy es una elipse.

12 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar?
2. ¿Cómo suma geométricamente dos vectores? ¿Cómo los suma algebraicamente?
3. Si **a** es un vector y c es un escalar, ¿cómo se relaciona c**a** con **a** geométricamente? ¿Cómo determinaría c**a** en forma algebraica?
4. ¿Cómo encuentra el vector de un punto a otro?
5. ¿Cómo determina el producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ de dos vectores si conoce sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Qué pasa si conoce sus componentes?
6. ¿De qué manera es útil el producto punto?
7. Escriba las expresiones para las proyecciones escalar y vectorial de **b** sobre **a**. Ilustre con diagramas.
8. ¿Cómo determina el producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de dos vectores si conoce sus longitudes y el ángulo entre ellos? ¿Qué pasa si conoce sus componentes?
9. ¿Cómo es útil el producto cruz?
10. (a) ¿Cómo determina el área del paralelogramo determinado por **a** y **b**?
    (b) ¿Cómo obtiene el volumen del paralelepípedo determinado por **a**, **b** y **c**?
11. ¿Cómo encuentra un vector perpendicular a un plano?
12. ¿Cómo determina el ángulo entre dos planos que se cortan?
13. Escriba una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas para una línea.
14. Escriba una ecuación vectorial y una ecuación escalar para un plano.
15. (a) ¿Cómo expresa si dos vectores son paralelos?
    (b) ¿Cómo indica si dos vectores son perpendiculares?
    (c) ¿Cómo asegura si dos planos son paralelos?
16. (a) Describa un método para determinar si tres puntos P, Q y R están en la misma línea.
    (b) Describa un método para determinar si cuatro puntos P, Q, R y S están en el mismo plano.
17. (a) ¿Cómo obtiene la distancia de un punto a una línea?
    (b) ¿Cómo halla la distancia de un punto a un plano?
    (c) ¿Cómo determina la distancia entre dos líneas?
18. ¿Cuáles son las trazas de una superficie? ¿Cómo las obtiene?
19. Escriba ecuaciones en forma estándar de los seis tipos de superficies cuadráticas.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que desapruebe al enunciado.

1. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
2. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
3. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3, $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$.
4. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3 y cualquier escalar k, $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.
5. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3 y cualquier escalar k, $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$.
6. Para vectores cualesquiera **u**, **v** y **w** en V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.
7. Para vectores cualesquiera **u**, **v** y **w** en V_3, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.
8. Para vectores cualesquiera **u**, **v** y **w** en V_3, $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$.
9. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
10. Para vectores cualesquiera **u** y **v** en V_3, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

11. El producto cruz de dos vectores unitarios es un vector unitario.

12. Una ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$ representa una línea en el espacio.

13. El conjunto de puntos $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es una circunferencia.

14. Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle u_1 v_1, u_2 v_2 \rangle$.

15. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

16. Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

17. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

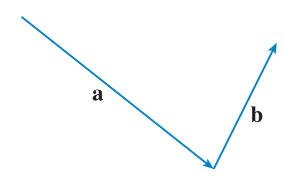
18. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V_3, entonces $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

EJERCICIOS

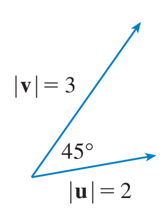
1. (a) Encuentre una ecuación de la esfera que pasa por el punto $(6, -2, 3)$ y tiene centro $(-1, 2, 1)$.
(b) Encuentre la curva en la que esta esfera cruza el plano yz.
(c) Encuentre el centro y radio de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$$

2. Copie los vectores de la figura y empléelos para dibujar cada uno de los siguientes vectores.
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (c) $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$ (d) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$



3. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son los vectores mostrados en la figura, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$. ¿$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dirigido hacia la página o hacia afuera de ésta?



4. Calcule la cantidad dada si

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{c} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

(a) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ (b) $|\mathbf{b}|$
(c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ (f) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(g) $\mathbf{c} \times \mathbf{c}$ (h) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(i) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ (j) $\text{proy}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$
(k) El ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (correcto hasta el grado más próximo)

5. Determine los valores de x tales que los vectores $\langle 3, 2, x \rangle$ y $\langle 2x, 4, x \rangle$ son ortogonales.

6. Encuentre dos vectores unitarios que son ortogonales a $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

7. Suponga que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 2$. Determine
(a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$
(c) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$

8. Muestre que si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ están en V_3, entonces

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a})] = [\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]^2$$

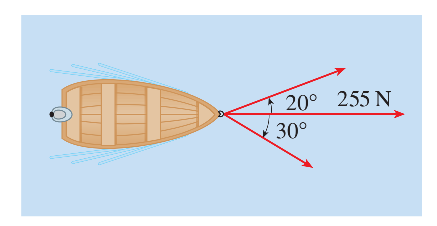
9. Determine el ángulo agudo entre dos diagonales de un cubo.

10. Dados los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-1, 1, 4)$ y $D(0, 3, 2)$, encuentre el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes AB, AC y AD.

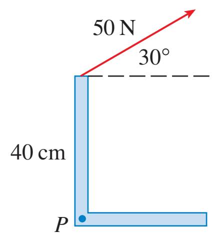
11. (a) Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(1, 4, 3)$.
(b) Determine el área del triángulo ABC.

12. Una fuerza constante $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ mueve un objeto a lo largo de un segmento de recta de $(1, 0, 2)$ a $(5, 3, 8)$. Calcule el trabajo hecho si la distancia se mide en metros y la fuerza en newtons.

13. Un bote es jalado hacia la orilla por medio de dos cuerdas, como se ilustra en el diagrama. Si se requiere una fuerza de 255 N, determine la magnitud de la fuerza en cada cuerda.



14. Encuentre la magnitud del par de torsión respecto a P si se aplica una fuerza de 50 N como se muestra.



15–17 Obtenga las ecuaciones paramétricas para la línea.

15. La línea que pasa por $(4, -1, 2)$ y $(1, 1, 5)$

16. La línea que pasa por $(1, 0, -1)$ y es paralela a la línea $\frac{1}{3}(x - 4) = \frac{1}{2}y = z + 2$

17. La línea que pasa por $(-2, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x - y + 5z = 12$

18–20 Encuentre una ecuación del plano.

18. El plano que pasa por $(2, 1, 0)$ y es paralelo a $x + 4y - 3z = 1$

19. El plano que pasa por $(3, -1, 1)$, $(4, 0, 2)$ y $(6, 3, 1)$

20. El plano que pasa por $(1, 2, -2)$ que contiene a la línea $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 1 + 3t$

---

21. Encuentre el punto en el que la línea con ecuaciones paramétricas $x = 2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = 4t$ corta al plano $2x - y + z = 2$.

22. Encuentre la distancia del origen a la línea $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

23. Determine si las líneas dadas por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4}$$

y

$$\frac{x + 1}{6} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 5}{2}$$

son paralelas, oblicuas o se intersecan.

24. (a) Demuestre que los planos $x + y - z = 1$ y $2x - 3y + 4z = 5$ no son paralelos ni perpendiculares.

(b) Encuentre, correcto hasta el grado más próximo, el ángulo entre estos planos.

25. Encuentre una ecuación del plano que pasa por la línea de intersección de los planos $x - z = 1$ y $y + 2z = 3$ y perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

26. (a) Encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, -1, 10)$ y $C(1, 3, -4)$.

(b) Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por B que es perpendicular al plano de la parte (a).

(c) Un segundo plano pasa por $(2, 0, 4)$ y tiene vector normal $\langle 2, -4, -3 \rangle$. Demuestre que el ángulo agudo entre los planos es aproximadamente de 43°.

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de los dos planos.

27. Encuentre la distancia entre los planos $3x + y - 4z = 2$ y $3x + y - 4z = 24$.

28–36 Identifique y bosqueje la gráfica de cada superficie.

28. $x = 3$

29. $x = z$

30. $y = z^2$

31. $x^2 = y^2 + 4z^2$

32. $4x - y + 2z = 4$

33. $-4x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$

34. $y^2 + z^2 = 1 + x^2$

35. $4x^2 + 4y^2 - 8y + z^2 = 0$

36. $x = y^2 + z^2 - 2y - 4z + 5$

---

37. Un elipsoide se crea al hacer girar la elipse $4x^2 + y^2 = 16$ respecto al eje x. Encuentre una ecuación del elipsoide.

38. Una superficie consta de todos los puntos P tales que la distancia de P al plano $y = 1$ es el doble de la distancia de P al punto $(0, -1, 0)$. Encuentre una ecuación para esta superficie, e identifíquela.

PROBLEMAS ADICIONALES

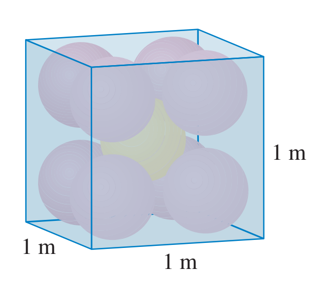


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Cada arista de una caja cúbica tiene una longitud de 1 m. La caja contiene nueve bolas esféricas con el mismo radio r. El centro de una bola está en el centro del cubo y toca a las otras ocho bolas. Cada una de las otras ocho bolas toca tres lados de la caja. Así, las bolas están compactadas en la caja. (Véase la figura.) Encuentre r. (Si hay alguna dificultad con este problema, lea la estrategia para resolver problemas titulada *Use la analogía* en la página 76.)

2. Sea B una caja sólida con longitud L, amplitud W y altura H. Sea S el conjunto de los puntos que están a una distancia de a lo sumo 1 desde algún punto B. Exprese el volumen de S en términos de L, W y H.

3. Sea L la línea de intersección de los planos $cx + y + z = c$ y $x - cy + cz = -1$, donde c es un número real.

(a) Encuentre las ecuaciones simétricas para L.

(b) Cuando varía el número c, la línea L barre una superficie S. Encuentre una ecuación para la curva o intersección de S con el plano horizontal $z = t$ (la traza de S en el plano $z = t$).

(c) Encuentre el volumen del sólido acotado por S y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

4. Un avión es capaz de volar a una velocidad de 180 km/h en aire tranquilo. El piloto despega de un aeródromo y se dirige al norte de acuerdo con la brújula del avión. Después de 30 minutos de tiempo de vuelo, el piloto nota que, debido al viento, el avión ha viajado en realidad 80 km a un ángulo de 5° al noreste.

(a) ¿Cuál es la velocidad del viento?

(b) ¿En qué dirección se debe dirigir el piloto para llegar al destino pretendido?

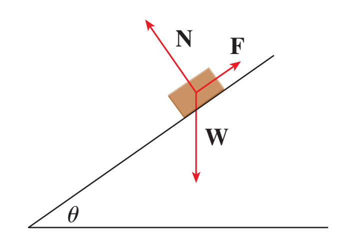


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. Suponga que un bloque de masa m se coloca sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura. El descenso del bloque por el plano es desacelerado por la fricción; si θ no es demasiado grande, la fricción evitará que el bloque se mueva del todo. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son el peso $\mathbf{W}$, donde $|\mathbf{W}| = mg$ (g es la aceleración debida a la gravedad); la fuerza normal $\mathbf{N}$ (la componente normal de la fuerza de reacción del plano sobre el bloque), donde $|\mathbf{N}| = n$; y la fuerza $\mathbf{F}$ debida a la fricción, la cual actúa paralela al plano inclinado, en oposición a la dirección de movimiento. Si el bloque está en reposo y se incrementa θ, $|\mathbf{F}|$ también aumenta hasta que en última instancia $|\mathbf{F}|$ alcanza su máximo, más allá del cual el bloque comienza a deslizarse. A este ángulo, θ_s, se ha observado que $|\mathbf{F}|$ es proporcional a n. Así, cuando $|\mathbf{F}|$ es máxima, se puede decir que $|\mathbf{F}| = \mu_s n$, donde μ_s se llama el *coeficiente de fricción estática* y depende de los materiales que están en contacto.

(a) Observe que $\mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$ y deduzca que $\mu_s = \tan \theta_s$.

(b) Suponga que, para $\theta > \theta_s$, una fuerza externa adicional $\mathbf{H}$ se aplica al bloque, horizontalmente desde la izquierda, y sea $|\mathbf{H}| = h$. Si h es pequeña, el bloque aún puede deslizarse por el plano; si h es suficientemente grande, el bloque ascenderá por el plano. Sea $h_{\text{mín}}$ el valor más pequeño de h que permite que el bloque permanezca inmóvil (de modo que $|\mathbf{F}|$ es máxima).

Al elegir los ejes coordenados de modo que $\mathbf{F}$ esté a lo largo del eje x, resuelva cada fuerza en componentes paralelas y perpendiculares al plano inclinado y muestre que

$$h_{\text{mín}} \operatorname{sen} \theta + mg \cos \theta = n \qquad \text{y} \qquad h_{\text{mín}} \cos \theta + \mu_s n = mg \operatorname{sen} \theta$$

(c) Demuestre que

$$h_{\text{mín}} = mg \tan(\theta - \theta_s)$$

¿Parece razonable esta ecuación? ¿Tiene sentido para $\theta = \theta_s$? ¿Cuándo $\theta \to 90°$? Explique.

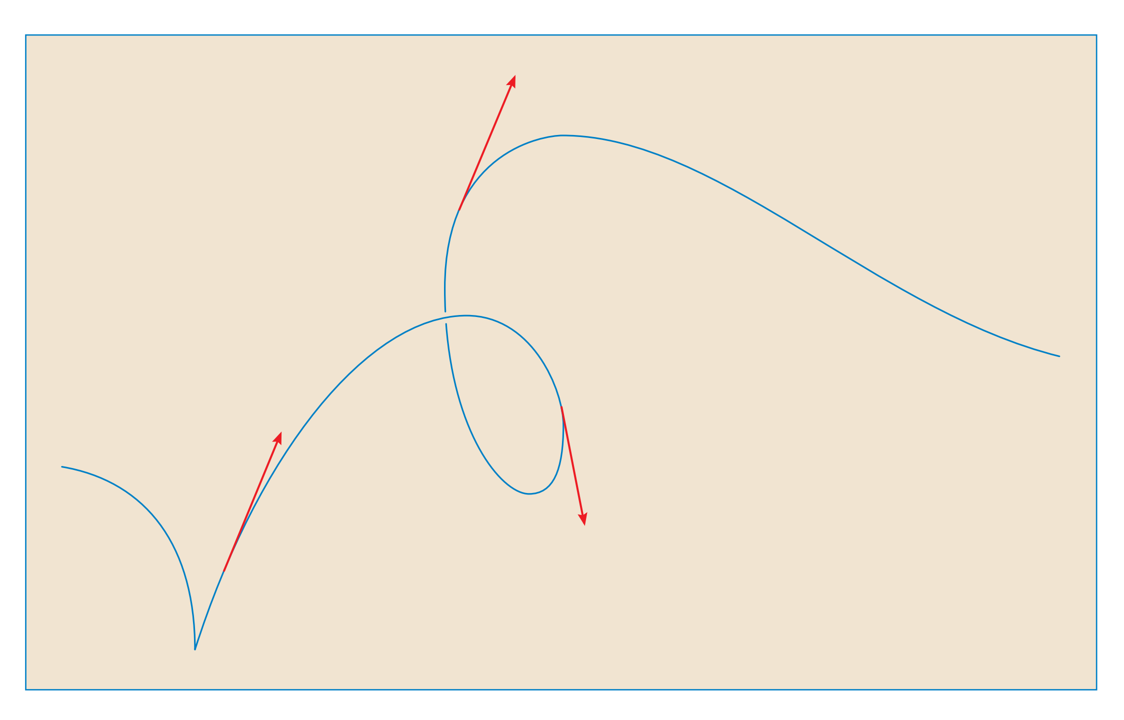
(d) Sea $h_{\text{máx}}$ el valor más grande de h que permite al bloque permanecer sin movimiento. (¿En qué dirección apunta $\mathbf{F}$? Demuestre que

$$h_{\text{máx}} = mg \tan(\theta + \theta_s)$$

¿Parece razonable esta ecuación? Explique.

13

FUNCIONES VECTORIALES



Los vectores tangentes muestran la dirección en la que una curva espacial avanza en cualquier punto.

Las funciones usadas hasta este momento son funciones de valores reales. En seguida se estudian funciones cuyos valores son vectores porque dichas funciones se requieren para describir curvas y superficies en el espacio. También se utilizan funciones de valores vectoriales para describir el movimiento de objetos en el espacio. En particular, se recurre a ellas para deducir las leyes de Kepler del movimiento de los planetas.

En general, una función es una regla que asigna a cada elemento del dominio un elemento del rango. Una **función con valores vectoriales**, es decir, **una función vectorial**, es simplemente una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo rango es un conjunto de vectores. El interés se centra más en funciones vectoriales **r** cuyos valores son vectores tridimensionales. Esto quiere decir que para cada número t en el dominio de **r** hay un vector único en V_3 que se denota con $\mathbf{r}(t)$. Si $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$ son las componentes del vector $\mathbf{r}(t)$, entonces f, g, y h son funciones de valores reales llamadas **funciones coordenadas** de **r** y podemos escribir:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

Se usa la letra t para denotar la variable independiente porque representa el tiempo en la mayor parte de las aplicaciones de funciones vectoriales.

EJEMPLO 1 Si

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^3, \ln(3 - t), \sqrt{t} \rangle$$

entonces las funciones componentes son

$$f(t) = t^3 \qquad g(t) = \ln(3 - t) \qquad h(t) = \sqrt{t}$$

De acuerdo con la convención usual, el dominio de **r** consta de todos los valores de t para los cuales la expresión de $\mathbf{r}(t)$ está definida. Todas las expresiones t^3, $\ln(3 - t)$, y $\sqrt{t}$ están definidas para cuando $3 - t > 0$ y $t \geqslant 0$. Por lo tanto, el dominio de **r** es el intervalo $[0, 3)$. □

El **límite** de un vector **r** se define obteniendo los límites de sus funciones coordenadas como se señala a continuación.

■ Si $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$, esta definición equivale a decir que la longitud y dirección del vector $\mathbf{r}(t)$ se aproxima a la longitud y dirección del vector $\mathbf{L}$.

1 Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \to a} f(t), \lim_{t \to a} g(t), \lim_{t \to a} h(t) \right\rangle$$

siempre que existan los límites de las funciones coordenadas.

De igual manera, podría haber usado una definición ε-δ (véase ejercicio 45). Los límites de funciones vectoriales siguen las mismas reglas que los límites de las funciones de valores reales (véase ejercicio 43).

EJEMPLO 2 Determine $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$, donde $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN Según la definición 1, el límite de **r** es el vector cuyas componentes son los límites de las funciones coordenadas de **r:**

$$\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \to 0} (1 + t^3)\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{t \to 0} te^{-t}\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\mathbf{k}$$

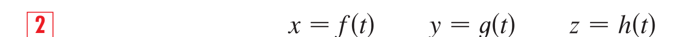
$$= \mathbf{i} + \mathbf{k} \qquad \text{(según la ecuación 3.3.2)}$$ □

Una función vectorial **r** es **continua en *a*** si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$$

Según la definición 1, **r** es continua en a si y sólo si sus funciones componentes f, g y h son continuas en a.

Hay una estrecha relación entre funciones vectoriales continuas y curvas en el espacio. Suponga que f, g y h son funciones continuas de valores reales en un intervalo I. Entonces el conjunto C de todos los puntos (x, y, z) en el espacio, donde



2 $$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

y t varía en todo el intervalo I, se llama **curva en el espacio**. Las ecuaciones en (2) reciben el nombre de **ecuaciones paramétricas de *C*** y t se llama **parámetro**. Puede pensar que C la delinea una partícula en movimiento cuya posición en el tiempo t es $(f(t), g(t), h(t))$. Si ahora considera la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, entonces $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición del punto $P(f(t), g(t), h(t))$ en C. Por lo tanto, cualquier función vectorial continua **r** define una curva en el espacio C que dibuja la punta del vector que se desplaza $\mathbf{r}(t)$, como se ilustra en la figura 1.

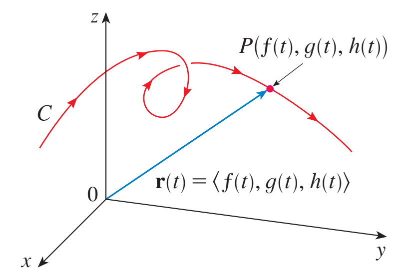


FIGURA 1
La punta de un vector $\mathbf{r}(t)$ de posición que se desplaza traza a C

TEC En Visual 13.1A se muestran varias curvas trazadas por vectores de posición, incluyendo aquellas de las figuras 1 y 2.

V EJEMPLO 3 Describa la curva que define la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t \rangle$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 2 + 5t \qquad z = -1 + 6t$$

a las cuales se identifica de las ecuaciones 12.5.2 como ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y es paralela al vector $\langle 1, 5, 6 \rangle$. Otra posibilidad es observar que la función se puede escribir como $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, donde $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 2, -1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 5, 6 \rangle$, y ésta es la ecuación vectorial de la recta como la que da la ecuación 12.5.1. □

También se pueden representar curvas planas mediante la notación de vectores. Por ejemplo, la curva que representan las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 2t$ y $y = t + 1$ (véase ejemplo 1 en la sección 10.1) también se puede describir mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 2t, t + 1 \rangle = (t^2 - 2t)\,\mathbf{i} + (t + 1)\,\mathbf{j}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$.

V EJEMPLO 4 Trace la curva cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas para esta curva son

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

Puesto que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, la curva debe estar en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. El punto (x, y, z) se ubica directamente arriba del punto $(x, y, 0)$, el cual se desplaza en el sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. (Véase ejemplo 2 de la sección 10.1). Como $z = t$, la curva se dirige en espiral hacia arriba siguiendo la forma del cilindro a medida que t se incrementa. La curva se llama **hélice** y se ilustra en la figura 2. □

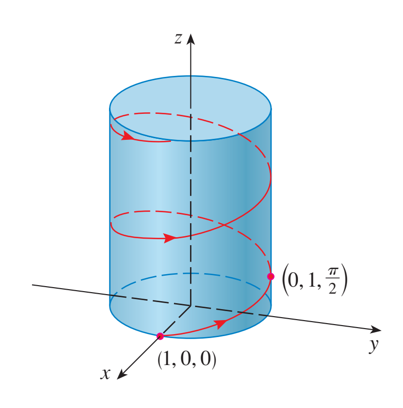


FIGURA 2

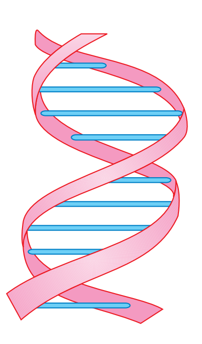


FIGURA 3

La forma de sacacorchos de la hélice del ejemplo 4 es conocida porque se parece a los resortes. También se encuentra en el modelo del ADN, (ácido desoxirribonucleico, que es el material genético de las células de los seres vivos). En 1953, James Watson y Francis Crick, mostraron que la estructura de la molécula del ADN es como un par de hélices paralelas pero conectadas como se ilustra en la figura 3.

En los ejemplos 3 y 4 se proporcionaban ecuaciones vectoriales de curvas y se pedía una descripción geométrica o un esquema. En los dos ejemplos siguientes, se da una descripción geométrica de una curva y se pide encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva.

EJEMPLO 5 Determine una ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas del segmento rectilíneo que une el punto $P(1, 3, -2)$ con el punto $Q(2, -1, 3)$.

■ En la figura 4 se muestra el segmento PQ de la recta del ejemplo 5.

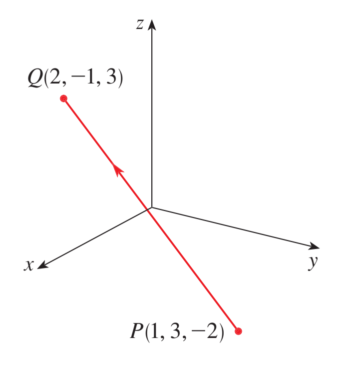


FIGURA 4

SOLUCIÓN En la sección 12.5 se determinó una ecuación vectorial para el segmento rectilíneo que une la punta del vector $\mathbf{r}_0$ con la del vector $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Véase ecuación 12.5.4. En este caso se toma $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$ para obtener una ecuación vectorial del segmento rectilíneo que va de P a Q:

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\,\langle 1, 3, -2 \rangle + t\langle 2, -1, 3 \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

o bien

$$\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3 - 4t, -2 + 5t \rangle \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son

$$x = 1 + t \qquad y = 3 - 4t \qquad z = -2 + 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$ □

V EJEMPLO 6 Determine una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.

SOLUCIÓN En la figura 5 se ilustra cómo se intersectan el plano y el cilindro, y la figura 6 representa la curva de intersección C, que es una elipse.

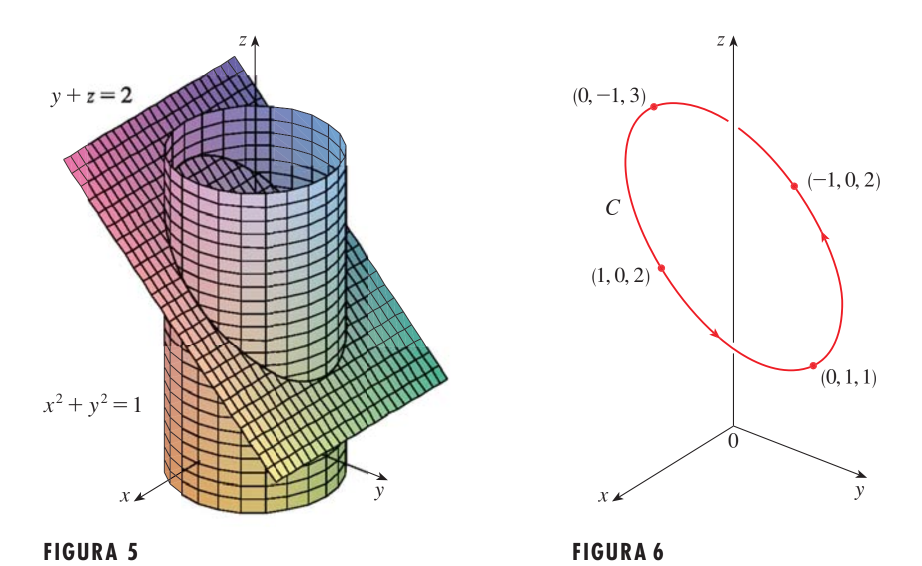


FIGURA 5 **FIGURA 6**

La proyección de C en el plano xy es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Entonces, ya sabe por el ejemplo 2 de la sección 10.1 que puede escribir

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

A partir de la ecuación del plano tiene

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t$$

De modo que puede escribir ecuaciones paramétricas para C como

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = 2 - \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (2 - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Esta ecuación se llama *parametrización* de la curva C. Las flechas de la figura 6 indican la dirección en la cual C es trazada conforme el parámetro t se incrementa. □

USO DE LAS COMPUTADORAS PARA DIBUJAR CURVAS EN EL ESPACIO

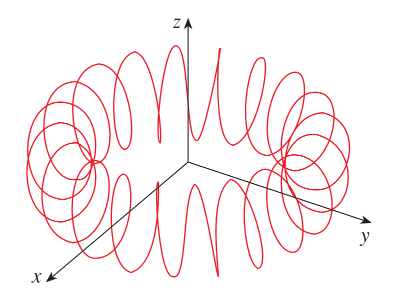


FIGURA 7 Una espiral toroidal

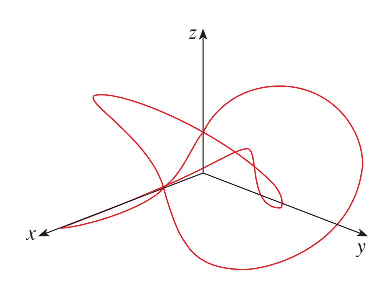


FIGURA 8 Un nudo de trébol

Las curvas en el espacio son inherentemente más difíciles de trazar a mano que las curvas en el plano. Si quiere conseguir una representación exacta, necesita recurrir a los adelantos técnicos. Por ejemplo, en la figura 7 se ilustra una gráfica generada mediante computadora de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = (4 + \operatorname{sen} 20t)\cos t \qquad y = (4 + \operatorname{sen} 20t)\operatorname{sen} t \qquad z = \cos 20t$$

Se llama **espiral toroidal** porque queda sobre un toro. Otra curva interesante, el **nudo de trébol**, cuyas ecuaciones son

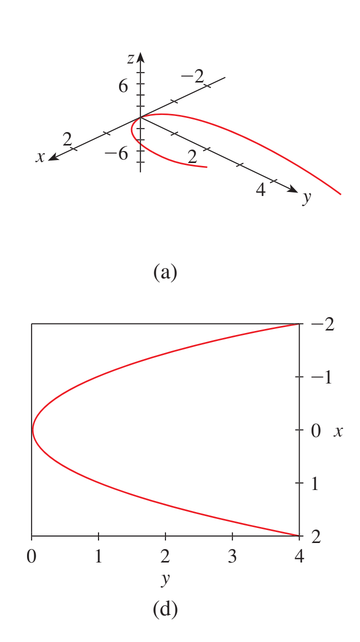
$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t \qquad y = (2 + \cos 1.5t)\operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} 1.5t$$

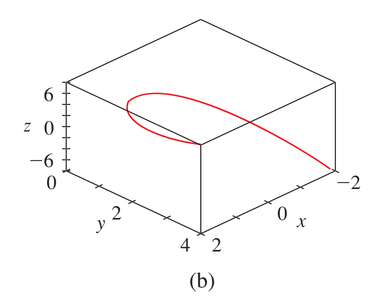
se grafica en la figura 8. No sería fácil hacer la gráfica a mano de cualquiera de estas curvas.

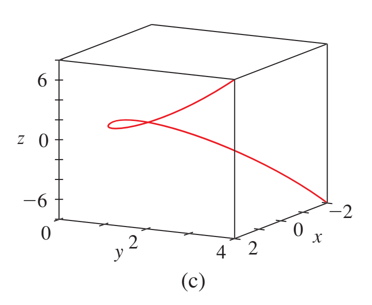
Incluso cuando se utiliza una computadora para dibujar una curva en el espacio, es difícil de obtener la ilusión óptica que logra una buena impresión de cómo se ve la curva en la realidad. Esto es muy cierto en la figura 8. Véase el ejercicio 44. El ejemplo siguiente muestra cómo enfrentar este problema.

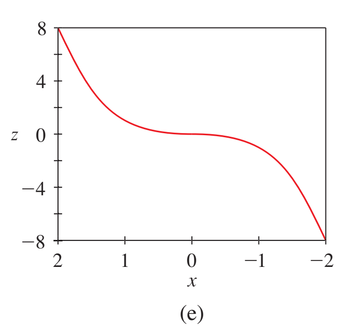
EJEMPLO 7 Mediante una computadora trace la curva cuya ecuación vectorial es $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Esta curva se denomina **cúbica alabeada**.

SOLUCIÓN Empiece por usar la computadora para dibujar la curva de ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ para $-2 \leqslant t \leqslant 2$. El resultado se ilustra en la figura 9(a), pero es difícil ver la naturaleza verdadera de la curva únicamente a partir de la gráfica. La mayor parte de los programas para dibujar en tres dimensiones con ayuda de la computadora permite al usuario encerrar una curva o superficie en una caja en lugar de mostrar los ejes coordenados. Cuando se ve la misma curva en una caja en la figura 9(b), se tiene mucho más clara la imagen de la curva. Es posible ver que asciende desde una esquina inferior de la caja hasta la esquina más cercana al primer plano, y que se tuerce al ir ascendiendo.









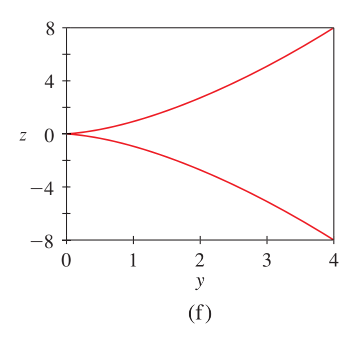
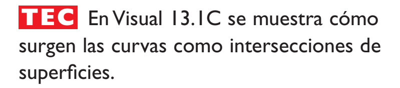


FIGURA 9 Vistas de la cúbica alabeada


TEC En Visual 13.1B se puede hacer girar la caja de la figura 9 para ver la curva desde cualquier ángulo.

Se obtiene una mejor idea de la curva cuando es vista desde distintos ángulos. En el inciso (c), se ilustra el resultado de girar la caja para tener otra perspectiva. En los incisos (d), (e) y (f), se pueden ver las vistas que se tienen cuando se observa directamente la cara de la caja. En particular, el inciso (d) es una vista directamente desde arriba de la caja. Es la proyección de la curva del plano xy, a saber, la parábola $y = x^2$. En el inciso (e) se muestra la proyección del plano xz, la curva cúbica $z = x^3$. Ahora es obvio por qué la curva dada se llama cúbica alabeada. □

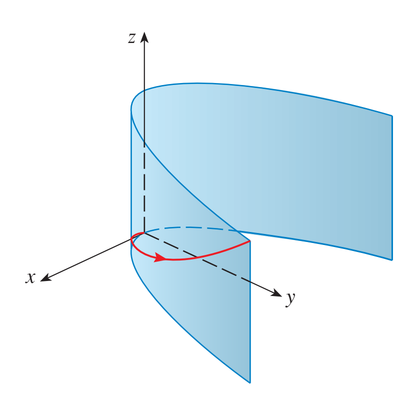


FIGURA 10

Otro método para representar una curva en el espacio es dibujarla sobre una superficie. Por ejemplo, la cúbica alabeada del ejemplo 7 está en el cilindro parabólico $y = x^2$. (Elimine el parámetro de las dos primeras ecuaciones paramétricas, $x = t$ y $y = t^2$.) En la figura 10 se ilustran tanto el cilindro como la cúbica alabeada, y se ve que la curva se desplaza hacia arriba desde el origen a lo largo de la superficie del cilindro. También se recurre a este método en el ejemplo 4 para imaginar la hélice que está en el cilindro circular (véase figura 2).

Un tercer método para representar una cúbica alabeada, es darse cuenta de que también está en el cilindro $z = x^3$. Esto se puede ver como la curva de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. (Véase figura 11.)

TEC En Visual 13.1C se muestra cómo surgen las curvas como intersecciones de superficies.

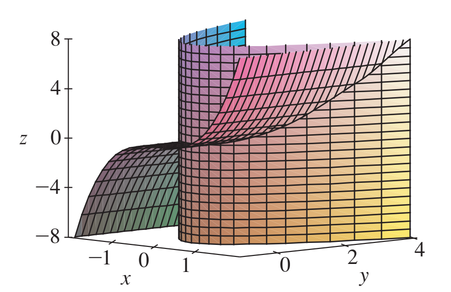
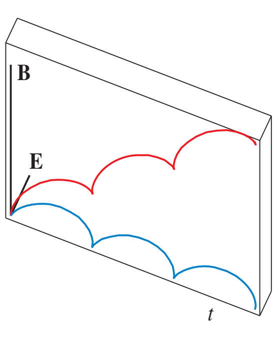


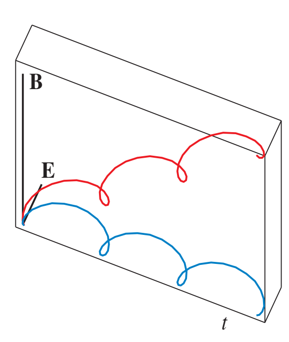
FIGURA 11

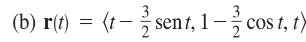
■ Algunos sistemas algebraicos computacionales proporcionan una imagen más clara de una curva en el espacio encerrándola en un tubo. Estas gráficas permiten ver si una parte de la curva pasa enfrente de otra parte de la curva o atrás de ésta. Por ejemplo, en la figura 13 se ilustra la curva de la figura 12(b) que se obtiene mediante el comando `tubeplot` de Maple.

Ya se vio que una curva espacial muy interesante, la hélice, se encuentra en el modelo del ADN. Otro ejemplo notable de las curvas en el espacio en la ciencia es la trayectoria de una partícula con carga positiva en campos eléctricos y magnéticos orientados ortogonalmente **E** y **B**. Depende de la velocidad inicial dada a la partícula en el origen, la trayectoria de la partícula es ya una curva en el espacio cuya proyección en el plano horizontal es la cicloide que estudió en la sección 10.1, figura 12(a), o ya la curva cuya proyección es la trocoide tratada en el ejercicio 40 de la sección 10.1, [figura 12 (b)].



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$





(b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \rangle$

FIGURA 12

Movimiento de una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos orientados ortogonalmente.

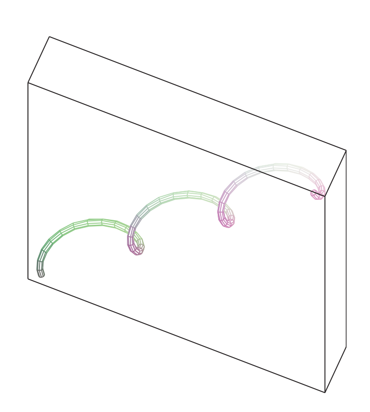


FIGURA 13

Si desea más información relacionada con las propiedades físicas y las figuras animadas de las partículas, consulte las siguientes páginas *web*:

- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

13.1 EJERCICIOS

1–2 Determine el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4 - t^2}, e^{-3t}, \ln(t + 1) \rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t - 2}{t + 2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9 - t^2)\,\mathbf{k}$

3–6 Determine el límite.

3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \ln t \rangle$

4. $\lim\limits_{t \to 0} \left\langle \dfrac{e^t - 1}{t}, \dfrac{\sqrt{1 + t} - 1}{t}, \dfrac{3}{1 + t} \right\rangle$

5. $\lim\limits_{t \to 0} \left(e^{-3t}\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k} \right)$

6. $\lim\limits_{t \to \infty} \left\langle \arctan t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t} \right\rangle$

7–14 Grafique la curva con la ecuación vectorial dada. Indique con una flecha la dirección en la cual t se incrementa.

7. $r(t) = \langle \operatorname{sen} t, t \rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3t, -t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \cos t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

13. $\mathrm{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$

14. $\mathrm{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

15–18 Determine una ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas para el segmento rectilíneo que une P y Q.

15. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

16. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

17. $P(1, -1, 2)$, $Q(4, 1, 7)$

18. $P(-2, 4, 0)$, $Q(6, -1, 2)$

19–24 Haga corresponder las ecuaciones paramétricas con las gráficas I a VI. Explique las razones de su elección.

19. $x = \cos 4t, \quad y = t, \quad z = \operatorname{sen} 4t$

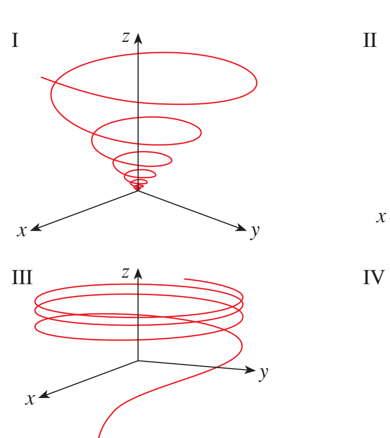
20. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^{-t}$

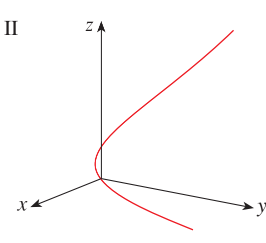
21. $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$

22. $x = e^{-t} \cos 10t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} 10t, \quad z = e^{-t}$

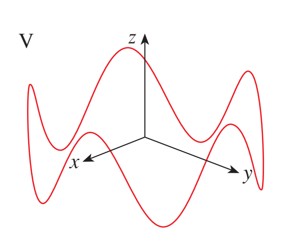
23. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \operatorname{sen} 5t$

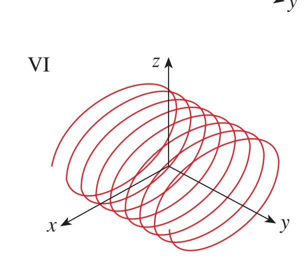
24. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \ln t$





IV





25. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$, y a partir de este hecho grafique la curva.

26. Demuestre que la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$. A partir de este hecho grafique la curva.

27. ¿En qué puntos corta la curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ al paraboloide $z = x^2 + y^2$?

28. ¿En qué puntos corta la hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

29–32 Mediante una computadora grafique la curva con la ecuación vectorial dada. Asegúrese de elegir un dominio para el parámetro y perspectivas que revelen la naturaleza verdadera de la curva.

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t \rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t \operatorname{sen} t, t \cos t \rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t \rangle$

33. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = (1 + \cos 16t) \cos t$, $y = (1 + \cos 16t) \operatorname{sen} t$, $z = 1 + \cos 16t$. Explique el aspecto de la gráfica mediante la demostración de que está ubicada sobre un cono.

34. Grafique la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t} \cos t$$

$$y = \sqrt{1 - 0.25 \cos^2 10t} \operatorname{sen} t$$

$$z = 0.5 \cos 10t$$

Explique el aspecto de la gráfica demostrando que queda sobre una esfera.

35. Demuestre que la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ pasa por los puntos (1, 4, 0) y (9, −8, 28), pero no por el punto (4, 7, −6).

36–38 Encuentre una función vectorial que representa la curva de intersección de las dos superficies.

36. El cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y la superficie $z = xy$

37. El cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$

38. El paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ y el cilindro parabólico $y = x^2$

39. Intente hacer a mano la gráfica de la curva de intersección del cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ y el cilindro parabólico $z = x^2$. Luego determine las ecuaciones paramétricas de esta curva y con ellas y una computadora grafique la curva.

40. Intente graficar a mano la curva de intersección del cilindro parabólico $y = x^2$ y la mitad superior del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Luego determine las ecuaciones paramétricas de esta curva y, a partir de ellas y con la ayuda de una computadora, grafique la curva.

41. Si dos objetos se desplazan por el espacio siguiendo dos curvas distintas, a menudo es importante saber si llegarán a chocar. (¿Un misil tocará a este blanco móvil? ¿Chocarán dos aviones?) Las curvas pueden cortarse, pero es necesario conocer si los objetos están en la misma posición *en el mismo tiempo*. Suponga que las trayectorias de dos partículas están definidas por las funciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. ¿Chocarán las partículas?

42. Dos partículas recorren las curvas en el espacio

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

¿Chocarán las partículas? ¿Se cortan las trayectorias?

43. Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales que poseen límites cuando $t \to a$ y sea c una constante. Demuestre las propiedades siguientes de los límites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

44. La vista del nudo de trébol que se ilustra en la figura 8 es exacta, pero no revela toda la historia. Con las ecuaciones paramétricas

$$x = (2 + \cos 1.5t) \cos t \qquad y = (2 + \cos 1.5t) \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1.5t$$

grafique a mano la curva como si la viera desde arriba, con brechas que indiquen dónde la curva pasa por arriba de sí misma. Inicie demostrando que la proyección de la curva en el plano xy tiene coordenadas polares $r = 2 + \cos 1.5t$ y $\theta = t$, de modo que r varía entre 1 y 3. Luego muestre que z posee valores máximos y mínimos cuando la proyección está entre $r = 1$ y $r = 3$.

Al terminar su gráfica, utilice una computadora para dibujar la curva vista desde arriba y compárela con la que usted dibujó. Luego, mediante la computadora, trace la curva vista desde distintos ángulos. Puede obtener una mejor impresión de la curva si grafica un tubo de radio 0.2 que rodee a la curva. (Use el comando `tubeplot` de Maple.)

45. Demuestre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon \text{ cuando } 0 < |t - a| < \delta.$$

13.2 DERIVADAS E INTEGRALES DE FUNCIONES VECTORIALES

Más adelante en este mismo capítulo se usan las funciones vectoriales para describir el movimiento de los planetas y de otros objetos en el espacio. Aquí se prepara la manera de desarrollar el cálculo de las funciones vectoriales.

DERIVADAS

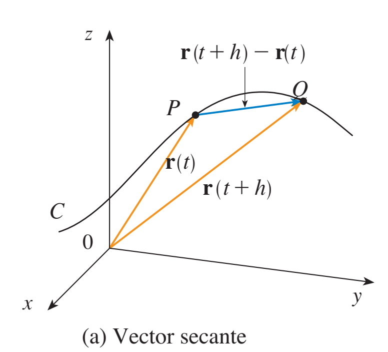
La **derivada** $\mathbf{r}'$ de una función vectorial $\mathbf{r}$ está definida de la misma manera que para las funciones de valores reales.

TEC Visual 13.2 muestra una animación de la figura 1.

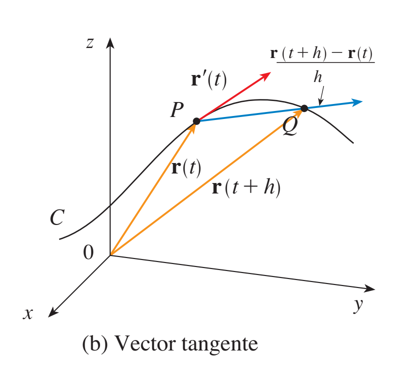
1
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

si este límite existe. El significado geométrico de esta definición se muestra en la figura 1. Si los puntos P y Q tienen vectores de posición $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + h)$, entonces $\overrightarrow{PQ}$ representa el vector $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, la cual puede, por lo tanto, considerarse como un vector secante. Si $h > 0$, el múltiplo escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tiene la misma dirección que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Cuando $h \to 0$, parece que este vector se aproxima a un vector que está en la recta tangente. Por esta razón, el vector $\mathbf{r}'(t)$ se denomina **vector tangente** a la curva que está definida por $\mathbf{r}$ en el punto P, siempre que $\mathbf{r}'(t)$ exista y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. La **recta tangente** a C en P se define como la recta que pasa por P y que es paralela al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$. Ya habrá ocasión de considerar el **vector unitario tangente**, que es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$



(a) Vector secante



(b) Vector tangente

FIGURA 1

El teorema siguiente representa un método conveniente para calcular la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}$; deriva justamente cada componente de $\mathbf{r}$.

2 TEOREMA Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

DEMOSTRACIÓN

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \left\langle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle$$

$$= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle$$

□

V EJEMPLO 1

(a) Calcule la derivada de $\mathbf{r}(t) = (1 + t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$.

(b) Determine el vector tangente unitario en el punto donde $t = 0$.

SOLUCIÓN

(a) Según el teorema 2, se deriva cada componente de **r:**

$$\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i} + (1 - t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\,\mathbf{k}$$

(b) Como $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$ y $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, el vector unitario tangente en el punto (1, 0, 0) es

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

□

EJEMPLO 2 En el caso de la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (2 - t)\,\mathbf{j}$, determine $\mathbf{r}'(t)$ y grafique el vector de posición $\mathbf{r}(1)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$.

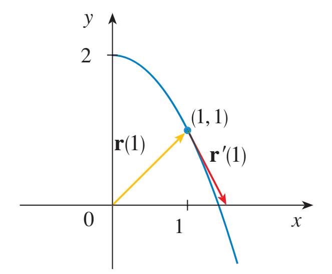


FIGURA 2

SOLUCIÓN Tiene

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

La curva es una curva plana y al eliminar el parámetro de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$, $y = 2 - t$ se obtiene $y = 2 - x^2$, $x \geqslant 0$. En la figura 2, dibuje el vector de posición $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ con inicio en el origen y el vector tangente $\mathbf{r}'(1)$ cuyo inicio es el punto correspondiente (1, 1).

□

V EJEMPLO 3 Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice de ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = t$$

en el punto $(0, 1, \pi/2)$.

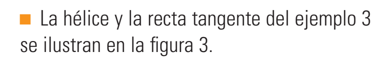
SOLUCIÓN La ecuación vectorial de la hélice es $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, \operatorname{sen} t, t\rangle$, de modo que

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -2\operatorname{sen} t, \cos t, 1\rangle$$

El valor del parámetro que corresponde al punto $(0, 1, \pi/2)$ es $t = \pi/2$, de modo que el vector tangente es $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -2, 0, 1 \rangle$. La recta tangente es la recta que pasa por $(0, 1, \pi/2)$ paralela al vector $\langle -2, 0, 1 \rangle$, de modo que de acuerdo con las ecuaciones 12.5.2 sus ecuaciones paramétricas son

$$x = -2t \qquad y = 1 \qquad z = \frac{\pi}{2} + t$$

□


■ La hélice y la recta tangente del ejemplo 3 se ilustran en la figura 3.

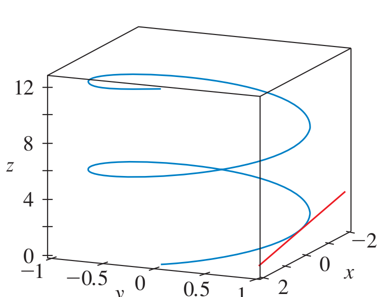


FIGURA 3

■ En la Sección 13.4 se verá cómo $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ se pueden interpretar como los vectores velocidad y aceleración de una partícula que se mueve por el espacio con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el tiempo t.

Igual que con las funciones de valores reales, la **segunda derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es la derivada de $\mathbf{r}'$, es decir, $\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$. Por ejemplo, la segunda derivada de la función del ejemplo 3 es

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -2\cos t, -\operatorname{sen} t, 0 \rangle$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

El teorema siguiente muestra que las fórmulas de derivación para funciones de valores reales tienen su equivalente para las funciones de valor vectorial.

3 TEOREMA Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables, c es un escalar y f es una función de valores reales. Entonces,

1. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\dfrac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$

3. $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

4. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$ (Regla de la cadena)

Este teorema se puede demostrar directamente con la definición 1 o mediante el teorema 2 y las fórmulas correspondientes de derivación para las funciones de valores reales. Las demostraciones de las 4 fórmulas siguientes se dejan como ejercicios.

DEMOSTRACIÓN DE LA FÓRMULA 4 Sean

$$\mathbf{u}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle \qquad \mathbf{v}(t) = \langle g_1(t), g_2(t), g_3(t) \rangle$$

Entonces $$\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)$$

de modo que la regla del producto ordinario da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt}[f_i(t)g_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{3} [f_i'(t)g_i(t) + f_i(t)g_i'(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{3} f_i'(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i'(t) \\ &= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \end{aligned}$$ □

V EJEMPLO 4 Demuestre que si $|\mathbf{r}(t)| = c$ una constante, entonces $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para toda t.

SOLUCIÓN Como

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = |\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$$

y c^2 es una constante, la fórmula 4 del teorema 3 da

$$0 = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t)$$

Por lo tanto, $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 0$, la cual establece que $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.

Desde el punto de vista geométrico, este resultado establece que si una curva queda sobre una esfera con centro en el origen, entonces el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ siempre es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$. □

INTEGRALES

La **integral definida** de una función vectorial continua $\mathbf{r}(t)$ se puede definir casi de la misma manera que para las funciones de valores reales, excepto que la integral es un vector. Pero entonces puede expresar la integral de $\mathbf{r}$ en términos de las integrales de sus funciones componentes f, g y h como sigue. Se utiliza la notación del capítulo 5.

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_i^*)\,\Delta t \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\,\Delta t \right) \mathbf{k} \right] \end{aligned}$$

y entonces

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt \right) \mathbf{k}$$

Esto quiere decir que se puede evaluar una integral de una función vectorial integrando cada función componente.

Es posible generalizar el teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales continuas como se señala a continuación:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

donde $\mathbf{R}$ es una antiderivada de $\mathbf{r}$, es decir, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Utilice la notación $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para integrales indefinidas (antiderivadas).

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, entonces

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es una constante de integración vectorial, por lo que

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2} = 2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ □

13.2 EJERCICIOS

1. La figura muestra una curva C definida por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

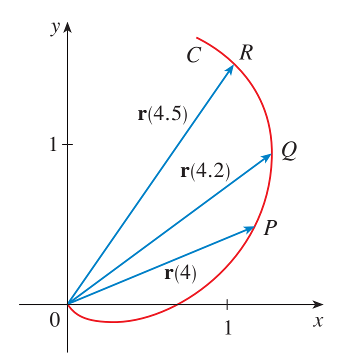
(a) Dibuje los vectores $\mathbf{r}(4.5) - \mathbf{r}(4)$ y $\mathbf{r}(4.2) - \mathbf{r}(4)$.

(b) Dibuje los vectores

$$\frac{\mathbf{r}(4.5) - \mathbf{r}(4)}{0.5} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{r}(4.2) - \mathbf{r}(4)}{0.2}$$

(c) Escriba las expresiones para $\mathbf{r}'(4)$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T}(4)$.

(d) Dibuje el vector $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Trace un diagrama grande de la curva que describe la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, y dibuje los vectores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.1)$ y $\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)$.

(b) Dibuje el vector $\mathbf{r}'(1)$ con inicio en (1, 1) y compárelo con el vector

$$\frac{\mathbf{r}(1.1) - \mathbf{r}(1)}{0.1}$$

Explique la razón de que estos vectores sean tan parecidos entre sí en cuanto a longitud y dirección.

3–8

(a) Dibuje la curva plana con la ecuación vectorial dada.

(b) Encuentre $\mathbf{r}'(t)$.

(c) Dibuje el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ para el valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2+1\rangle$, $t = -1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t}\rangle$, $t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $t = \pi/4$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$, $t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{3t}\,\mathbf{j}$, $t = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $t = \pi/6$

9–16 Calcule la derivada de la función vectorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t\operatorname{sen} t, t^2, \cos 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \tan t, \sec t, 1/t^2 \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = at \cos 3t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c \cos^3 t\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17–20 Encuentre el vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ en el punto con el valor dado del parámetro t.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{-1}, 2 \arctan t, 2e^t \rangle, \quad t = 0$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2 \cos t\,\mathbf{j} + \tan t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Si $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, determine $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ y $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Si $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ y $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23–26 Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado.

23. $x = 1 + 2\sqrt{t}, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^3 + t; \quad (3, 0, 2)$

24. $x = e^t, y = te^t, z = te^{t^2}; \quad (1, 0, 0)$

25. $x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26. $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27–29 Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de ecuaciones paramétricas dadas en el punto especificado. Ilustre mediante gráficas tanto la curva como la recta tangente en una misma pantalla.

27. $x = t, y = e^{-t}, z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$

28. $x = 2 \cos t, y = 2 \operatorname{sen} t, z = 4 \cos 2t; (\sqrt{3}, 1, 2)$

29. $x = t \cos t, y = t, z = t \operatorname{sen} t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

30. (a) Encuentre el punto de intersección de las rectas tangentes a la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2 \operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$ en los puntos donde $t = 0$ y $t = 0.5$.



(b) Ilustre mediante gráficas la curva y ambas tangentes.

31. Las curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$ se cortan en el origen. Determine su ángulo de corte aproximado al grado más cercano.

32. ¿En qué punto se intersecan las curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ y $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$? Encuentre su ángulo de intersección, ajuste al grado más próximo.

33–38 Evalúe la integral.

33. $\displaystyle\int_0^1 (16t^3\,\mathbf{i} - 9t^2\,\mathbf{j} + 25t^4\,\mathbf{k})\,dt$

34. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{4}{1 + t^2}\,\mathbf{j} + \frac{2t}{1 + t^2}\,\mathbf{k} \right) dt$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (3 \operatorname{sen}^2 t \cos t\,\mathbf{i} + 3 \operatorname{sen} t \cos^2 t\,\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} t \cos t\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\displaystyle\int_1^2 (t^2\mathbf{i} + t\sqrt{t - 1}\,\mathbf{j} + t \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k})\,dt$

37. $\displaystyle\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\displaystyle\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

39. Encuentre $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

40. Determine $\mathbf{r}(t)$ si $\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

41. Demuestre la fórmula 1 del teorema 3.

42. Demuestre la fórmula 3 del teorema 3.

43. Demuestre la fórmula 5 del teorema 3.

44. Demuestre la fórmula 6 del teorema 3.

45. Si $\mathbf{u}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos, t, \operatorname{sen} t \rangle$, use la fórmula 4 del teorema 3 para hallar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

46. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son las funciones vectoriales del ejercicio 45, use la fórmula 5 del teorema 3 para hallar.

$$\frac{d}{d}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

47. Demuestre que si $\mathbf{r}$ es una función vectorial tal que existe $\mathbf{r}''$, entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

48. Encuentre una expresión para $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

49. Si $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, demuestre que $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Sugerencia*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

50. Si una curva tiene la propiedad de que el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ siempre es perpendicular al vector tangente $\mathbf{r}'(t)$, demuestre que la curva queda sobre una esfera con centro en el origen.

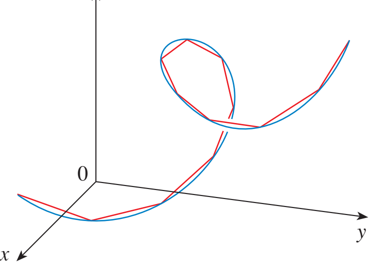
51. Si $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, demuestre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

13.3 LONGITUD DE ARCO Y CURVA

En la sección 10.2 se define la longitud de una curva plana con representación paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, como el límite de las longitudes de polígonos inscritos y, en el caso donde f' y g' son continuas, se llegó a la fórmula

$$\boxed{1} \qquad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$



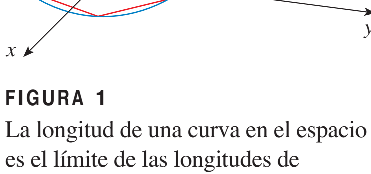


FIGURA 1
La longitud de una curva en el espacio es el límite de las longitudes de polígonos inscritos

La longitud de una curva en el espacio se define exactamente de la misma manera (véase figura 1). Suponga que la curva tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$, o bien, de forma paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, donde f', g' y h' son continuas. Si la curva se recorre exactamente una vez cuando t se incrementa desde a hasta b, entonces se puede demostrar que su longitud es

$$\boxed{2} \qquad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que ambas fórmulas de la longitud del arco (1) y (2) se pueden expresar en una forma más compacta.

$$\boxed{3} \qquad L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

porque, en el caso de las curvas planas $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

mientras que, en el caso de las curvas en el espacio $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

■ En la figura 2 se muestra el arco de la hélice cuya longitud se calcula en el ejemplo 1.

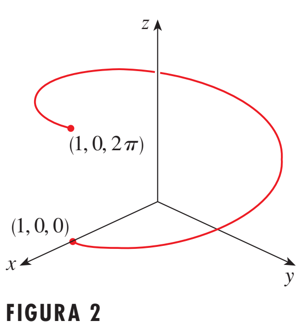


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 Calcule la longitud del arco de la hélice circular de la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ desde el punto (1, 0, 0,) hasta el punto $(1, 0, 2\pi)$.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, entonces

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

El arco desde (1, 0, 0) hasta $(1, 0, 2\pi)$ se describe mediante el intervalo del parámetro $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ y así, con la fórmula 3

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi \qquad \square$$

Una curva sencilla C se representa por más de una función vectorial. Por ejemplo, la cúbica alabeada

$$\boxed{4} \qquad \mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle \qquad 1 \leqslant t \leqslant 2$$

también se podría representar con la función

5 $$\mathbf{r}_2(u) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u} \rangle \qquad 0 \leqslant u \leqslant \ln 2$$

donde la relación entre los parámetros t y u es $t = e^u$. Entonces las ecuaciones 4 y 5 son **parametrizaciones** de la curva C. Si usara la ecuación 3 para calcular la longitud de C usando las ecuaciones 4 y 5, obtendría la misma respuesta. En general, se puede demostrar que cuando la ecuación 3 se usa para calcular la longitud de cualquier curva suave por partes, la longitud de arco es independiente de la parametrización que se utilice.

Ahora suponga que C es una curva suave por partes dada por una función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}, \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

donde $\mathbf{r}'$ es continua y C es recorrida exactamente una vez cuando t se incrementa desde a a b. Se define su **función de longitud de arco** s mediante

6 $$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}\,du$$

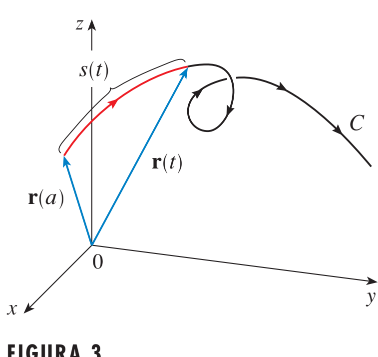
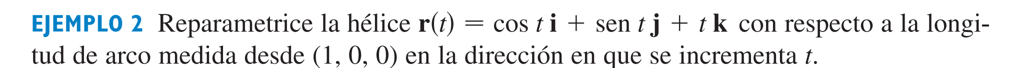


FIGURA 3

Por lo tanto, $s(t)$ es la longitud de la parte C entre $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$ (véase figura 3). Si deriva ambos miembros de la ecuación 6 usando la parte 1 del teorema fundamental del cálculo, llega a

7 $$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

Con frecuencia es útil **parametrizar una curva con respecto a la longitud de arco** porque la longitud de arco surge naturalmente de la forma de la curva y no depende de un sistema coordenado en particular. Si una curva $\mathbf{r}(t)$ ya está en función de un parámetro t y $s(t)$ es la función de la longitud de arco definida por la ecuación 6, entonces podría determinar t como una función de s: $t = t(s)$. Entonces la curva se puede reparametrizar en términos de s al escribir en su lugar t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. Por consiguiente, si $s = 3$ por ejemplo, $\mathbf{r}(t(3))$ es el vector de posición del punto 3 unidades de longitud a lo largo de la curva desde el punto de inicio.



EJEMPLO 2 Reparametrice la hélice $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ con respecto a la longitud de arco medida desde $(1, 0, 0)$ en la dirección en que se incrementa t.

SOLUCIÓN El punto inicial $(1, 0, 0)$ corresponde al valor del parámetro $t = 0$. Según el ejemplo 1

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

y de este modo $$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du = \int_0^t \sqrt{2}\,du = \sqrt{2}\,t$$

Por lo tanto, $t = s/\sqrt{2}$ y la requerida reparametrización se obtiene al sustituir el valor de t:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \cos\!\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\!\left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{j} + \left(s/\sqrt{2}\right)\mathbf{k}$$ □



CURVATURA

Una parametrización $\mathbf{r}(t)$ es llamada **suave** en un intervalo I si $\mathbf{r}'$ es continua y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ en I. Una curva se llama **suave** si tiene una parametrización suave. Una curva suave no tiene puntos agudos o cúspides; cuando gira el vector tangente, lo hace en forma continua.

Si C es una curva suave definida por la función vectorial $\mathbf{r}$, recuerde que el vector unitario tangente $\mathbf{T}(t)$ está definido por

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

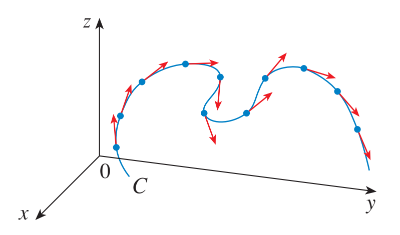


FIGURA 4
Vectores unitarios tangentes en puntos con separación igual sobre C

TEC Visual 13.3A muestra animaciones de vectores unitarios tangentes, como los de la figura 4 para una diversidad de curvas planas y curvas en el espacio.

e indica la dirección de la curva. De acuerdo con la figura 4 puede verse que $\mathbf{T}(t)$ cambia de dirección muy lentamente cuando C es casi recta, pero su dirección se modifica con mayor rapidez cuando C se flexiona o gira más abruptamente.

La curvatura de C en un punto dado es una medida de qué tan rápido cambia la curva de dirección en ese punto. Específicamente, se define como la magnitud de la tasa de cambio del vector unitario tangente con respecto a la longitud de arco. (Se usa la longitud de arco de tal manera que la curvatura será independiente de la parametrización.)

8 DEFINICIÓN La **curvatura** de una curva es

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

donde $\mathbf{T}$ es un vector tangente unitario.

Es más fácil de calcular la curvatura si está expresada en términos del parámetro t en lugar de s, de modo que se aplica la regla de la cadena (teorema 13.2.3, fórmula 6) para escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \text{y} \qquad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} \right|$$

Pero $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$ proviene de la ecuación 7, por lo que



$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EJEMPLO 3 Demuestre que la curvatura de una circunferencia de radio a es $1/a$.

SOLUCIÓN Se puede hacer que la circunferencia tenga como centro el origen y entonces una parametrización es

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$$

Por lo tanto $\qquad \mathbf{r}'(t) = -a \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + a \cos t\, \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = a$

de modo que $\qquad \mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j}$

y entonces $\qquad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\, \mathbf{i} - \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$

Esto da como resultado $|\mathbf{T}'(t)| = 1$, por lo que al usar la ecuación 9

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a}$$

□

El resultado del ejemplo 3 muestra que los círculos pequeños tienen una gran curvatura, y que la curvatura de los círculos grandes es pequeña, de acuerdo con la intuición.

Es posible ver directamente por la definición de curvatura que la curvatura de una recta es siempre 0 porque el vector tangente es constante.

La fórmula 9 se puede usar siempre para calcular la curvatura, pero la fórmula dada por el siguiente teorema es con frecuencia más conveniente de aplicar.

10 TEOREMA La curvatura de la curva dada por la función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

DEMOSTRACIÓN Puesto que $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/|\mathbf{r}'|$ y $|\mathbf{r}'| = ds/dt$,

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\mathbf{T} = \frac{ds}{dt}\mathbf{T}$$

de modo que la regla del producto (teorema 13.2.3, fórmula 3) da por resultado

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\mathbf{T}'$$

De acuerdo con el hecho de que $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$ (véase ejemplo 2 de la sección 12.4), tiene

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 (\mathbf{T} \times \mathbf{T}')$$

Ahora $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para toda t, de modo que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}'$ son ortogonales de acuerdo con el ejemplo 4 de la sección 13.2. Por lo tanto, según el teorema 12.4.6,

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}||\mathbf{T}'| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 |\mathbf{T}'|$$

Por consiguiente

$$|\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{(ds/dt)^2} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

y entonces

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

□

EJEMPLO 4 Calcule la curvatura de la cúbica alabeada $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en un punto general y en $(0, 0, 0)$.

SOLUCIÓN Primero se calculan los elementos requeridos:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 2, 6t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

Con el teorema 10 se obtiene entonces

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}$$

En el origen, donde $t = 0$, la curvatura es $\kappa(0) = 2$. □

En el caso especial de una curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$, puede escoger a x como parámetro y escribir $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Entonces, $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{j}$. Puesto que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, se tiene $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}$. Asimismo, $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ y entonces, de acuerdo con el teorema 10,

11

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

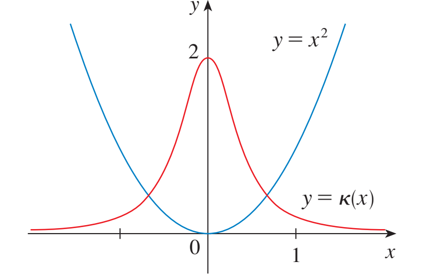


FIGURA 5
La parábola $y = x^2$ y su función de curvatura

EJEMPLO 5 Determine la curvatura de la parábola $y = x^2$ en los puntos (0, 0), (1, 1) y (2, 4).

SOLUCIÓN Puesto que $y' = 2x$ y $y'' = 2$, mediante la fórmula 11 se obtiene

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4x^2)^{3/2}}$$

La curvatura en (0, 0) es $\kappa(0) = 2$. En (1, 1) es $\kappa(1) = 2/5^{3/2} \approx 0.18$. En (2, 4) es $\kappa(2) = 2/17^{3/2} \approx 0.03$. Observe que de acuerdo con la expresión para $\kappa(x)$ o por la gráfica de κ en la figura 5 que $\kappa(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto corresponde al hecho de que la parábola parece hacerse más plana cuando $x \to \pm\infty$. □

VECTORES NORMALES Y BINORMALES

■ Es posible pensar que el vector normal señala la dirección en la cual la curva está girando en cada punto.

En un punto dado de una curva suave $\mathbf{r}(t)$ en el espacio, hay muchos vectores que son ortogonales al vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$. Separe uno al observar que, puesto que $|\mathbf{T}(t)| = 1$ para toda t, se tiene $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0$ de acuerdo con el ejemplo 4 de la sección 13.2, de modo que $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$. Note que $\mathbf{T}'(t)$ en sí mismo no es un vector unitario. Pero si $\mathbf{r}'$ también es suave, puede definir el **vector normal unitario principal** $\mathbf{N}(t)$, o simplemente **normal unitario**, como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

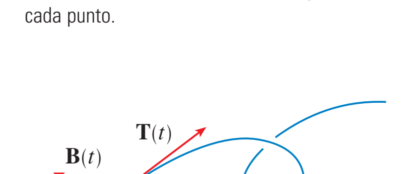


FIGURA 6

El vector $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$ se llama **vector binormal**. Es perpendicular a $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ y también es un vector unitario. Véase figura 6.

EJEMPLO 6 Determine los vectores normal unitario y binormal para la hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$$

■ En la figura 7 se ilustra el ejemplo 6, y muestra los vectores **T**, **N** y **B** en dos ubicaciones en la hélice. En general, los vectores **T**, **N** y **B**, cuyo inicio se encuentra en varios puntos de la curva, forman un conjunto de vectores ortogonales, que se llama estructura **TNB** y se desplaza a lo largo de la curva a medida que t varía. Esta estructura **TNB** desempeña una función importante en la rama de la matemática que se conoce como geometría diferencial y en sus aplicaciones al movimiento de vehículos espaciales.

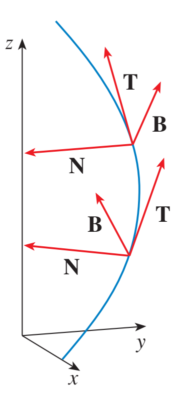


FIGURA 7

TEC En Visual 13.3B se muestra cómo la estructura TNB se desplaza a lo largo de varias curvas.

SOLUCIÓN Primero calcule los elementos necesarios para el vector normal unitario:

$$\mathbf{r}'(t) = -\text{sen}\, t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\text{sen}\, t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\, \mathbf{i} - \text{sen}\, t\, \mathbf{j}) \qquad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -\cos t\, \mathbf{i} - \text{sen}\, t\, \mathbf{j} = \langle -\cos t, -\text{sen}\, t, 0 \rangle$$

Esto demuestra que el vector normal en un punto de la hélice es horizontal y señala hacia el eje z. El vector binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\text{sen}\, t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\text{sen}\, t & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \text{sen}\, t, -\cos t, 1 \rangle \qquad \square$$

El plano definido por los vectores normal y binormal **N** y **B** en el punto P en la curva C se llama **plano normal** de C en P. Está constituido por todas las rectas que son ortogonales al vector tangente **T**. El plano definido por los vectores **T** y **N** se llama **plano osculador** de C en P. El nombre proviene de la palabra latina *osculum*, que quiere decir "beso". Es el plano que está más cerca de contener la parte de la curva cerca de P. (En el caso de una curva plana, el plano osculador es simplemente el plano que contiene a la curva.)

El círculo que se localiza en el plano osculador de C en P tiene la misma tangente que C en P, se sitúa en el lado cóncavo de C, hacia el cual señala **N**, y su radio $\rho = 1/\kappa$ es el recíproco de la curvatura, se llama **círculo osculador**, o **círculo de curvatura**, de C en P. Es el círculo que mejor describe cómo se comporta C cerca de P; comparte la misma tangente, normal y curvatura en P.

V EJEMPLO 7 Determine la ecuación del plano normal y del plano osculador de la hélice en el ejemplo 6 en el punto $P(0, 1, \pi/2)$.

■ En la figura 8 se ilustran la hélice y el plano osculador del ejemplo 7.

SOLUCIÓN El plano normal en P tiene como vector normal a $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1 \rangle$, de modo que una ecuación es

$$-1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

El plano osculador en P contiene los vectores **T** y **N**, de modo que su vector normal es $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. Según el ejemplo 6

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \text{sen}\, t, -\cos t, 1 \rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

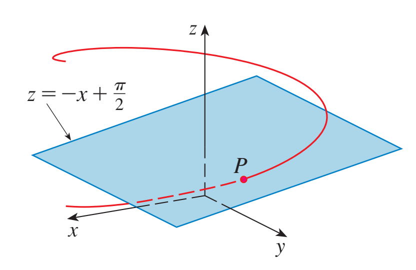


FIGURA 8

Un vector normal más simple es $\langle 1, 0, 1 \rangle$, de modo que una ecuación del plano osculador es

$$1(x - 0) + 0(y - 1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{o bien} \quad z = -x + \frac{\pi}{2} \qquad \square$$

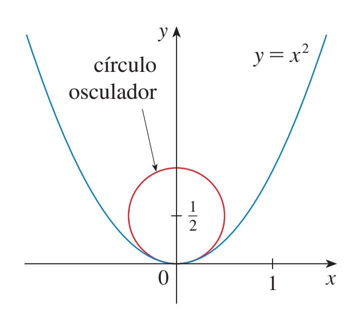


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Encuentre y grafique el círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen.

SOLUCIÓN De acuerdo con el ejemplo 5, la curvatura de la parábola en el origen es $\kappa(0) = 2$. Entonces, el radio del círculo osculador en el origen es $1/\kappa = \frac{1}{2}$ y su centro es $(0, \frac{1}{2})$. Por lo tanto, su ecuación es

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Por lo que toca a la gráfica de la figura 9, se usaron ecuaciones paramétricas de su círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, t$$ □

He aquí un resumen de las fórmulas de los vectores tangente unitario, normal unitario y binormal y curvatura.

TEC Visual 13.3C muestra cómo el círculo osculador cambia según el movimiento del punto a lo largo de la curva

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 EJERCICIOS

1–6 Determine la longitud de la curva.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\text{sen}\, t, 5t, 2\cos t\rangle, \quad -10 \leqslant t \leqslant 10$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + \ln\cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7–9 Encuentre la longitud de la curva correcta a cuatro lugares decimales. (Use calculadora para aproximar la integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, t\ln t\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, t, \cos t, \tan t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

10. Grafique la curva con ecuaciones paramétricas $x = \text{sen}\, t$, $y = \text{sen}\, 2t$, $z = \text{sen}\, 3t$. Encuentre la longitud total de esta curva correcta a cuatro lugares decimales.

11. Sea C la curva de intersección del cilindro parabólico $x^2 = 2y$ y la superficie $3z = xy$. Encuentre la longitud exacta de C del origen al punto (6, 18,36).

12. Encuentre, correcta a cuatro lugares decimales, la longitud de la curva de intersección del cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ y el plano $x + y + z = 2$.

13–14 Reparametrice la curva con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $t = 0$ en la dirección en que se incrementa t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos 2t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + e^{2t}\,\text{sen}\, 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponga que empieza en el punto (0, 0, 3) y se mueve 5 unidades a lo largo de la curva $x = 3\,\text{sen}\, t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ en la dirección positiva. ¿En dónde está?

16. Reparametrice la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

con respecto a la longitud de arco medida desde el punto (1, 0) en la dirección en que se incrementa t. Exprese la reparametrización en su forma más sencilla. ¿Cuáles son sus conclusiones con respecto a la curva?

17–20
(a) Determine los vectores unitario tangente y normal unitario $\mathbf{T}(t)$y $\mathbf{N}(t)$.
(b) Aplique la fórmula 9 para calcular la curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\,\text{sen}\, t, 5t, 2\cos t\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \text{sen}\, t - t\cos t, \cos t + t\, \text{sen}\, t \rangle, \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t} \rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, t^2 \rangle$

21–23 Aplique el teorema 10 para calcular la curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + 4\cos t\,\mathbf{k}$

24. Calcule la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t\, \text{sen}\, t, t \rangle$ en el punto $(1, 0, 0)$.

25. Encuentre la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ en el punto $(1, 1, 1)$.

26. Grafique la curva de ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = 4t^{3/2} \qquad z = -t^2$$

y calcule la curvatura en el punto $(1, 4, -1)$.

27–29 Mediante la fórmula 11 determine la curvatura.

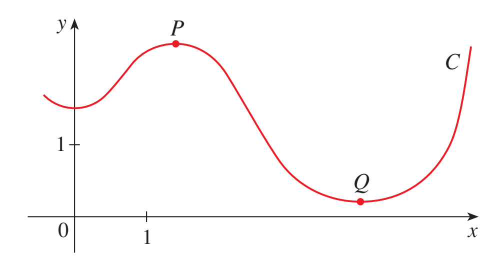
27. $y = 2x - x^2$ **28.** $y = \cos x$ **29.** $y = 4x^{5/2}$

30–31 ¿En qué punto la curva muestra curvatura máxima? ¿Qué sucede en la curvatura cuando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Encuentre una ecuación de la parábola cuya curvatura es 4 en el origen.

33. (a) ¿La curvatura de la curva C de la figura es mayor en P que en Q? Explique.
(b) Estime la curvatura en P y en Q graficando los círculos osculadores en dichos puntos.

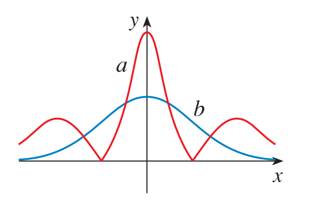


34–35 Mediante una calculadora para bosquejar la gráfica o una computadora grafique la curva y su función de curvatura $\kappa(x)$ en la misma pantalla. ¿Es la gráfica de κ que usted esperaba?

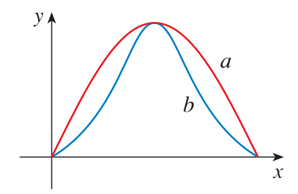
34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

36–37 Se muestran dos gráficas a y b. Una es la curva $y = f(x)$ y la otra es la gráfica de su función de curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada una de las curvas y explique sus elecciones.

36.



37.



CAS **38.** (a) Grafique la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, 3t, \text{sen}\, 2t, \text{sen}\, 3t \rangle$. ¿En cuántos puntos de la curva parece que la curvatura tiene un máximo relativo o absoluto?
(b) Mediante un CAS, determine y grafique la función de curvatura. ¿Esta gráfica confirma sus conclusiones del inciso (a)?

CAS **39.** La gráfica de $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\,\text{sen}\, t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \rangle$ se ilustra en la figura 12(b) de la sección 13.1. ¿Dónde cree que se encuentra la mayor curvatura? Utilice un CAS para determinar y graficar la función de la curvatura. ¿Para qué valores de t se presenta la curvatura más grande?

40. Mediante el teorema 10, demuestre que la curvatura de una curva paramétrica en el plano $x = f(t)$, $y = g(t)$ es

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t.

41–42 Con la fórmula del ejercicio 40, encuentre la curvatura.

41. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t\, \text{sen}\, t$

42. $x = 1 + t^3, \quad y = t + t^2$

43–44 Calcule los vectores **T**, **N** y **B** en el punto dado.

43. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \rangle, \quad (1, \frac{2}{3}, 1)$

44. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{sen}\, t, \ln \cos t \rangle, \quad (1, 0, 0)$

45–46 Determine las ecuaciones del plano normal y del plano osculador de la curva en el punto dado.

45. $x = 2\,\text{sen}\, 3t, \ y = t, \ z = 2\cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$

46. $x = t, \ y = t^2, \ z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

47. Determine las ecuaciones de los círculos osculadores de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 3)$. Mediante una calculadora para bosquejar gráficas o una computadora, grafique la elipse y ambos círculos osculadores en la misma pantalla.

48. Determine las ecuaciones de los círculos osculadores de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ en los puntos (0, 0) y $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Grafique ambos círculos osculadores y la parábola en la misma pantalla.

49. ¿En qué punto de la curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ el plano normal es paralelo al plano $6x + 6y - 8z = 1$?

50. ¿Hay un punto en la curva del ejercicio 49 donde el plano osculador es paralelo al plano $x + y + z = 1$? (*Nota*: Necesita un CAS para derivar, simplificar y calcular un producto cruz.)

51. Demuestre que la curvatura κ se relaciona con la tangente y los vectores normales mediante la ecuación

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

52. Demuestre que la curvatura de una curva plana es $\kappa = |d\phi/ds|$, donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{i}$; es decir, ϕ es el ángulo de inclinación de la recta tangente. Esto demuestra que la definición de curvatura es consistente con la definición de curvas planas dada en el ejercicio 69 de la sección 10.2.

53. (a) Demuestre que $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{B}$.
(b) Demuestre que $d\mathbf{B}/ds$ es perpendicular a $\mathbf{T}$.
(c) Deduzca de los incisos (a) y (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para ciertas funciones $\tau(s)$ que se denomina **torsión** de la curva. Con la torsión se mide el grado en que se puede torcer una curva.
(d) Demuestre que en el caso de una curva plana la torsión es $\tau(s) = 0$.

54. Las fórmulas siguientes, llamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, son fundamentales en la geometría diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$

La fórmula 1 proviene del ejercicio 51 y la fórmula 3 del ejercicio 53. Aplique el hecho de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deducir la fórmula 2 de las fórmulas 1 y 3.

55. Mediante las fórmulas de Frenet-Serret demuestre cada una de las siguientes. Las primas indican derivadas con respecto a t. Inicie como en la demostración del teorema 10.
(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$
(b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

56. Demuestre que la hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a\,\text{sen}\,t, bt\rangle$, donde a y b son constantes positivas, es de curvatura constante y torsión constante. Use el resultado del ejercicio 55(d).

57. Utilice la fórmula del ejercicio 55(d) para encontrar la torsión de la curva $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right\rangle$.

58. Encuentre la curvatura y la torsión de la curva $x = \text{senh}\,t$, $y = \cosh t$, $z = t$ en el punto (0, 1, 0).

59. La molécula de ADN tiene la forma de una hélice doble (véase figura 3 de la página 819). El radio de cada una de las hélices es de casi 10 unidades angstrom (Å $= 10^{-8}$ cm). Cada hélice se levanta 34 Å durante cada giro completo, y hay casi 2.9×10^8 giros completos. Estime la longitud de cada hélice.

60. Considere el problema del diseño de la vía de un ferrocarril para que haya una transición suave entre tramos de vía recta. Los tramos existentes en el eje x negativo se unirán con suavidad a un tramo a lo largo de la recta $y = 1$ para $x \geqslant 1$.
(a) Encuentre un polinomio $P = P(x)$ de grado 5 tal que la función F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ P(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

es continua y tiene pendiente continua y curvatura continua.
(b) Mediante una calculadora para bosquejar gráficas o una computadora, dibuje la gráfica de F.

13.4 MOVIMIENTO EN EL ESPACIO: VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

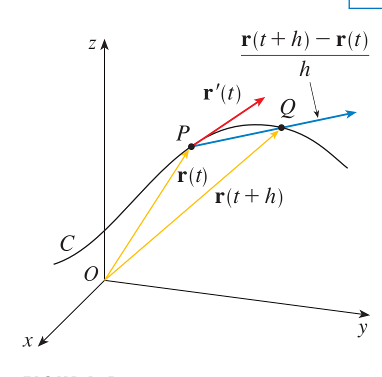


FIGURA 1

En esta sección se muestra de qué manera se pueden usar las ideas de vectores tangentes y normales y la curvatura en la física para estudiar el movimiento de un objeto, incluso su velocidad y aceleración, a lo largo de una curva en el espacio. En particular, seguimos los pasos de Newton usando estos métodos para deducir la primera ley de Kepler del movimiento de los planetas.

Suponga que una partícula se desplaza por el espacio de modo que su vector de posición en el tiempo t es $\mathbf{r}(t)$. Según la figura 1, note que, en el caso de valores pequeños de h, el vector

1
$$\frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

es una aproximación de la dirección de la partícula que se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)$. Su magnitud mide el tamaño del vector de desplazamiento por unidad de tiempo. El vec-

tor (1) da la velocidad promedio sobre un intervalo de longitud h y su límite es el **vector de velocidad v**(t) en el tiempo t:

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t)} \qquad (2)$$

Así el vector velocidad es también el vector tangente y señala la dirección de la recta tangente.

La **rapidez** de la partícula en el tiempo t es la magnitud del vector velocidad, es decir, $|\mathbf{v}(t)|$. Es aceptable porque, según (2) y la ecuación 13.3.7,

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} = \text{tasa de cambio de la distancia con respecto al tiempo.}$$

Como en el caso del movimiento unidimensional, la **aceleración** de la partícula se define como la derivada de la velocidad:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$$

EJEMPLO 1 El vector de posición de un objeto que se mueve en el plano está definido por $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Calcule la velocidad, la rapidez y la aceleración cuando $t = 1$, e ilustre el problema geométricamente.

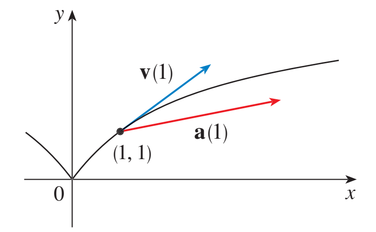


FIGURA 2

TEC Visual 13.4 muestra figuras animadas de los vectores de velocidad y aceleración que se desplazan a lo largo de varias curvas.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración en el tiempo t son

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$$

y la rapidez es

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$$

Cuando $t = 1$

$$\mathbf{v}(1) = 3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{a}(1) = 6\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} \qquad |\mathbf{v}(1)| = \sqrt{13}$$

Los vectores de velocidad y aceleración se ilustran en la figura 2. □

■ En la figura 3 se ilustra la trayectoria de la partícula del ejemplo 2 con vectores de velocidad y aceleración cuando $t = 1$.

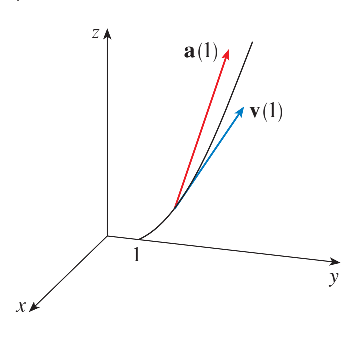


FIGURA 3



EJEMPLO 2 Encuentre la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, e^t, te^t \rangle$.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t \rangle$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2+t)e^t \rangle$$

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1+t)^2 e^{2t}}$$ □

Se pueden utilizar las integrales vectoriales que se estudiaron en la sección 13.2 con el fin de determinar los vectores de posición cuando se conocen los vectores de velocidad y aceleración, como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 3 Una partícula parte de su posición inicial $\mathbf{r}(0) = \langle 1, 0, 0 \rangle$ con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Su aceleración es $\mathbf{a}(t) = 4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule su velocidad y su posición en el tiempo t.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,dt$$

$$= 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

Para determinar el valor del vector constante $\mathbf{C}$, debe apoyarse en el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. La ecuación anterior da $\mathbf{v}(0) = \mathbf{C}$, de modo que $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y

$$\mathbf{v}(t) = 2t^2\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= (2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}$$

■ La gráfica de la trayectoria de la partícula para $0 \leqslant t \leqslant 3$ que se ilustra en la figura 4 se elaboró con la expresión para $\mathbf{r}(t)$ que se obtuvo en el ejemplo 3.

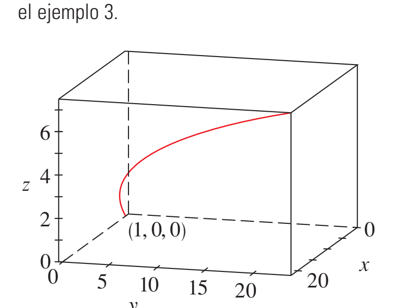


FIGURA 4

Como $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)\,dt$$

$$= \int [(2t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (3t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t + 1)\,\mathbf{k}]\,dt$$

$$= \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}$$

Al hacer $t = 0$, se llega a $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$, de modo que

$$\mathbf{r}(t) = \left(\tfrac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\mathbf{i} + (t^3 - t)\,\mathbf{j} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k}$$ □

En general, las integrales vectoriales permiten determinar la velocidad cuando la aceleración se conoce y la posición cuando se tiene la velocidad:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(u)\,du \qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(u)\,du$$

Si se conoce la fuerza que actúa sobre una partícula, entonces se puede determinar la aceleración a partir de la **segunda ley de Newton del movimiento**. La versión vectorial de esta ley establece que, si una fuerza $\mathbf{F}(t)$ actúa sobre un objeto de masa m y produce una aceleración $\mathbf{a}(t)$ en cualquier momento t, entonces

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$$

■ La velocidad angular del objeto que se desplaza y cuya posición P es $\omega = d\theta/dt$, donde θ es el ángulo que se muestra en la figura 5.

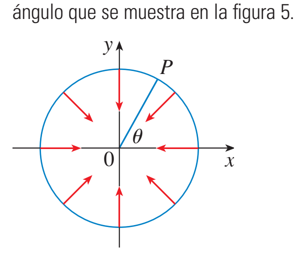


FIGURA 5

EJEMPLO 4 Un objeto de masa m que se desplaza según una trayectoria circular con velocidad angular constante ω tiene un vector de posición $\mathbf{r}(t) = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$. Calcule la fuerza que actúa en el objeto y demuestre que se dirige hacia el origen.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -a\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - a\omega^2\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, la segunda ley de Newton señala que la fuerza es

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t) = -m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j})$$

Observe que $\mathbf{F}(t) = -m\omega^2\mathbf{r}(t)$. Esto demuestra que la fuerza actúa en la dirección opuesta el radio vector $\mathbf{r}(t)$ y, por lo tanto, señala al origen (véase figura 5). Esta fuerza se llama fuerza *centrípeta*, viendo el centro o dirigida al centro o en dirección al centro. □

V EJEMPLO 5 Se dispara un proyectil con un ángulo de elevación α y velocidad inicial $\mathbf{v}_0$. Véase figura 6. Si se supone que la resistencia del aire es insignificante y que la única fuerza externa se debe a la gravedad, determine la función de posición $\mathbf{r}(t)$ del proyectil. ¿Qué valor de α maximiza el alcance, es decir, la distancia horizontal recorrida?

FIGURA 6

SOLUCIÓN Plantee unos ejes de tal modo que el proyectil inicie en el origen. Puesto que la fuerza de la gravedad actúa hacia abajo

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j}$$

donde $g = |\mathbf{a}| \approx 9.8$ m/s^2. Por consiguiente,

$$\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$$

Como $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$$

Si integra de nuevo obtiene

$$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

Pero $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$, de modo que el vector de posición del proyectil está dado por

3 $$\mathbf{r}(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0$$

Si escribe $|\mathbf{v}_0| = v_0$ la rapidez inicial del proyectil, entonces

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{j}$$

y la ecuación 3 se transforma en

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son por lo tanto

■ Si elimina a t de la ecuación 4, verá que y es una función cuadrática de x. Entonces, la trayectoria del proyectil es parte de una parábola.

4 $$x = (v_0\cos\alpha)t \qquad y = (v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

La distancia horizontal d es el valor de x cuando $y = 0$. Si $y = 0$, entonces obtiene $t = 0$, o bien, $t = (2v_0\,\text{sen}\,\alpha)/g$. El último valor de t da entonces

$$d = x = (v_0\cos\alpha)\frac{2v_0\,\text{sen}\,\alpha}{g} = \frac{v_0^2(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\,\text{sen}\,2\alpha}{g}$$

Evidentemente, d muestra un valor máximo cuando sen $2\alpha = 1$, es decir, $\alpha = \pi/4$. □

V EJEMPLO 6 Se lanza un proyectil con velocidad inicial de 150 m/s y ángulo de elevación de 45° desde un lugar a 10 m sobre el nivel del suelo. ¿Dónde tocará suelo el proyectil y con qué rapidez?

SOLUCIÓN Si hace que el origen sea el nivel del suelo, entonces la posición inicial del proyectil es (0, 10) y entonces necesita ajustar la ecuación 4 sumando 10 a su expresión para y. Con $v_0 = 150$ m/s, $\alpha = 45°$, y $g = 9.8$ m/s^2, tiene

$$x = 150\cos(\pi/4)t = 75\sqrt{2}\,t$$

$$y = 10 + 150\,\text{sen}(\pi/4)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 = 10 + 75\sqrt{2}\,t - 4.9t^2$$

El impacto ocurre cuando $y = 0$, es decir, $4.9t^2 - 75\sqrt{2}\,t - 10 = 0$. Al resolver esta ecuación cuadrática, y usar sólo el valor positivo de t, obtiene

$$t = \frac{75\sqrt{2} + \sqrt{11250 + 196}}{9.8} \approx 21.74$$

Entonces $x \approx 75\sqrt{2}(21.74) \approx 2\,306$, de modo que el proyectil toca el suelo a 2 306 m del punto de partida.

La velocidad del proyectil es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9.8t\right)\mathbf{j}$$

De modo que la rapidez de impacto es

$$|\mathbf{v}(21.74)| = \sqrt{\left(75\sqrt{2}\right)^2 + \left(75\sqrt{2} - 9.8 \cdot 21.74\right)^2} \approx 151 \text{ m/s}$$ □

COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN

Con frecuencia, cuando se estudia el movimiento de una partícula, es útil resolver la aceleración en dos componentes, a saber, una en la dirección de la tangente y la otra en la dirección de la normal. Si escribe $v = |\mathbf{v}|$ para la rapidez de la partícula, entonces

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

y de este modo $$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Si deriva ambos miembros de esta ecuación con respecto a t, obtiene

5 $$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}'$$

Si usa la expresión para la curvatura definida por la ecuación 13.3.9, entonces tiene

6 $$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \qquad \text{de modo que} \qquad |\mathbf{T}'| = \kappa v$$

El vector unitario normal fue definido en la sección anterior como $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, así (6) da

$$\mathbf{T}' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = \kappa v\mathbf{N}$$

y la ecuación 5 se transforma en

7 $$\boxed{\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}}$$

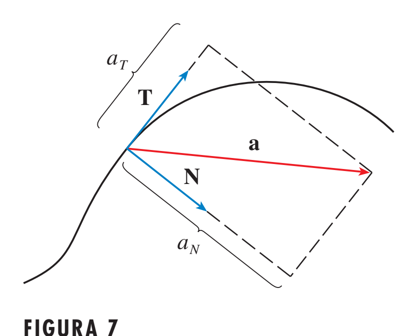


FIGURA 7

Al escribir a_T y a_N para las componentes tangencial y normal de la aceleración tiene

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

donde

8 $$a_T = v' \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa v^2$$

Esta resolución se ilustra en la figura 7.

Examine lo que plantea la fórmula 7. Lo primero que hay que observar es que no existe el vector binormal **B**. No importa cómo se desplaza un objeto por el espacio, su aceleración siempre está en el plano formado por **T** y **N** (el plano osculador). (Recuerde que **T** proporciona la dirección del movimiento y **N** señala la dirección en que gira la curva.) Lo siguiente que tiene que ver es que la componente tangencial de la aceleración es v', la tasa de cambio de la velocidad, y que la componente normal de la aceleración es κv^2, la curvatura multiplicada por el cuadrado de la velocidad. Esto tiene sentido si piensa en el pasajero de un automóvil: una vuelta muy cerrada en una carretera significa un gran valor de la curvatura κ, de modo que la componente de la aceleración perpendicular al movimiento es grande y el pasajero es lanzado contra la portezuela del automóvil. Una alta velocidad en la curva tiene el mismo efecto; de hecho, si duplica su velocidad, a_N se incrementa en un factor de 4.

Hay expresiones para las componentes tangencial y normal de la aceleración en las ecuaciones 8, pero lo mejor es tener expresiones que dependan sólo de **r**, **r**′ y **r**″. Con este fin obtiene el producto punto de $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ y **a** la define según la ecuación 7:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} &= v\mathbf{T}\cdot(v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N}) \\ &= vv'\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} + \kappa v^3\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} \\ &= vv' && \text{(puesto que } \mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1 \text{ y } \mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = 0\text{)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

9 $$a_T = v' = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Si usa la fórmula de la curvatura que proporciona el teorema 13.3.10, se tiene

10 $$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

EJEMPLO 7 Una partícula que se desplaza tiene una función de posición $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2, t^3\rangle$. Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración.

SOLUCIÓN

$$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

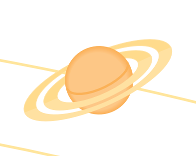
$$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$$

Por lo tanto, la ecuación 9 da la componente tangencial

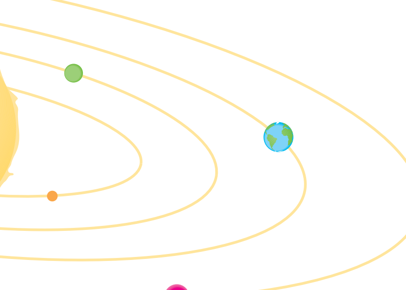
$$a_T = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t + 18t^3}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$



Puesto que $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\mathbf{i} - 6t^2\,\mathbf{j}$

La ecuación 10 proporciona la componente normal:

$$a_N = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2 + 9t^4}}$$ □

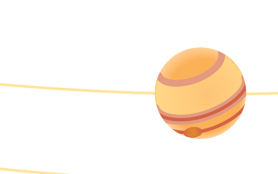


LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS

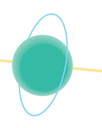
A continuación se explica uno de los más grandes logros del cálculo mostrando la manera como el material de este capítulo se puede utilizar para demostrar las leyes de Kepler del movimiento de los planetas. Después de 20 años de estudiar las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) formuló las tres leyes siguientes:

LEYES DE KEPLER

1. Un planeta gira alrededor del Sol siguiendo una órbita elíptica, uno de cuyos focos es el Sol.
2. La recta que une al Sol con un planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.



Isaac Newton, en su libro *Principia Mathematica*, de 1687, fue capaz de demostrar que estas tres leyes son consecuencias de dos de sus propias leyes, a saber, la segunda ley del movimiento y la ley de la gravitación universal. A continuación se demuestra la primera ley de Kepler. Las otras leyes se dejan como ejercicios, con algunas sugerencias.



Puesto que la fuerza gravitacional del Sol sobre un planeta es mucho más grande que las fuerzas que ejercen otros cuerpos celestes, es posible ignorar con toda seguridad todos los cuerpos del universo excepto al Sol y un planeta que gira a su alrededor. Utilice un sistema coordenado con el Sol en el origen, y haga que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ sea el vector de posición del planeta. (El mismo resultado efectivo se obtiene si hace que $\mathbf{r}$ sea el vector de posición de la Luna o de un satélite que gira alrededor de la Tierra o de un cometa que gira alrededor de una estrella.) El vector de la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ y el vector de la aceleración es $\mathbf{a} = \mathbf{r}''$. Aplique las siguientes leyes de Newton:

Segunda ley de movimiento: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Ley de la gravitación: $$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{F}$ es la fuerza de la gravitación de un planeta, m y M son las masas del planeta y del Sol, G es la constante de gravitación, $r = |\mathbf{r}|$, y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

Primero se demuestra que el planeta se mueve en un plano. Si iguala las expresiones de $\mathbf{F}$ de las dos leyes de Newton, encuentra que

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

y entonces **a** es paralelo a **r**. Se infiere que $\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Aplique la fórmula 5 del teorema 13.2.3 y escriba

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r}' \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}'$$

$$= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

donde **h** es un vector constante. (Podría suponer que $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$; es decir, **r** y **v** no son paralelos.) Esto quiere decir que el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ es perpendicular a **h** para todos los valores de t, de modo que el planeta siempre queda en el plano que pasa por el origen y es perpendicular a **h**. Por lo tanto, la órbita del planeta es una curva plana.

Para demostrar la primera ley de Kepler, escriba de nuevo el vector **h** como sigue:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r}' = r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u})'$$

$$= r\mathbf{u} \times (r\mathbf{u}' + r'\mathbf{u}) = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') + rr'(\mathbf{u} \times \mathbf{u})$$

$$= r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

Entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \frac{-GM}{r^2}\mathbf{u} \times (r^2\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = -GM\,\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$$

$$= -GM[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}'] \qquad \text{(según el teorema 12.4.8, propiedad 6)}$$

Pero $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ y puesto que $|\mathbf{u}(t)| = 1$, entonces se infiere del ejemplo 4 de la sección 13.2 que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

y así

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Al integrar ambos miembros de la ecuación, se llega a

$$\boxed{11} \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

donde **c** es un vector constante.

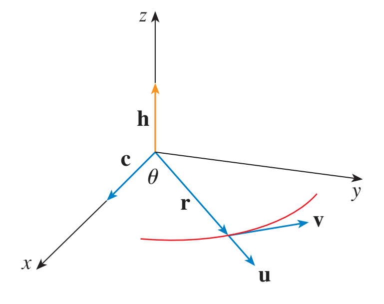


FIGURA 8

En este punto es conveniente elegir los ejes coordenados de modo que el vector **k** del modelo base apunte en la dirección del vector **h**. Entonces el planeta se desplaza en el plano xy. Puesto que tanto $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ como **u** son perpendiculares a **h**, la ecuación 11 muestra que **c** queda en el plano xy. Esto quiere decir que puede escoger los ejes x y y de tal manera que el vector **i** quede en la dirección de **c**, como se ilustra en la figura 8.

Si θ es el ángulo entre **c** y **r**, entonces (r, θ) son las coordenadas polares del planeta. Según la ecuación 11

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$

$$= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}|\cos\theta = GMr + rc\cos\theta$$

donde $c = |\mathbf{c}|$. Entonces

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c \cos \theta} = \frac{1}{GM} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e \cos \theta}$$

donde $e = c/(GM)$. Pero

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

donde $h = |\mathbf{h}|$. De modo que

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e \cos \theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e \cos \theta}$$

Si escribe $d = h^2/c$, obtiene la ecuación

12 $$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Al comparar con el teorema 10.6.6, es claro que la ecuación 12 es la ecuación polar de una sección cónica con foco en el origen y excentricidad e. Sabe que la órbita de un planeta es una curva cerrada, y entonces la cónica tiene que ser una elipse.

Con esto termina la deducción de la primera ley de Kepler. Se le guiará en la deducción de la segunda y la tercera leyes en el proyecto de aplicación de la página 848. Las demostraciones de estas tres leyes, hacen evidente que los métodos de este capítulo proporcionan una herramienta eficaz para explicar algunas de las leyes de la naturaleza.

13.4 EJERCICIOS

1. En la tabla se proporcionan coordenadas de una partícula que se desplaza por el espacio a lo largo de una curva suave.

(a) Calcule las velocidades promedio sobre los intervalos [0, 1], [0.5, 1], [1, 2] y [1, 1.5].

(b) Estime la velocidad y la rapidez de la partícula en $t = 1$.

t	x	y	z
0	2.7	9.8	3.7
0.5	3.5	7.2	3.3
1.0	4.5	6.0	3.0
1.5	5.9	6.4	2.8
2.0	7.3	7.8	2.7

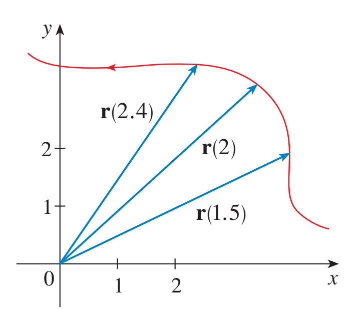
2. La figura muestra la trayectoria de una partícula que se mueve con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el tiempo t.

(a) Trace un vector que represente la velocidad promedio de la partícula sobre el intervalo $2 \leqslant t \leqslant 2.4$.

(b) Dibuje un vector que represente la velocidad promedio en el intervalo $1.5 \leqslant t \leqslant 2$.

(c) Escriba una expresión para el vector de velocidad $\mathbf{v}(2)$.

(d) Dibuje una aproximación al vector $\mathbf{v}(2)$ y estime la rapidez de la partícula en $t = 2$.



3–8 Calcule la velocidad, aceleración y rapidez de una partícula con la función de posición dada. Grafique la trayectoria de la partícula y dibuje los vectores de velocidad y aceleración para el valor especificado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle -\frac{1}{2}t^2, t \rangle, \quad t = 2$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 - t, 4\sqrt{t} \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \text{sen}\,t\mathbf{k}, \quad t = 0$

9–14 Calcule la velocidad, aceleración y rapidez de la partícula con la función de posición dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, t^3, t^2 - 1 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 3t, 2\,\text{sen}\,t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

15–16 Determine los vectores de velocidad y posición de una partícula que tiene la aceleración dada y la velocidad y posición iniciales dadas.

15. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

16. $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17–18

(a) Encuentre el vector de posición de una partícula que tiene la aceleración dada y la velocidad y posición iniciales especificadas.

(b) Mediante una computadora, grafique la trayectoria de la partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\mathbf{i} + \text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. La función de posición de una partícula, está definida por $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t\rangle$. ¿Cuándo la rapidez es mínima?

20. ¿Cuánta fuerza se requiere para que la partícula de masa m tenga la función de posición $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$?

21. Una fuerza de magnitud de 20 N, actúa en forma directa hacia arriba del plano xy sobre un objeto con masa de 4 kg. El objeto parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine la función de posición y su rapidez en el tiempo t.

22. Demuestre que si una partícula se desplaza con rapidez constante, entonces los vectores de velocidad y aceleración son ortogonales.

23. Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 500 m/s y ángulo de elevación 30°. Encuentre (a) el alcance del proyectil, (b) la altura máxima alcanzada y (c) la rapidez en el impacto.

24. Vuelva a hacer el ejercicio 23, ahora considerando que el proyectil se lanza desde un lugar a 200 m sobre el nivel del suelo.

25. Se arroja una pelota con un ángulo de 45° con respecto al suelo. Si la pelota aterriza a 90 m de distancia, ¿cuál es la rapidez inicial de la pelota?

26. Se dispara una pistola con un ángulo de elevación de 30°. ¿Cuál es la velocidad inicial del arma si la altura máxima del proyectil es de 500 m?

27. Un arma tiene una velocidad inicial de 150 m/s. Determine dos ángulos de elevación que se puedan aplicar para alcanzar un blanco a 800 m de distancia.

28. Un bateador envía la pelota de beisbol a 3 pies por arriba del nivel del suelo hacia la valla del campo central, la cual mide 10 pies de altura y está a 400 pies de *home*. Luego del golpe del bat, la pelota tiene una velocidad de 115 pies/s, con un ángulo de 50° con respecto a la horizontal. ¿Es un jonrón? (En otras palabras, ¿la pelota podrá librar la valla?)

29. Una ciudad medieval tiene la forma de un cuadrado y está protegida por murallas con longitud de 500 m y altura de 15 m. El lector es el comandante de un ejército atacante y lo más cerca de la muralla a donde puede llegar es 100 m. Su plan es poner fuego a la ciudad al lanzar piedras calientes por encima de la muralla (con una velocidad inicial de 80 m/s). ¿A qué margen de ángulos debe decirles a sus hombres que ajusten la catapulta? (Suponga que la trayectoria de las piedras es perpendicular a la muralla.)

30. Una pelota con masa de 0.8 kg se lanza al aire hacia el sur con una velocidad de 30 m/s a un ángulo de 30° con respecto al suelo. Un viento del oeste aplica una fuerza continua de 4 N a la pelota en dirección del este. ¿En dónde cae la pelota y con qué rapidez?

31. Por lo regular, el agua que corre por una parte recta de un río, fluye con mayor rapidez en el centro, y la velocidad es más lenta y llega a casi cero en las márgenes. Considere un largo trecho que va hacia el norte con márgenes paralelas con separación de 40 m. Si la velocidad máxima del agua es de 3 m/s, puede aplicar una función cuadrática como modelo básico para el caudal de agua x unidades desde la margen occidental: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Una embarcación parte a una velocidad constante de 5 m/s desde un punto A en la margen occidental mientras mantiene un rumbo perpendicular a la orilla. ¿Qué tan lejos río abajo tocará tierra en la orilla opuesta la embarcación? Grafique la trayectoria del barco.

(b) Suponga que le gustaría llevar la embarcación hasta el punto B en tierra en la orilla opuesta exactamente enfrente de A. Si mantiene una velocidad constante de 5 m/s y un rumbo constante, determine el ángulo que debe seguir la embarcación. En seguida grafique la trayectoria real que sigue el barco. ¿Parece ser real la trayectoria?

32. Otro modelo razonable para la velocidad del agua del río del ejercicio 31 es una función seno: $f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x/40)$. Si un hombre en un bote quisiera cruzar el río desde A hasta B con dirección constante y velocidad constante de 5 m/s, calcule el ángulo al cual el bote debe partir.

33–38 Calcule las componentes tangencial y normal del vector de la aceleración.

33. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{j}$

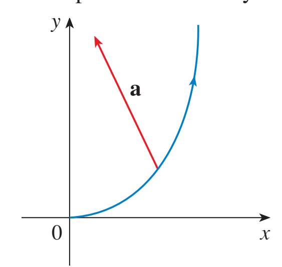
35. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}$

39. La magnitud del vector aceleración **a** es 10 cm/s^2. Mediante la figura, estime las componentes normal y tangencial de **a**.



40. Si una partícula cuya masa es m se desplaza con un vector de posición $\mathbf{r}(t)$, entonces su **cantidad de movimiento angular** se define como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ y su **par de torques** como $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Demuestre que $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$. Deduzca que si $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$ para toda t, entonces $\mathbf{L}(t)$ es constante. (Ésta es la *ley de la conservación del momento angular.*)

41. La función de posición de una nave espacial es

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

y las coordenadas de la estación espacial son (6, 4, 9). El capitán quiere que la nave espacial llegue a la estación espacial. ¿Cuándo se deben apagar los motores?

42. Un cohete que quema su combustible que lleva a bordo mientras se desplaza por el espacio, tiene una velocidad $\mathbf{v}(t)$ y una masa $m(t)$ en el tiempo t. Si los gases de escape salen con una velocidad $\mathbf{v}_e$ en relación con el cohete, se puede deducir a partir de la segunda ley de Newton del movimiento que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Demuestre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln\dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que en una recta el cohete acelere desde el reposo a dos veces la velocidad de sus propios gases de escape, ¿qué fracción de su masa inicial tendría que quemar el cohete como combustible?

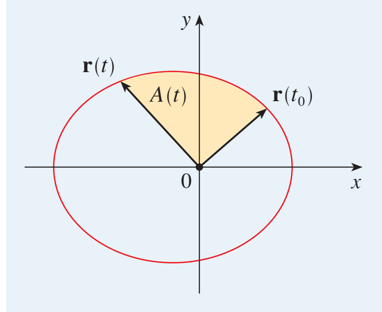
PROYECTO DE APLICACIÓN — LEYES DE KEPLER

Johannes Kepler formuló las tres leyes siguientes para el movimiento de los planetas con base en datos sobre la posición de los planetas en diferentes tiempos.

LEYES DE KEPLER

1. Un planeta gira alrededor del Sol siguiendo una órbita elíptica y uno de sus focos es el Sol.
2. La recta que une el Sol y un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Kepler formuló estas leyes porque se ajustaban a los datos astronómicos. No pudo ver por qué eran válidos o cómo se relacionaban entre sí. Pero Isaac Newton, en su libro *Principia Methematica,* de 1687, demostró cómo deducir las tres leyes de Kepler a partir de dos de las propias leyes de Newton, a saber, la segunda ley del movimiento y la ley de la gravitación universal. En la sección 13.4, se demuestra la primera ley de Kepler usando el cálculo de funciones vectoriales. En este proyecto se le guía a través de las demostraciones de la segunda y tercera leyes de Kepler, y se exploran algunas de sus consecuencias.



1. Siga los pasos siguientes para demostrar la segunda ley de Kepler. La notación es la misma que en la demostración de la primera ley de la sección 13.4. En particular, aplique las coordenadas polares de tal manera que $\mathbf{r} = (r\cos\theta)\,\mathbf{i} + (r\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$.

(a) Demuestre que $\mathbf{h} = r^2\dfrac{d\theta}{dt}\mathbf{k}$.

(b) Deduzca que $r^2\dfrac{d\theta}{dt} = h$.

(c) Si $A = A(t)$ es el área barrida por el vector del radio $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ en el intervalo de tiempo $[t_0, t]$ como en la figura, demuestre que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

(d) Deduzca que

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}h = \text{constante}$$

Esto establece que la razón a la cual A es barrida es constante y demuestra la segunda ley de Kepler.

2. Sea T el periodo de un planeta que gira alrededor del Sol, es decir, T es el tiempo que requiere para dar una vuelta recorriendo su órbita elíptica. Suponga que las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse son $2a$ y $2b$.

(a) Mediante el inciso (d) del problema 1, demuestre que $T = 2\pi ab/h$.

(b) Demuestre que $\dfrac{h^2}{GM} = ed = \dfrac{b^2}{a}$.

(c) A partir de los incisos (a) y (b), demuestre que $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{GM}a^3$.

Esto demuestra la tercera ley de Kepler. Observe que la constante de proporcionalidad $4\pi^2/(GM)$ es independiente del planeta.

3. El periodo de la órbita de la Tierra es aproximadamente de 365.25 días. Con esta información y la tercera ley de Kepler, calcule la longitud del eje mayor de la órbita terrestre. Necesita la masa del Sol, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg y la constante gravitacional $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$.

4. Es posible colocar un satélite en órbita alrededor de la Tierra de tal modo que permanezca fijo en un lugar determinado sobre el ecuador. Calcule la altitud que requiere tal satélite. La masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg; su radio es de 6.37×10^{6} m. Esta órbita se llama órbita geosíncrona de Clarke en honor al escritor Arthur C. Clarke, quien propuso la idea en 1948. El primero de tales satélites, *Syncom II*, fue lanzado en julio de 1963.

13 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué es una función vectorial? ¿Cómo calcula su derivada y su integral?

2. ¿Cuál es la relación entre las funciones vectoriales y las curvas espaciales?

3. ¿Cómo calcula el vector tangente a una curva suave en un punto? ¿Cómo determina la recta tangente? ¿Y el vector unitario tangente?

4. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son funciones vectoriales derivables, c es un escalar y f es una función de valores reales, escriba las reglas para derivar las funciones vectoriales siguientes.

(a) $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$ (b) $c\mathbf{u}(t)$ (c) $f(t)\mathbf{u}(t)$
(d) $\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$ (e) $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$ (f) $\mathbf{u}(f(t))$

5. ¿Cómo calcula la longitud de una curva en el espacio si conoce una función vectorial $\mathbf{r}(t)$?

6. (a) ¿Cuál es la definición de curvatura?
(b) Escriba una fórmula para curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{T}'(t)$.
(c) Escriba una fórmula para curvatura en términos de $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.
(d) Escriba una fórmula para curvatura de una curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$.

7. (a) Escriba fórmulas para los vectores unitarios normal y binormal de una curva suave $\mathbf{r}(t)$ en el espacio.
(b) ¿Cuál es el plano normal de una curva en un punto? ¿Cuál es el plano osculador? ¿Cuál es el círculo osculador?

8. (a) ¿Cómo calcula la velocidad, rapidez y aceleración de una partícula que se desplaza a lo largo de una curva en el espacio?
(b) Exprese la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal.

9. Enuncie las leyes de Kepler.

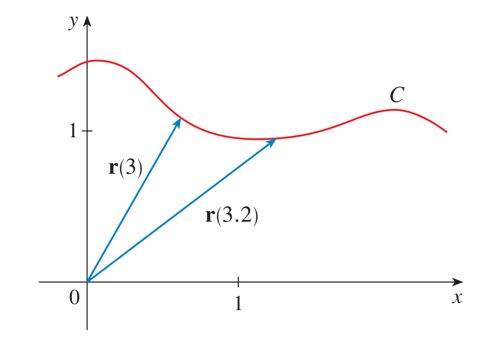
PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique la razón o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. La curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + 2t^3\,\mathbf{j} + 3t^3\,\mathbf{k}$ es una recta.
2. La derivada de una función vectorial se obtiene derivando cada función coordenada.
3. Si $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ son funciones vectoriales derivables, entonces
$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}'(t)$$
4. Si $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial derivable, entonces
$$\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$$
5. Si $\mathbf{T}(t)$ es el vector unitario tangente de una curva suave, entonces la curvatura es $\kappa = |d\mathbf{T}/dt|$.
6. El vector binormal es $\mathbf{B}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{T}(t)$.
7. Suponga que f es dos veces derivable continuamente. En un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, la curvatura es 0.
8. Si $\kappa(t) = 0$ para toda t, la curva es una línea recta.
9. Si $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para toda t, entonces $|\mathbf{r}'(t)|$ es una constante.
10. Si $|\mathbf{r}(t)| = 1$ para toda t, entonces $\mathbf{r}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$ para toda t.
11. El círculo osculador de una curva C en un punto tiene el mismo vector tangente, vector normal y curvatura que C en ese punto.

EJERCICIOS

1. (a) Grafique la curva cuya función vectorial es
$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k} \qquad t \geqslant 0$$
(b) Encuentre $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.
2. Sea $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2 - t}, (e^t - 1)/t, \ln(t + 1) \rangle$.
(a) Proporcione el dominio de $\mathbf{r}$.
(b) Calcule $\lim_{t \to 0} \mathbf{r}(t)$.
(c) Determine $\mathbf{r}'(t)$.
3. Determine una función vectorial que represente la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y el plano $x + z = 5$.
4.  Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \operatorname{sen} 2t$, $z = 2 \operatorname{sen} 3t$ en el punto $(1, \sqrt{3}, 2)$. Grafique la curva y la recta tangente en una misma pantalla.
5. Si $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t \cos \pi t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}$, evalúe $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\,dt$.
6. Sea C la curva cuyas ecuaciones son $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln t$. Determine (a) el punto donde C intersecta al plano xz, (b) las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en $(1, 1, 0)$, y (c) una ecuación del plano normal a C en $(1, 1, 0)$.
7. Aplique la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud del arco de la curva con ecuaciones $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 3$.
8. Calcule la longitud de la curva $\mathbf{r}(t) = \langle 2t^{3/2}, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
9. La hélice $\mathbf{r}_1(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ intersecta a la curva $\mathbf{r}_2(t) = (1 + t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el punto $(1, 0, 0)$. Calcule el ángulo de intersección de estas curvas.
10. Reparametrice la curva $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + e^t \cos t\,\mathbf{k}$ con respecto a la longitud de arco medida desde el punto $(1, 0, 1)$ en la dirección en que aumenta t.
11. En el caso de la curva definida por $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, t \right\rangle$, calcule
(a) el vector unitario tangente,
(b) el vector unitario normal y
(c) la curvatura.
12. Determine la curvatura de la elipse $x = 3 \cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ en los puntos $(3, 0)$ y $(0, 4)$.
13. Calcule la curvatura de la curva $y = x^4$ en el punto $(1, 1)$.
14. Plantee una ecuación del círculo osculador de la curva $y = x^4 - x^2$ en el origen. Grafique tanto la curva como su círculo osculador.
15. Formule una ecuación para el plano osculador de la curva $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = t$, $z = \cos 2t$ en el punto $(0, \pi, 1)$.
16. En la figura se ilustra la curva C trazada por una partícula con vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el tiempo t.
(a) Trace un vector que represente la velocidad promedio de la partícula en el intervalo $3 \leqslant t \leqslant 3.2$.
(b) Escriba una expresión para la velocidad $\mathbf{v}(3)$.
(c) Escriba una expresión para el vector unitario tangente $\mathbf{T}(3)$ y dibújelo.



17. Una partícula se mueve con función de posición $\mathbf{r}(t) = t \ln t\, \mathbf{i} + t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$. Calcule la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula.

18. Una partícula parte del origen con velocidad inicial $\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Su aceleración es $\mathbf{a}(t) = 6t\, \mathbf{i} + 12t^2\, \mathbf{j} - 6t\, \mathbf{k}$. Calcule su función de posición.

19. Un atleta dispara con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 43 pies/s. La mano del atleta se sitúa a 7 pies por arriba del suelo.
(a) ¿Dónde está el disparo 2 s después?
(b) ¿Qué tan alto va el disparo?
(c) ¿Dónde aterriza el disparo?

20. Calcule las componentes tangencial y normal del vector de la aceleración de una partícula con función de posición

$$\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + 2t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$$

21. Un disco de radio 1 gira en la dirección contraria a las manecillas del reloj a una velocidad angular constante ω. Una partícula parte del centro del disco y se desplaza hacia la orilla a lo largo de un radio fijo de tal modo que su posición en el tiempo t, $t \geqslant 0$, está definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{R}(t)$, donde

$$\mathbf{R}(t) = \cos \omega t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

(a) Demuestre que la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula es

$$\mathbf{v} = \cos \omega t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j} + t\mathbf{v}_d$$

donde $\mathbf{v}_d = \mathbf{R}'(t)$ es la velocidad de un punto en la orilla del disco.

(b) Demuestre que la aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula es

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_d + t\mathbf{a}_d$$

donde $\mathbf{a}_d = \mathbf{R}''(t)$ es la aceleración de un punto en el borde del disco. El término extra $2\mathbf{v}_d$ se llama *aceleración de Coriolis*. Es el resultado de la interacción de la rotación del disco y el movimiento de la partícula. Uno puede conseguir una demostración física de esta aceleración caminando hacia el borde de un carrusel.

(c) Determine la aceleración de Coriolis de una partícula que se mueve sobre un disco que gira según la ecuación

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \cos \omega t\, \mathbf{i} + e^{-t} \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

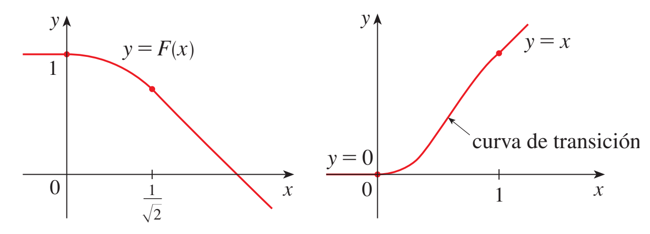
22. Al diseñar *curvas de transición* para unir partes rectas de vías de ferrocarril, es importante darse cuenta de que la aceleración del tren debe ser continua para que la fuerza de reacción que ejerce el tren en la vía también sea continua. Debido a las fórmulas para las componentes de la aceleración de la sección 13.4, éste será el caso si la curvatura varía en forma continua.

(a) Un candidato lógico para curva de transición para unir vías existentes dadas por $y = 1$ para $x \leqslant 0$ y $y = \sqrt{2} - x$ para $x \geqslant 1/\sqrt{2}$ podría ser la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 < x < 1/\sqrt{2}$, cuya gráfica es el arco del círculo mostrado en la figura. Parece razonable en una primera mirada. Demuestre que la función

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 < x < 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - x & \text{si } x \geqslant 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

es continua y tiene pendiente continua, pero su curvatura no es continua. Por lo tanto, f no es una curva de transición aceptable.

(b) Determine un polinomio de quinto grado para que funcione como curva de transición entre los siguientes segmentos rectilíneos: $y = 0$ para $x \leqslant 0$ y $y = x$ para $x \geqslant 1$. ¿Se podría efectuar mediante un polinomio de cuarto grado? Mediante una calculadora para hacer gráficas o una computadora, grafique la función "conectada" y compruebe que luce como la de la figura.



PROBLEMAS ADICIONALES

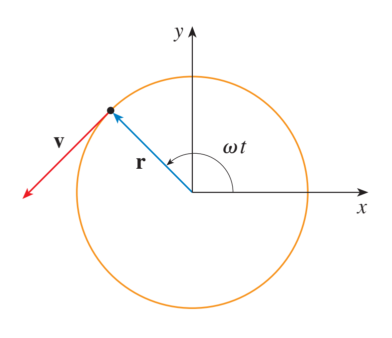


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Una partícula P se desplaza con velocidad angular constante ω alrededor de un círculo cuyo centro es el origen y cuyo radio es R. Se dice que la partícula mantiene un *movimiento circular uniforme*. Suponga que el movimiento es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y que la partícula está en el punto $(R, 0)$ cuando $t = 0$. El vector de posición en el tiempo $t \geqslant 0$ es $\mathbf{r}(t) = R\cos\omega t\,\mathbf{i} + R\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$.

(a) Encuentre el vector de velocidad $\mathbf{v}$ y demuestre que $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = 0$. Concluya que $\mathbf{v}$ es tangente al círculo y señala en la dirección del movimiento.

(b) Demuestre que la velocidad $|\mathbf{v}|$ de la partícula es la constante ωR. El *periodo* T de la partícula es el tiempo que requiere para completar una revolución. Concluya que

$$T = \frac{2\pi R}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\pi}{\omega}$$

(c) Encuentre el vector aceleración $\mathbf{a}$. Demuestre que es proporcional a $\mathbf{r}$ y que señala hacia el origen. Una aceleración con esta propiedad se llama *aceleración centrípeta*. Demuestre que la magnitud del vector aceleración es $|\mathbf{a}| = R\omega^2$.

(d) Suponga que la masa de partícula es m. Demuestre que la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ que se requiere para producir este movimiento, llamada *fuerza centrípeta*, es

$$|\mathbf{F}| = \frac{m|\mathbf{v}|^2}{R}$$

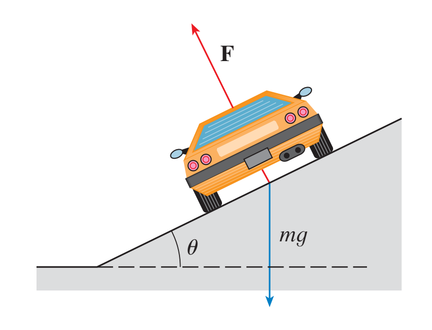


FIGURA PARA EL PROBLEMA 2

2. Una curva circular de radio R sobre una carretera es peraltada y el ángulo es θ de modo que un automóvil puede recorrer la curva con seguridad sin patinar cuando no hay fricción entre la carretera y las llantas. La pérdida de fricción puede ocurrir, por ejemplo, si la carretera está cubierta con una capa de agua o de hielo. La velocidad permitida v_R de la curva, es la velocidad máxima que un automóvil puede conseguir sin patinar. Suponga que un automóvil de masa m pasa por la curva a la velocidad permitida v_R. Dos fuerzas actúan sobre el automóvil: la fuerza vertical, mg, debida al peso del automóvil, y la fuerza $\mathbf{F}$ que ejerce la carretera y que es normal a ella. Véase figura.

La componente vertical de $\mathbf{F}$ equilibra el peso del vehículo, de modo que $|\mathbf{F}|\cos\theta = mg$. La componente horizontal de $\mathbf{F}$ genera una fuerza centrípeta en el vehículo, de modo que, según la segunda ley de Newton y el inciso (d) del problema 1,

$$|\mathbf{F}|\operatorname{sen}\theta = \frac{mv_R^2}{R}$$

(a) Demuestre que $v_R^2 = Rg\tan\theta$.

(b) Encuentre la velocidad permitida de una curva circular con 400 pies de radio que está peraltada y el ángulo es de 12°.

(c) Suponga que los ingenieros de diseño quieren mantener el peralte a 12°, pero desean incrementar la velocidad permitida en 50%. ¿Cuál debería ser el radio de la curva?

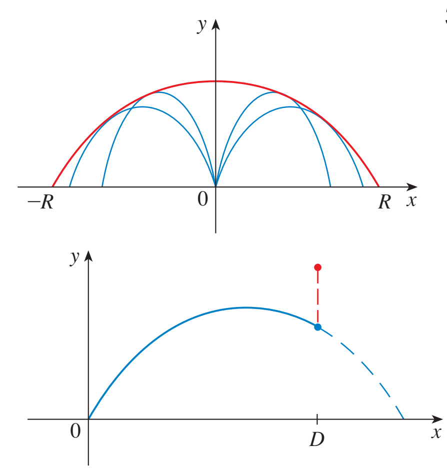


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

3. Se dispara un proyectil desde el origen con un ángulo de elevación α y velocidad inicial v_0. Cuando se supuso que la resistencia del aire era insignificante, y que la única fuerza que actuaba en el proyectil era la gravedad g, el ejemplo 5 de la sección 13.4 mostró que el vector de posición del proyectil es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\,\mathbf{i} + \left[(v_0\operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\right]\mathbf{j}$$

También se mostró que la distancia horizontal máxima del proyectil se alcanza cuando $\alpha = 45°$ y, en este caso, el alcance es $R = v_0^2/g$.

(a) ¿En qué ángulo se debe disparar el proyectil para alcanzar una altura máxima, y cuál es la altura máxima?

(b) Fije la velocidad inicial v_0 y considere la parábola $x^2 + 2Ry - R^2 = 0$, cuya gráfica se ilustra en la figura. Demuestre que el proyectil puede dar en cualquier blanco dentro o en el límite de la región delimitada por la parábola y el eje x, y que no puede dar en cualquier blanco fuera de esta región.

(c) Suponga que el arma se eleva a un ángulo de inclinación α con objeto de alcanzar un blanco que está suspendido a una altura h directamente sobre un punto D unidades abajo del alcance. El blanco se libera en el momento en que se dispara la pistola.Demuestre que el proyectil siempre da en el blanco, sin que importe el valor de v_0, siempre que el proyectil no golpee el suelo antes de D.

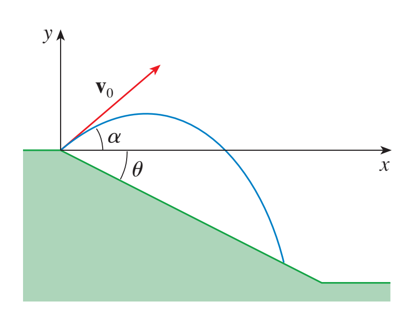


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. (a) Se dispara un proyectil desde el origen hacia un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El ángulo de elevación del arma y la velocidad inicial del proyectil son α y v_0, respectivamente. Encuentre el vector de posición del proyectil y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil como funciones del tiempo t. Ignore la resistencia del aire.

(b) Demuestre que el ángulo de elevación α que maximizará el alcance pendiente abajo es el ángulo medio entre el plano y la vertical.

(c) Suponga que el disparo se ejecuta en un plano inclinado que sube cuyo ángulo de inclinación es θ. Demuestre que con objeto de maximizar el alcance pendiente arriba, el proyectil debe ser disparado en la dirección media entre el plano y la vertical.

(d) En un trabajo que presentó Edmond Halley, en 1686, resumió las leyes de la gravedad y el movimiento de proyectiles, y las aplicó a la artillería. Un problema que planteó se relacionaba con el disparo de un proyectil para dar en un blanco a una distancia R en un plano inclinado hacia arriba. Demuestre que el ángulo al cual el proyectil debe ser disparado para dar en el blanco, es el mismo que el ángulo del inciso (c), pero use la mínima cantidad de energía. Apóyese en el hecho de que la energía necesaria para disparar el proyectil es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial, de modo que minimizar la energía equivale a minimizar la velocidad inicial.

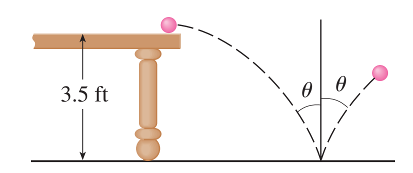


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. Una pelota rueda por una mesa a una velocidad de 2 pies/s. La mesa tiene 3.5 pies de altura.

(a) Determine el punto al cual la pelota golpea el piso, y calcule la rapidez en el instante del impacto.

(b) Encuentre el ángulo θ entre la trayectoria de la pelota y la línea vertical dibujada por el punto de impacto. Véase la figura.

(c) Suponga que la pelota rebota desde el suelo con el mismo ángulo con el cual golpea el piso, pero pierde 20% de su velocidad debido a la energía que absorbe en el impacto. ¿Dónde pega la pelota en el suelo en el segundo rebote?

6. Calcule la curvatura de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \int_0^t \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta \qquad y = \int_0^t \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\theta^2\right) d\theta$$



7. Si se dispara un proyectil con ángulo de elevación a y velocidad inicial v, entones las ecuaciones paramétricas para su trayectoria son

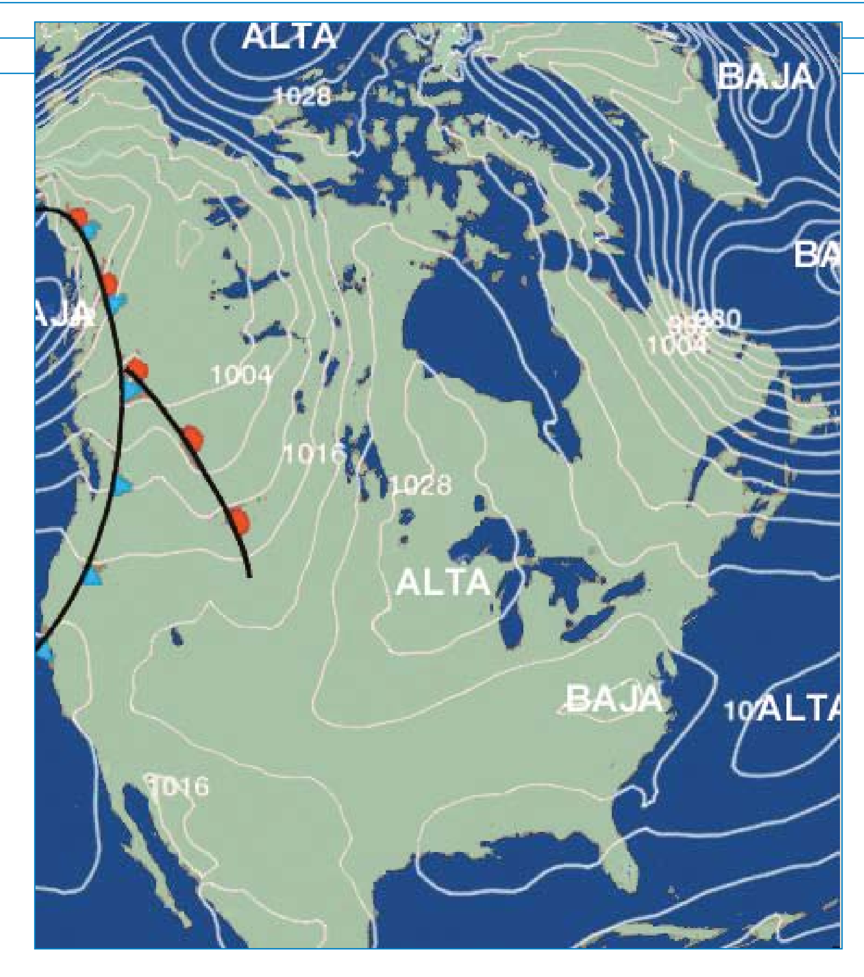
$$x = (v \cos \alpha)t \qquad y = (v \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

(Vea el ejemplo 5 de la sección 13.4.) Sabe que el alcance (distancia horizontal recorrida) es máximo cuando $\alpha = 45°$. ¿Qué valor de α hace máxima la distancia total recorrida por el proyectil? (Exprese su respuesta correcta al grado más cercano.)

8. Un cable tiene un radio r y longitud L y está enrollado en un cilindro de radio R sin que se traslape. ¿Cuál es la longitud más corta en el cilindro que queda cubierta con el cable?

14

DERIVADAS PARCIALES



Las funciones de dos variables se pueden visualizar por medio de curvas de nivel, que enlazan puntos donde la función toma un valor determinado. La presión atmosférica a una hora dada es una función de longitud y latitud y se mide en milibaras. Aquí las curvas de nivel se llaman isobaras y las que se presentan unen puntos que tenían la misma presión el 7 de marzo de 2007. (Las curvas marcadas 1028, por ejemplo, conectan puntos con presión de 1028 mb.) Los vientos de superficie tienden a moverse de regiones de alta presión por todas las isobaras hacia regiones de baja presión, y son más fuertes donde las isobaras están muy cercanas entre sí.

Hasta este momento sólo se ha estudiado el cálculo de funciones de una sola variable. En el mundo real, sin embargo, las cantidades físicas dependen con frecuencia de dos o más variables, por lo que en este capítulo se tratan funciones de varias variables y se generalizan las ideas básicas del cálculo diferencial a dichas funciones.

14.1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En esta sección se estudian funciones de dos o más variables desde cuatro puntos de vista:

- Verbalmente (mediante una descripción hecha con palabras).
- Numéricamente (mediante una tabla de valores).
- Algebraicamente (mediante una fórmula explícita).
- Visualmente (mediante una gráfica o curvas de nivel).

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

La temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra en cualquier momento dado, depende de la longitud x y la latitud y del punto. Se puede pensar que T es una función de dos variables x y y, o como una función del par (x, y). Esta dependencia funcional se indica al escribir $T = f(x, y)$.

El volumen V de un cilindro circular depende del radio r y de su altura h. De hecho, sabe que $V = \pi r^2 h$. Se dice que V es una función de r y h, y se escribe $V(r, h) = \pi r^2 h$.

DEFINICIÓN Una **función *f* de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D un número real único que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el **dominio** de f y su **rango** es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}$.

A menudo, se escribe $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x, y). Las variables x y y son **variables independientes** y z es la **variable dependiente**. [Compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una sola variable.]

Una función de dos variables es justo una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de representar tal función se logra mediante un diagrama de flechas (véase figura 1), donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy.

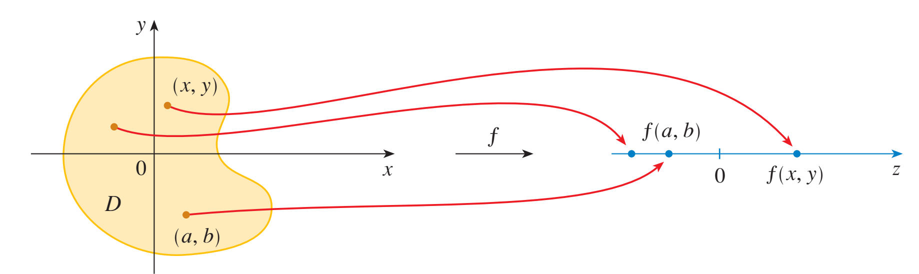


FIGURA 1

Si una función f está definida por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de los pares (x, y) para el cual la expresión dada es un número muy bien definido.

EJEMPLO 1 Determine los dominios de las funciones siguientes y evalúe $f(3, 2)$.

(a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$ (b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

SOLUCIÓN

(a) $$f(3, 2) = \frac{\sqrt{3 + 2 + 1}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

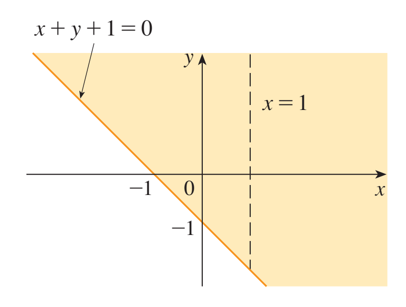


FIGURA 2

Dominio de $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo de raíz cuadrada es no negativa. Entonces, el dominio de f es

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geqslant 0,\ \ x \neq 1\}$$

La desigualdad $x + y + 1 \geqslant 0$, o $y \geqslant -x - 1$, describe los puntos que quedan en la recta $y = -x - 1$, o por arriba de ella, y $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio (véase figura 2).

(b) $$f(3, 2) = 3 \ln(2^2 - 3) = 3 \ln 1 = 0$$

Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define sólo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x, y) \mid x < y^2\}$. Éste es el conjunto de puntos a la izquierda de la parábola $x = y^2$. Véase figura 3. □

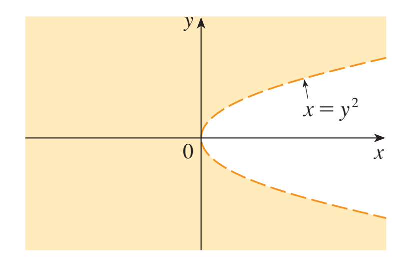


FIGURA 3

Dominio de $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$

No todas las funciones se dan en fórmulas explícitas. La función del ejemplo siguiente se describe en forma verbal y mediante estimaciones numéricas de sus valores.

EJEMPLO 2 En regiones donde el clima del invierno es extremoso, el efecto de enfriamiento se utiliza a menudo para representar la intensidad evidente del frío. Este índice W es una temperatura subjetiva que depende de la temperatura real T y de la velocidad del viento v. De este modo, W es una función de T y de v, y se escribe $W = f(T, v)$. En la tabla 1 se registran los valores de W que reunió el *National Weather Service* de Estados Unidos y el *Meteorological Service of Canada*.

TABLA 1

Efecto de enfriamiento en función de la temperatura del aire y de la velocidad del viento

■ **NUEVO ÍNDICE EFECTO DE ENFRIAMIENTO**

Se instituyó un nuevo índice de frío en el aire en noviembre de 2001, y es más exacto que el antiguo índice para medir qué tanto frío se siente cuando hace viento. El nuevo índice se basa en un modelo de qué tan rápido la cara de una persona pierde calor. Se desarrolló por medio de estudios clínicos en los cuales personas voluntarias fueron expuestas a una diversidad de temperaturas y magnitudes de velocidad de viento en un túnel de aire refrigerado.

Velocidad del viento (km/h); Temperatura real (°C)

T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

Por ejemplo, la tabla 1 muestra que si la temperatura es -5°C y la velocidad del viento es de 50 km/h, entonces subjetivamente se sentiría tanto frío como si la temperatura fuera de casi -15°C sin viento. Entonces

$$f(-5, 50) = -15$$ □

EJEMPLO 3 En 1928 Charles Cobb y Paul Douglas publicaron un estudio en el cual modelaban el crecimiento de la economía estadounidense durante el periodo 1899-1922. Consideraron

TABLA 2

Año	P	L	K
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	117	122
1903	124	122	131
1904	122	121	138
1905	143	125	149
1906	152	134	163
1907	151	140	176
1908	126	123	185
1909	155	143	198
1910	159	147	208
1911	153	148	216
1912	177	155	226
1913	184	156	236
1914	169	152	244
1915	189	156	266
1916	225	183	298
1917	227	198	335
1918	223	201	366
1919	218	196	387
1920	231	194	407
1921	179	146	417
1922	240	161	431

un punto de vista simplificado de la economía en el cual la producción está determinada por la cantidad de mano de obra relacionada y la cantidad de capital invertido. Si bien hay muchos otros factores que afectan el rendimiento económico, su modelo resultó ser notablemente exacto. La función mediante la cual modelaron la producción era de la forma

$$\boxed{1} \qquad P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

donde P es la producción total (el valor monetario de todos los bienes que se producen en un año), L es la cantidad de mano de obra (la cantidad total de horas-hombre trabajadas en un año) y K es la cantidad de capital invertido (el valor monetario de toda la maquinaria, equipo y edificios). En la sección 14.3 se demuestra cómo la forma de la ecuación 1 se infiere de ciertas suposiciones económicas.

Cobb y Douglas se apoyaron en datos que publicó el gobierno para obtener la tabla 2. Tomaron el año 1899 como una línea de referencia y a P, L y K para 1899 se les asignó el valor de 100. Los valores de otros años se expresaron como porcentajes de los valores de 1899.

Cobb y Douglas aplicaron el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos de la tabla 2 a la función

$$\boxed{2} \qquad P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

(Véase ejercicio 75 si desea mayores detalles.)

Si usa el modelo definido por la función en la ecuación 2 para calcular la producción en los años 1910 y 1920, obtiene los valores

$$P(147, 208) = 1.01(147)^{0.75}(208)^{0.25} \approx 161.9$$

$$P(194, 407) = 1.01(194)^{0.75}(407)^{0.25} \approx 235.8$$

que son muy cercanos a los valores reales, 159 y 231.

La función de la producción (1) se usó posteriormente en muchos contextos, que van desde compañías individuales hasta cuestiones económicas globales. Ahora se le conoce como la **función de la producción de Cobb-Douglas**. Su dominio es $\{(L, K) \mid L \geqslant 0, K \geqslant 0\}$ porque L y K representan mano de obra y capital y, por lo tanto, nunca son negativas. □

EJEMPLO 4 Determine el dominio y rango de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

SOLUCIÓN El dominio de g es

$$D = \{(x, y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geqslant 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

que es el círculo de centro (0, 0) y radio 3 (véase figura 4). El rango de g es

$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

Puesto que z es una raíz cuadrada positiva, $z \geqslant 0$. Asimismo

$$9 - x^2 - y^2 \leqslant 9 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leqslant 3$$

Y el rango es

$$\{z \mid 0 \leqslant z \leqslant 3\} = [0, 3]$$ □

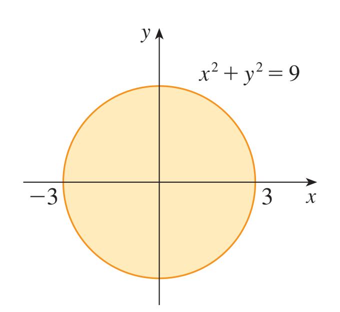


FIGURA 4
Dominio de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

GRÁFICAS

Otro modo de representar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su gráfica.

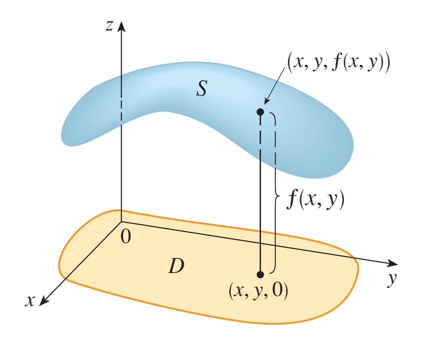


FIGURA 5

DEFINICIÓN Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en D.

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$. Puede representar la gráfica S de f directamente encima o abajo de su dominio D en el plano xy (véase figura 5).

EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano, primero calcule las intersecciones con los ejes. Haga $y = z = 0$ en la ecuación y obtiene $x = 2$ como la intersección con el eje x. Con el mismo procedimiento obtiene la intersección con el eje y, que es 3, y la del eje z, que es 6. Ya con esto puede graficar la parte de la gráfica que está en el primer octante (véase figura 6). □

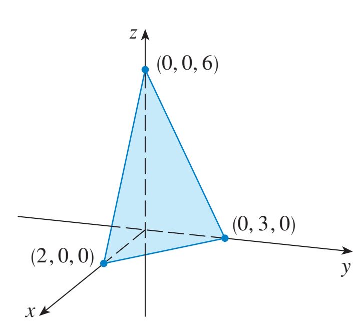


FIGURA 6

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

que se llama **función lineal**. La gráfica de dicha función tiene por ecuación

$$z = ax + by + c, \text{ o } ax + by - z + c = 0,$$

por lo que es un plano. Así como las funciones lineales de una sola variable son importantes en el cálculo de una sola variable, verá que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

EJEMPLO 6 Grafique $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

SOLUCIÓN La ecuación de la gráfica es $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtiene $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, es decir $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que reconoce como una ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es sólo la parte superior de esta esfera (véase figura 7). □

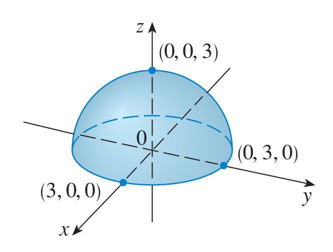


FIGURA 7
Gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

NOTA Toda una esfera no puede ser representada por una sola función de x y y. Como se vio en el ejemplo 6, la semiesfera superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ está representada por la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. La semiesfera inferior está representada por la función $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

EJEMPLO 7 Mediante una computadora, trace la gráfica de la función de la producción de Cobb-Douglas $P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

SOLUCIÓN En la figura 8 se muestra la gráfica de P para valores de la mano de obra L y el capital K que está entre 0 y 300. La computadora dibujó la superficie trazando trazas verticales. Según estas trazas el valor de la producción P se incrementa cuando L o K se incrementan, como era de esperarse.

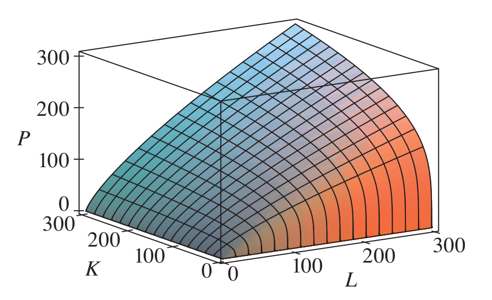


FIGURA 8

□

V EJEMPLO 8 Determine el dominio, el rango y grafique $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Observe que $h(x, y)$ está definida por todos los pares ordenados posibles de números reales (x, y), de modo que el dominio es $\mathbb{R}^2$, todo el plano xy. El rango de h es el conjunto $[0, \infty)$ de todos los números reales no negativos. [Observe que $x^2 \geqslant 0$ y $y^2 \geqslant 0$, de modo que $h(x, y) \geqslant 0$ para toda x y y.]

La gráfica de h tiene por ecuación a $z = 4x^2 + y^2$, la cual es el paraboloide elíptico que se dibujó en el ejemplo 4 de la sección 12.6. Las trazas horizontales son elipses y las trazas verticales son parábolas (véase figura 9).

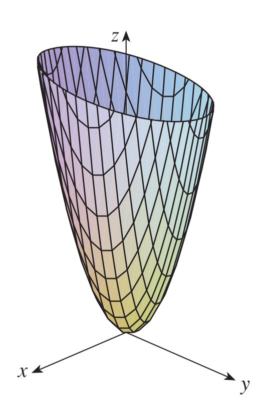
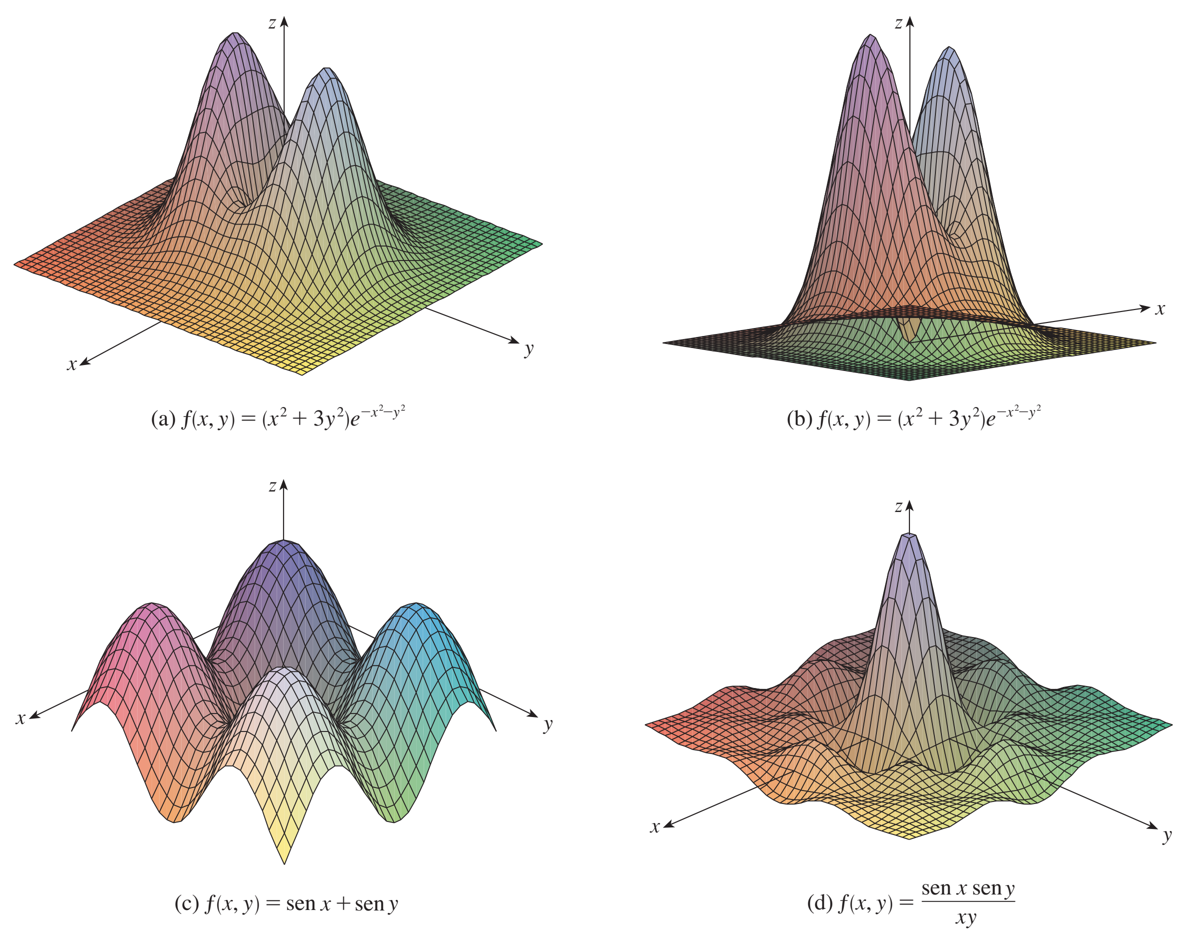


FIGURA 9
Gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$

□

Hay ya programas para computadora con los que se pueden obtener las gráficas de funciones de dos variables. En la mayor parte de dichos programas las trazas en los planos verticales $x = k$ y $y = k$ se dibujan para valores de k separados regularmente, y se eliminan algunas partes de la gráfica usando, si está disponible, alguna función que elimine líneas ocultas.

En la figura 10 se ilustran gráficas de varias funciones generadas mediante una computadora. Observe que se consegue una imagen especialmente buena de una función cuando se usa la rotación para tener vistas desde diferentes puntos. En los incisos (a) y (b) la gráfica de f es muy plana y cercana al plano xy excepto cerca del origen. La razón es que $e^{-x^2-y^2}$ es muy pequeña cuando x y y es grande.



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

(c) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

(d) $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{xy}$

FIGURA 10

CURVAS DE NIVEL

Hasta este momento se cuenta con dos métodos para representar funciones: diagramas de flechas y gráficas. Un tercer método, tomado prestado de los cartógrafos, es un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de elevación igual se unen para formar *curvas de contorno* o *curvas de nivel.*

DEFINICIÓN Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En otras palabras, señala dónde tiene una altura k la gráfica de f.

Puede ver en la figura 11 la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x, y) = k$ son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Entonces, si dibuja las curvas de nivel de una función y las representa como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces puede formar men-

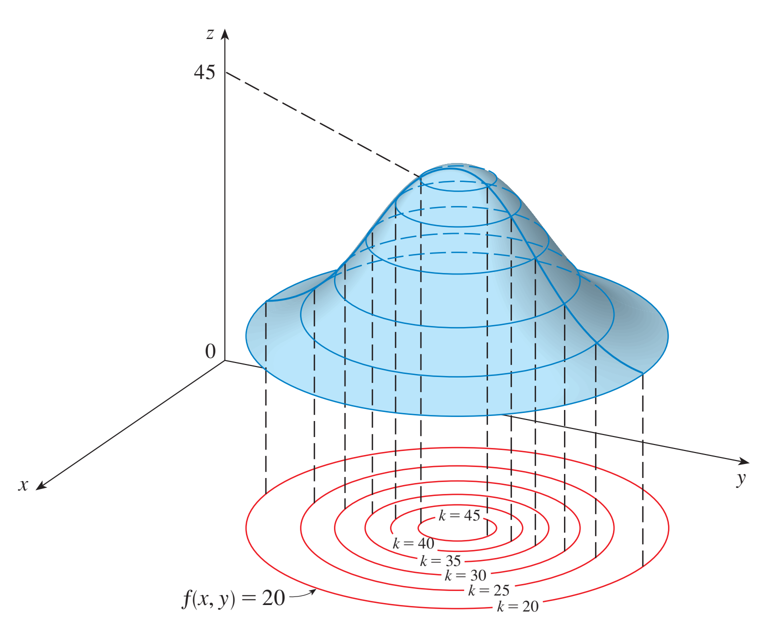


FIGURA 11

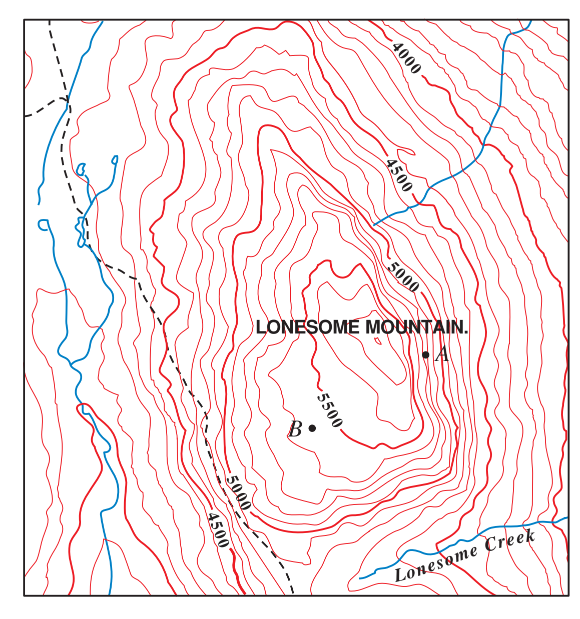


FIGURA 12

TEC Visual 14.1A proporciona figuras animadas de la figura 11 y muestra cómo se alzan las curvas de nivel hasta tener las gráficas de funciones.

talmente una imagen de la gráfica. La superficie tiene pendiente abrupta donde las curvas de nivel están muy cercanas entre sí. Es algo más plana donde las curvas de separan.

Un ejemplo común de las curvas de nivel son los mapas topográficos de regiones montañosas, como el mapa de la figura 12. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante por arriba del nivel del mar. Si caminara por una de esas curvas de nivel, usted nunca ascendería o bajaría. Otro ejemplo común es la función de temperatura introducida en el párrafo de la introducción de esta sección. En este caso, las curvas de nivel se denominan **isotermas**, y unen localidades con la misma temperatura. En la figura 13 se muestra un mapa climático del mundo, en el que se indican las temperaturas promedio de enero. Las isotermas son las curvas que separan las bandas de colores. Las **isobaras** del mapa de presión atmosférica de la página 854 son otro ejemplo de las curvas de nivel.

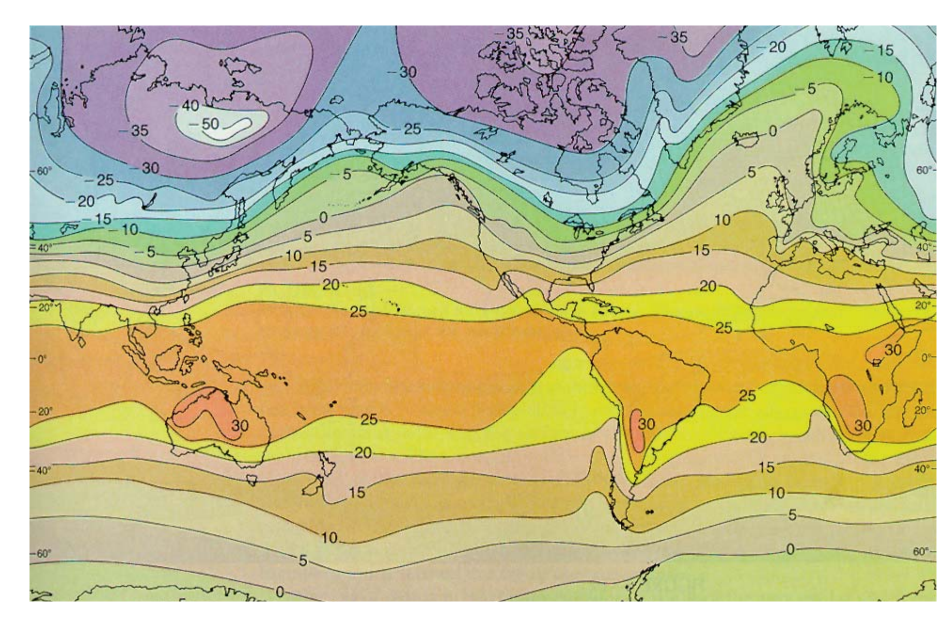


FIGURA 13

Temperaturas en el mundo a nivel medio del mar en el mes de enero dadas en grados Celsius

Tarbuck, *Atmosphere: Introduction to Meteorology*, 4th Edition, © 1989. Reimpreso con permiso de Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, NJ.

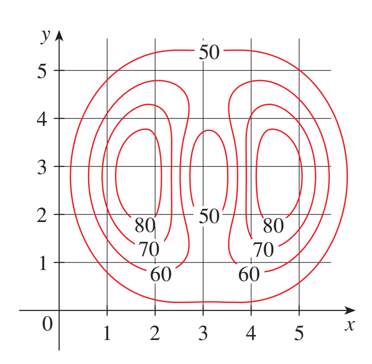


FIGURA 14

EJEMPLO 9 Un mapa de curvas de nivel de una función *f,* se ilustra en la figura 14. Úselo para estimar los valores de $f(1, 3)$ y $f(4, 5)$.

SOLUCIÓN El punto (1, 3) queda entre las curvas de nivel con valores de z de 70 y 80. Estime que

$$f(1, 3) \approx 73$$

En forma similar, estime que

$$f(4, 5) \approx 56$$

□

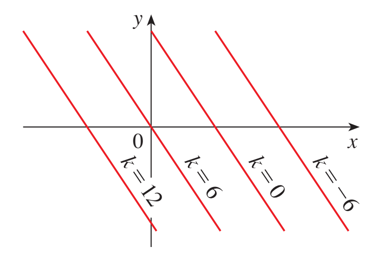


FIGURA 15
Mapa de curvas de nivel de $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$

EJEMPLO 10 Grafique las curvas de nivel de la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para los valores $k = -6, 0, 6, 12$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$6 - 3x - 2y = k \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

Es una familia de rectas cuya pendiente es $-\frac{3}{2}$. Las cuatro curvas de nivel particulares con $k = -6, 0, 6$ y 12 son $3x + 2y - 12 = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$, $3x + 2y = 0$ y $3x + 2y + 6 = 0$. Se grafican en la figura 15. Entre las curvas de nivel hay una separación igual, y dichas curvas son rectas paralelas porque la gráfica de f es un plano (véase figura 6).

□

V EJEMPLO 11 Grafique las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o bien} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

Es una familia de círculos concéntricos cuyo centro es (0, 0) y radio $\sqrt{9 - k^2}$. Los casos $k = 0, 1, 2, 3$ se ilustran en la figura 16. Intente imaginar estas curvas de nivel elevadas desde la superficie, y compare con la gráfica de g (hemisferio) de la figura 7. (Véase TEC Visual 14.1A.)

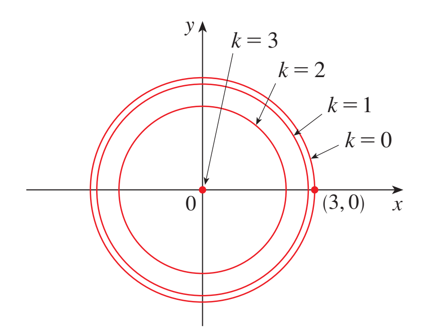


FIGURA 16
Mapa de curvas de nivel de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

□

EJEMPLO 12 Grafique algunas curvas de nivel de la función $h(x, y) = 4x^2 + y^2$.

SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$4x^2 + y^2 = k \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1$$

la cual, para $k > 0$, describe una familia de elipses con semiejes $\sqrt{k}/2$ y $\sqrt{k}$. En la figura 17(a) se ilustra un mapa de curvas de nivel de h dibujado mediante una computadora, y las curvas de nivel corresponden a $k = 0.25, 0.5, 0.75, \ldots, 4$. En la figura 17(b) se muestran estas curvas de nivel elevadas para obtener la gráfica de h (un paraboloide elíptico), donde se transforman en trazas horizontales. En la figura 17 aparece cómo se ve la gráfica de h a partir de las curvas de nivel.

TEC Visual 14.1 B muestra la conección entre las superficies y sus mapas de contorno

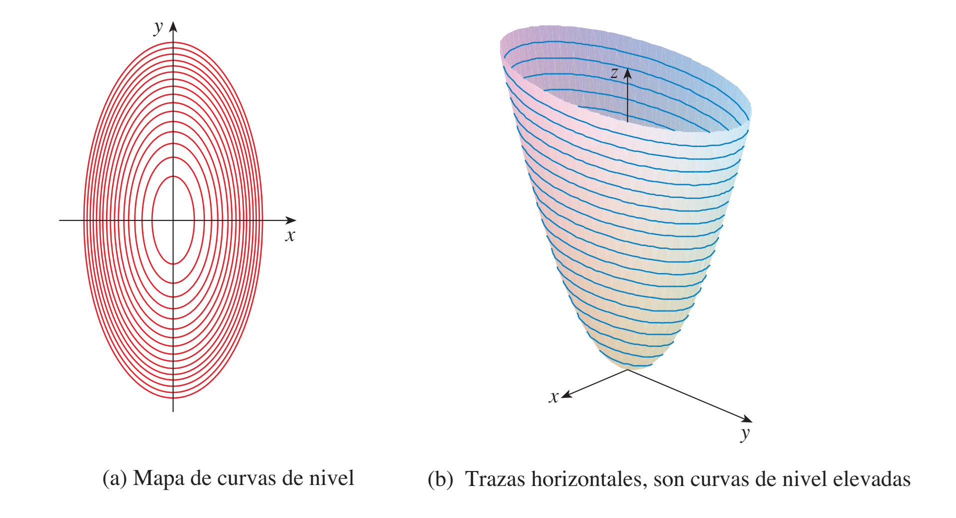


FIGURA 17
La gráfica de $h(x, y) = 4x^2 + y^2$ se forma elevando las curvas de nivel

(a) Mapa de curvas de nivel

(b) Trazas horizontales, son curvas de nivel elevadas □

EJEMPLO 13 Trace curvas de nivel para la función de la producción de Cobb-Douglas del ejemplo 3.

SOLUCIÓN En la figura 18 se ilustran las curvas de nivel que se obtuvieron mediante una computadora para la función de la producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01P^{0.75}K^{0.25}$$

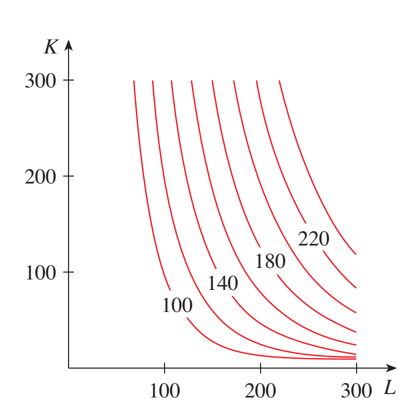
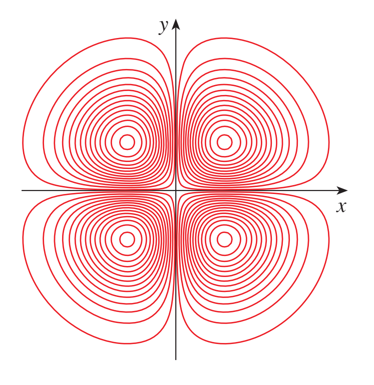


FIGURA 18

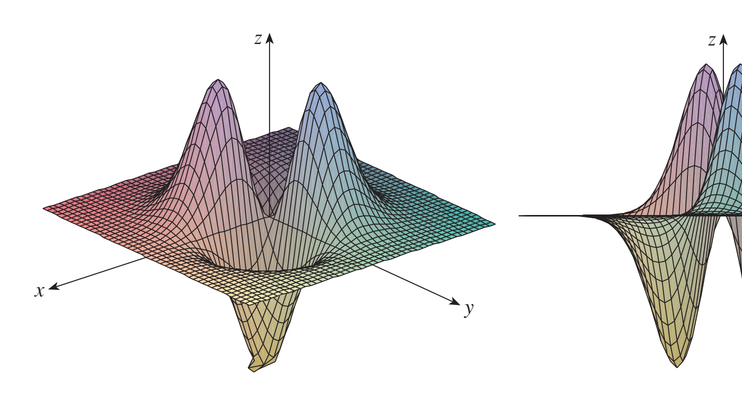
Las curvas de nivel se marcan con el valor de la producción P. Por ejemplo, la curva de nivel marcada con 140, muestra todos los valores de la mano de obra L y las inversiones de capital K que dan como resultado una producción de $P = 140$. En el caso de un valor fijo de P, cuando L se incrementa K disminuye, y viceversa. □

En algunas ocasiones, un mapa de curvas de nivel es más útil que una gráfica. Esto es particularmente cierto en el ejemplo 13. (Compare la figura 18 con la figura 8.) También es válido al estimar valores de las funciones, como en el ejemplo 9.

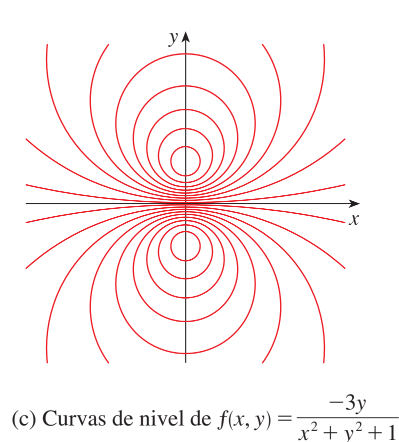
En la figura 19 se muestran algunas curvas de nivel obtenidas mediante computadora junto con sus gráficas correspondientes elaboradas de la misma manera. Observe que las curvas de nivel del inciso (c) se agrupan cerca del origen. La razón es que la gráfica del inciso (d) tiene una pendiente abrupta cerca del origen.



(a) Curvas de nivel de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



(b) Dos vistas de $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$



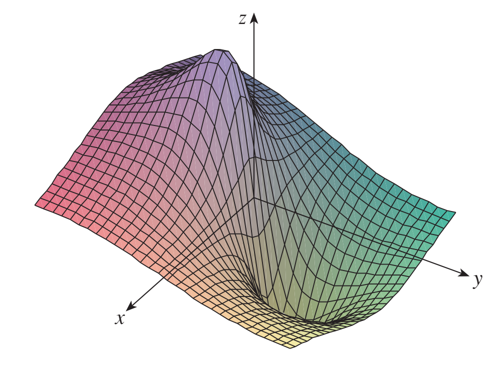


FIGURA 19 (c) Curvas de nivel de $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{-3y}{x^2 + y^2 + 1}$

FUNCIONES DE TRES O MÁS VARIABLES

Una **función de tres variables** es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real $f(x, y, z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto de la superficie de la Tierra depende de la longitud x, latitud y del punto y del tiempo t, de modo que puede escribir $T = f(x, y, t)$.

EJEMPLO 14 Encuentre el dominio de f si

$$f(x, y, z) = \ln(z - y) + xy \operatorname{sen} z$$

SOLUCIÓN La expresión para $f(x, y, z)$ está definida siempre que $z - y > 0$, de modo que el dominio de f es

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > y\}$$

Es un **semiespacio** que consiste en todos los puntos que se ubican por arriba del plano $z = y$. □

Es muy difícil imaginar una función f de tres variables mediante su gráfica, ya que se localizaría en un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, es posible saber más de f examinando sus **superficies de nivel**, las cuales son las superficies cuyas ecuaciones son $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ sigue estando fijo.

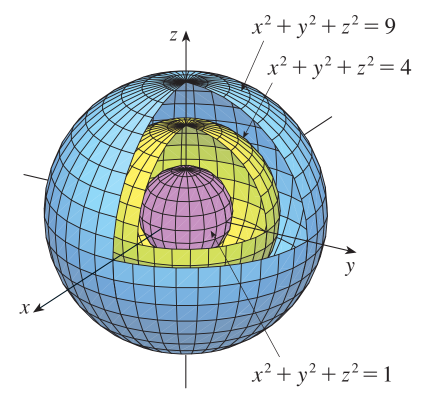


FIGURA 20

EJEMPLO 15 Determine las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

SOLUCIÓN Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geqslant 0$. Esto forma una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$. (Véase figura 20.) Por lo tanto, cuando (x, y, z) varía sobre cualquier esfera con centro en O, el valor de $f(x, y, z)$ se conserva fijo. □

También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una **función de *n* variables** es una regla que asigna un número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a una cantidad n o n-ada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Se denota con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas la n-adas. Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un producto alimenticio, c_i es el costo por unidad del i-ésimo ingrediente, y si se usan x_i unidades del i-ésimo ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

3 $$C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

La función f es una función de valores reales cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Algunas veces se usa una notación de vectores para escribir dichas funciones de una manera más compacta: si $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, con frecuencia se escribe $f(\mathbf{x})$ en lugar de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mediante esta notación se vuelve a escribir la función definida en la ecuación 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ y $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota el producto punto de los vectores $\mathbf{c}$ y $\mathbf{x}$ en V_n.

En vista de la correspondencia uno a uno entre los puntos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ y sus vectores de posición $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ en V_n, hay tres formas de ver una función f definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como una función de n variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como una función de una sola variable puntual $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como una función de una variable vectorial única $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Los tres puntos de vista son útiles.

14.1 EJERCICIOS

1. En el ejemplo 2, se considera la función $W = f(T, v)$, donde W es el factor de enfriamiento, T es la temperatura real, y v es la velocidad del viento. Una representación numérica se proporciona en la tabla 1.

(a) ¿Cuál es el valor de $f(-15, 40)$? ¿Cuál es el significado?

(b) Explique el significado de la pregunta "¿Para qué valor de v es $f(-20, v) = -30$?" Luego conteste la pregunta.

(c) Explique con sus propias palabras el significado de la pregunta "¿Para qué valor de T es $f(T, 20) = -49$?" Luego conteste la pregunta.

(d) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(-5, v)$? Describa el comportamiento de esta función.

(e) ¿Cuál es el significado de la función $W = f(T, 50)$? Describa el comportamiento de esta función.

2. El *índice temperatura-humedad* I (o humidex, para brevedad) es la temperatura del aire que se percibe cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es h, de modo que es posible escribir $I = f(T, h)$. La tabla siguiente de valores de I es una parte de una tabla que elaboró la *National Oceanic and Atmospheric Administration*.

TABLA 3 Temperatura aparente como una función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F): T \ h	20	30	40	50	60	70
80	77	78	79	81	82	83
85	82	84	86	88	90	93
90	87	90	93	96	100	106
95	93	96	101	107	114	124
100	99	104	110	120	132	144

(a) ¿Cuál es el valor de $f(95, 70)$? ¿Qué significa?
(b) ¿Para qué valor de h es $f(90, h) = 100$?
(c) ¿Para qué valor de T es $f(T, 50) = 88$?
(d) ¿Cuál es el significado de las funciones $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare el comportamiento de estas dos funciones de h.

3. Compruebe en el caso de la función de producción de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$$

analizada en el ejemplo 3 que la producción se duplica si tanto la mano de obra como la cantidad de capital se duplican. ¿También es válido para la función general de la producción $P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$?

4. El factor de enfriamiento W que se trata en el ejemplo 2 se modeló mediante la función siguiente

$$W(T, v) = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

Compruebe para ver qué tanto concuerda este modelo con los valores de la tabla 1 para unos pocos valores de T y v.

5. La altura h de las olas en mar abierto depende de la velocidad v del viento y del tiempo t en que el viento ha estado soplando con esa velocidad. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en pies en la tabla 4.
(a) ¿Cuál es el valor de $f(40, 15)$? ¿Qué significa?
(b) ¿Cuál es el significado $h = f(30, t)$? Describa el comportamiento de esta función.
(c) ¿Cuál es el significado $h = f(v, 30)$? Describa el comportamiento de esta función.

TABLA 4

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos): v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

6. Sea $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
(a) Evalúe $f(1, 1)$. (b) Evalúe $f(e, 1)$.
(c) Determine y grafique el dominio de f.
(d) Determine el rango de f.

7. Sea $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.
(a) Evalúe $f(2, 0)$. (b) Determine el dominio de f.
(c) Determine el rango de f.

8. Determine y grafique el dominio de la función $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. ¿Cuál es el rango de f?

9. Sea $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.
(a) Evalúe $f(2, -1, 6)$. (b) Determine el dominio de f.
(c) Determine el rango de f.

10. Sea $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Evalúe $g(2, -2, 4)$. (b) Determine el dominio de g.
(c) Determine el rango de g.

11–20 Determine y grafique el dominio de la función.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\ln(y + x)$

15. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

18. $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21–29 Trace la gráfica de la función.

21. $f(x, y) = 3$

22. $f(x, y) = y$

23. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

24. $f(x, y) = \cos x$

25. $f(x, y) = y^2 + 1$

26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

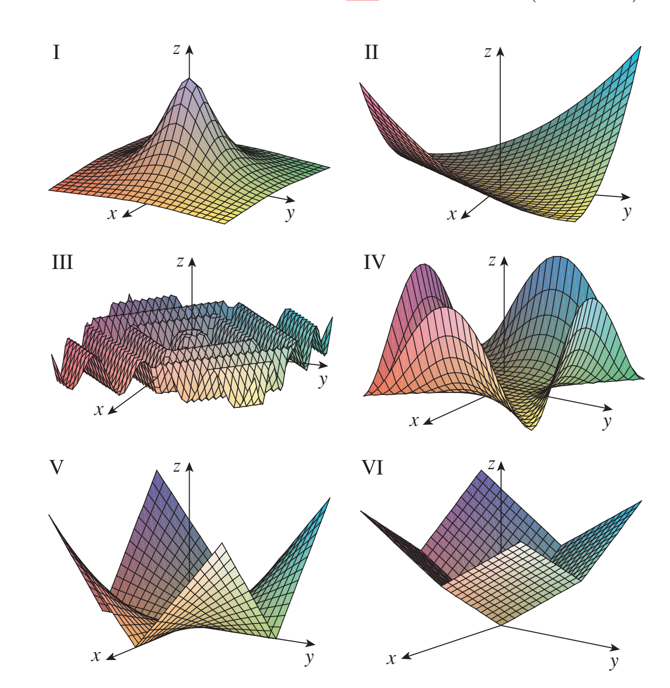
29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Haga corresponder la función con su gráfica (marcadas de I a VI). Ofrezca razones por su elección.

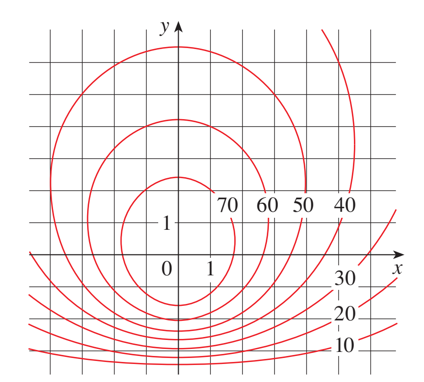
(a) $f(x, y) = |x| + |y|$ (b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

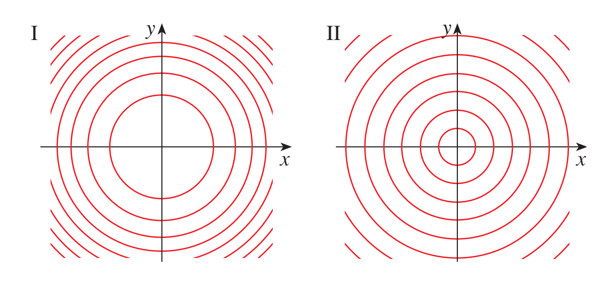
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$ (f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$



31. Se proporciona un mapa de curvas de nivel de una función f. Con éste estime los valores de $f(-3, 3)$ y $f(3, -2)$. ¿Qué puede decir con respecto a la forma de la gráfica?

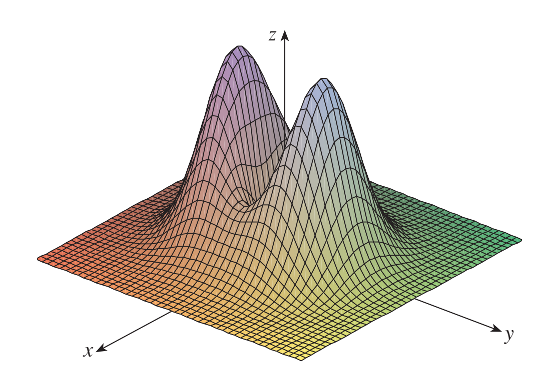


32. Se proporcionan dos mapas de curvas de nivel. Uno es para una función f cuya gráfica es un cono. El otro es para una función g cuya gráfica es un paraboloide. ¿Cuál es cuál y por qué?

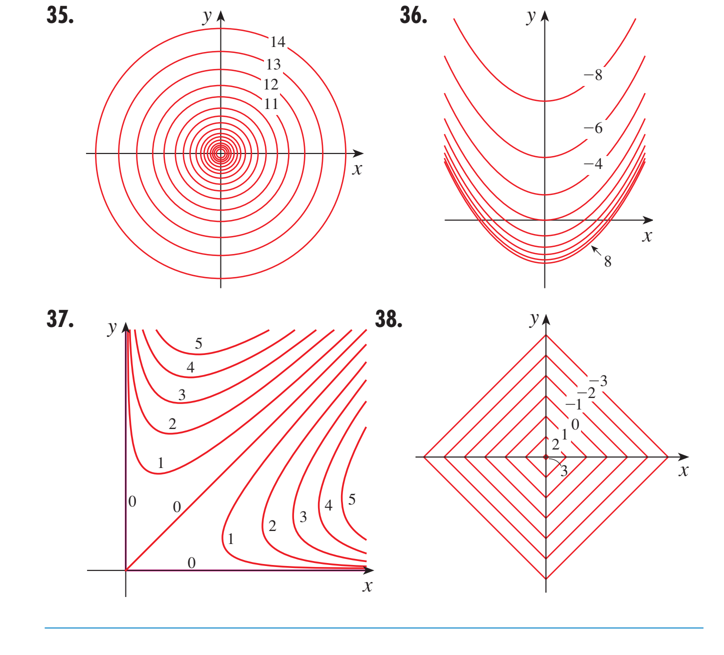


33. Localice los puntos A y B en el mapa de Lonesome Mountain (figura 12). ¿Cómo describiría el terreno cerca de A? ¿Y cerca de B?

34. Elabore una esquema aproximado de un mapa de curvas de nivel para la función cuya gráfica se muestra.



35–38 Se ilustra un mapa de curvas de nivel de una función. Apóyese en él para elaborar un esquema aproximado de la gráfica de f.



39–46 Dibuje un mapa de curvas de nivel de la función marcando varias curvas de nivel.

39. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

40. $f(x, y) = x^3 - y$

41. $f(x, y) = y - \ln x$

42. $f(x, y) = e^{y/x}$

43. $f(x, y) = ye^x$

44. $f(x, y) = y \sec x$

45. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

46. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

47–48 Trace ambos mapas de curvas de nivel y grafique la función y compárelos.

47. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

48. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

49. Una plancha delgada de metal, situada en el plano xy, está a una temperatura $T(x, y)$ en el punto (x, y). Las curvas de nivel de T se llaman *isotermas* porque la temperatura es igual en todos los puntos sobre una isoterma. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está definida por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

50. Si $V(x, y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x, y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales,* porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

51–54 Mediante una computadora grafique la función usando varios dominios y viéndola desde distintos ángulos. Imprima una de esas vistas que, según su opinión, sea muy buena. Si el programa que usted maneja también genera curvas de nivel, grafique algunas curvas de nivel de la misma función y compare con la gráfica.

51. $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-2y^2}$

52. $f(x, y) = (1 - 3x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$

53. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (silla de mono)

54. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (silla de perro)

55–60 Relacione la función (a) con su gráfica (gráficas marcadas de A a F en la página 869) y (b) con su mapa de curvas de nivel (mapas marcados de I a VI). Diga por qué hizo esa elección.

55. $z = \text{sen}(xy)$

56. $z = e^x \cos y$

57. $z = \text{sen}(x - y)$

58. $z = \text{sen}\, z - \text{sen}\, y$

59. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

60. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

61–64 Describa las superficies de nivel de la función.

61. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

63. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

64. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

65–66 Describa cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

65. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

66. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

67–68 Mediante una computadora grafique la función usando varios dominios y desde varias perspectivas. Imprima una vista en la que se ven claramente los "picos y los valles". ¿Diría usted que la función tiene un valor máximo? ¿Puede identificar algunos puntos en la gráfica que pudiera considerar como "puntos máximos relativos"? ¿Y "puntos mínimos relativos"?

67. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

68. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

69–70 Con la ayuda de una computadora, grafique la función usando varios dominios y desde diferentes puntos. Analice el comportamiento limitante de la función. ¿Qué sucede cuando tanto x como y se incrementan? ¿Qué sucede cuando (x, y) se aproxima al origen?

69. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

70. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

71. Investigue mediante una computadora la familia de las funciones $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. ¿En qué forma depende de c la forma de la gráfica?

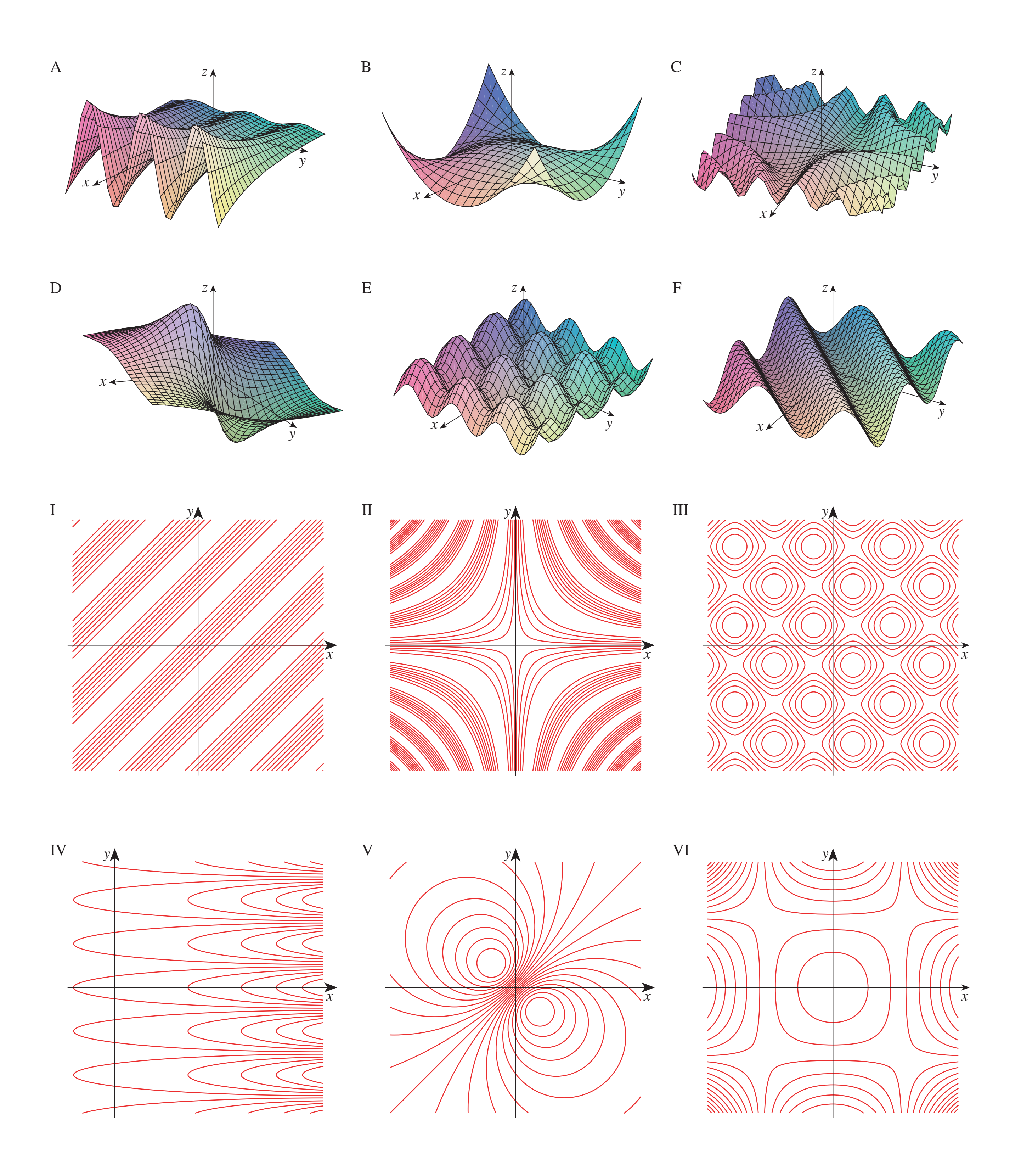
72. Use computadora para investigar la familia de superficies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{2x^2-y^2}$$

¿De qué modo depende la forma de la gráfica de los números a y b?

73. Use computadora para investigar la familia de superficies $z = x^2 + y^2 + cxy$. En particular, debe determinar los valores de transición de c para los que la superficie cambia de un tipo de superficie cuádrica a otro.

Gráficas y mapas de curvas de nivel para ejercicios 55–60



74. Grafique las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

y $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

En general, si g es una función de una variable, ¿cómo es la gráfica de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

obtenida a partir de la gráfica de g?

75. (a) Demuestre que al calcular logaritmos la función de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ se puede expresar como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Si hace $x = \ln(L/K)$ y $y = \ln(P/K)$, la ecuación en el inciso (a) se transforma en la ecuación lineal $y = \alpha x + \ln b$. Use la tabla 2 del ejemplo 3 para elaborar una tabla de valores de $\ln(L/K)$ y $\ln(P/K)$ para los años 1899 a 1922. Luego utilice una calculadora para dibujar o una computadora para determinar la recta de regresión de mínimos cuadrados que pase por los puntos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduzca que la función de la producción según Cobb-Douglas es $P = 1.01L^{0.75}K^{0.25}$.

14.2 LÍMITES Y CONTINUIDAD

Compare el comportamiento de las funciones

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

cuando x y y tiende a 0, [por lo tanto, el punto (x, y) se aproxima al origen].

TABLA 1 Valores de $f(x, y)$

x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

TABLA 2 Valores de $g(x, y)$

x \ y	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

Las tablas 1 y 2 muestran valores de $f(x, y)$ y $g(x, y)$, aproximadas con tres cifras decimales, para los puntos (x, y) cerca del origen. Observe que ninguna función está definida en el origen. Al parecer, cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, los valores de $f(x, y)$ se aproximan a 1, en tanto que los valores de $g(x, y)$ no tienden a ningún número. Resulta entonces que estas conjeturas basadas en la evidencia numérica son correctas, por lo que

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{no existe}$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

para indicar que los valores de $f(x, y)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y) tiende al punto (a, b) que está en cualquier trayectoria que se encuentra dentro del dominio de f. En otras palabras, puede hacer los valores de $f(x, y)$ tan cercanos a L como quiera haciendo el punto (x, y) lo suficientemente cercano al punto (a, b), pero no igual a (a, b). Una definición más exacta se presenta a continuación.

1 DEFINICIÓN Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene, entre otros, puntos arbitrariamente cercanos a (a, b). Entonces, el **límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (a, b)** es L por lo que se escribe

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } (x, y) \in D \text{ y } 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Otras notaciones para el límite en la definición 1 son

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad f(x, y) \to L \text{ cuando } (x, y) \to (a, b)$$

Observe que $|f(x, y) - L|$ es la distancia entre los números $f(x, y)$ y L, y $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ es la distancia entre el punto (x, y) y el punto (a, b). Por lo tanto, la definición 1 establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. En la figura 1 se ilustra la definición 1 mediante un diagrama de flechas. Si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ se da alrededor de L, entonces puede encontrar un círculo D_δ con centro en (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que f mapea todos los puntos en D_δ, excepto tal vez (a, b) en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

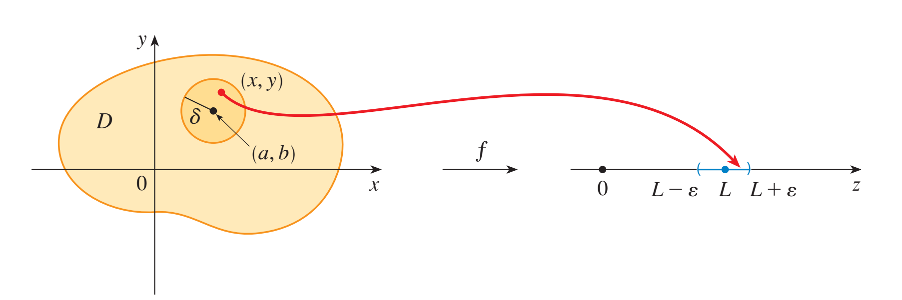


FIGURA 1

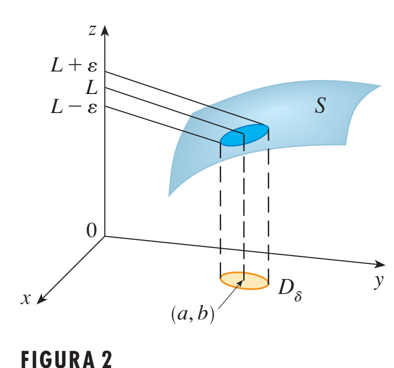


FIGURA 2

Otra ilustración de la definición 1 se ilustra en la figura 2, donde la superficie S es la gráfica de f. Si se tiene $\varepsilon > 0$ puede encontrar $\delta > 0$ tal que si (x, y) está restringido a quedar en el disco D_δ y $(x, y) \neq (a, b)$, entonces la parte correspondiente de S queda entre los planos horizontales $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$.

En el caso de funciones de una sola variable, cuando hace que x tienda a a, hay sólo dos direcciones posibles de aproximación, desde la izquierda o desde la derecha. De acuerdo con el capítulo 2, si $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$, entonces no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

En el caso de funciones de dos variables, la situación no es tan sencilla, porque puede hacer que (x, y) tiendan a (a, b) desde un número infinito de direcciones en cualquier manera que sea (véase figura 3) siempre que (x, y) permanezca dentro del dominio de f.

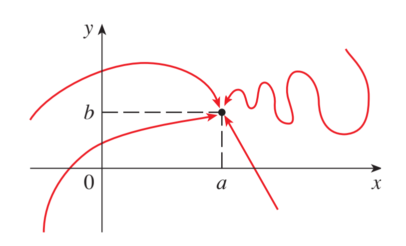


FIGURA 3

La definición 1 establece que la distancia entre $f(x, y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña, haciendo la distancia desde (x, y) a (a, b) suficientemente pequeña, pero no cero. La definición se refiere sólo a la *distancia* entre (x, y) y (a, b). No se refiere a la dirección de aproximación. Por consiguiente, si existe el límite, entonces $f(x, y)$ tiene que aproximarse al mismo límite sin que importe cómo (x, y) se aproxima a (a, b). Por lo tanto, si encuentra dos trayectorias distintas de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x, y)$ tiene diferentes límites, entonces se infiere que no existe $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$.

> Si $f(x, y) \to L_1$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x, y) \to L_2$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ en la trayectoria C_2, donde $L_1 \neq L_2$, entonces no existe $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$.

EJEMPLO 1 Demuestre que no existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero tiene a (0, 0) por el eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para toda $x \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Ahora se aproxima por el eje y haciendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para toda $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to -1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

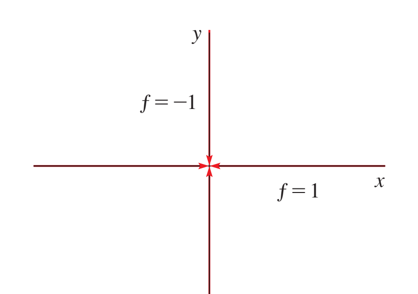


FIGURA 4

(Véase figura 4.) Puesto que f tiene dos límites diferentes en dos rectas distintas, el límite dado no existe. [Esto confirma la conjetura hecha con base en evidencia numérica al principio de esta sección.] □

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)}$, ¿existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Por lo tanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

Aunque ha obtenido límites idénticos en los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea 0. Aproxime a (0, 0) por la otra recta, es decir, $y = x$. Para toda $x \neq 0$,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, $\qquad f(x, y) \to \frac{1}{2} \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ por $y = x$

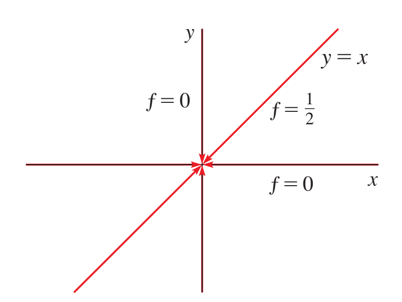


FIGURA 5

(Véase figura 5.) Puesto que ha obtenido distintos límites en distintas trayectorias, el límite dado no existe. □

La figura 6 arroja alguna luz en el ejemplo 2. La cresta que se forma por arriba de la recta $y = x$ corresponde al hecho de que $f(x, y) = \frac{1}{2}$ para todos los puntos (x, y) en esa recta, excepto en el origen.

TEC En Visual 14.2, una recta que gira en la superficie de la figura 6, muestra diferentes límites en el origen a partir de distintas direcciones.

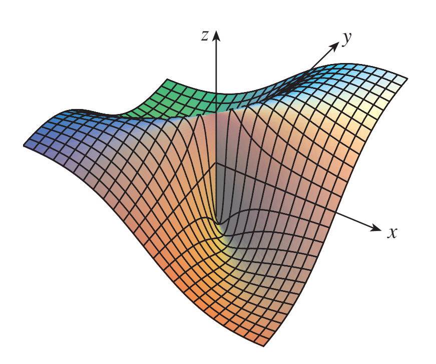


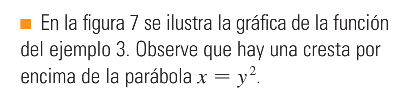
FIGURA 6

$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

V EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, ¿existe $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Refiérase a la solución del ejemplo 2. Trate de ahorrar tiempo haciendo $(x, y) \to (0, 0)$ por cualquier recta no vertical que pase por el origen. Entonces, $y = mx$, donde m es la pendiente y

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2x^3}{x^2 + m^4x^4} = \frac{m^2x}{1 + m^4x^2}$$



■ En la figura 7 se ilustra la gráfica de la función del ejemplo 3. Observe que hay una cresta por encima de la parábola $x = y^2$.

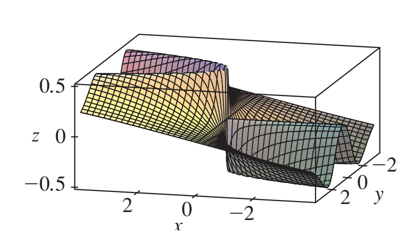


FIGURA 7

De este modo $\qquad f(x, y) \to 0 \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ por $y = mx$

Por lo tanto, f tiene el mismo valor límite en toda recta no vertical que pase por el origen. Pero esto no demuestra que el límite dado sea 0, porque si hace $(x, y) \to (0, 0)$ en la parábola $x = y^2$ tiene

$$f(x, y) = f(y^2, y) = \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

por lo que $\qquad f(x, y) \to \frac{1}{2} \qquad$ cuando $\qquad (x, y) \to (0, 0)$ por $x = y^2$

Puesto que desde distintas trayectorias se obtienen diferentes valores límite, el límite dado no existe. □

Observe ahora los límites que *sí* existen. Justo como en el caso de las funciones de una sola variable, el cálculo de límites de las funciones de dos variables se puede simplificar en gran medida mediante el uso de las propiedades de los límites. Las Leyes de los Límites que se listan en la sección 2.3, se pueden generalizar a las funciones de dos variables. El límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto es el producto de los límites, y así sucesivamente. En particular, las ecuaciones siguientes son válidas.

2 $$\lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b \qquad \lim_{(x, y)\to(a, b)} c = c$$

El teorema de enclaustramiento (o del sándwich) también se cumple.

EJEMPLO 4 Calcule $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 3, demuestre que el límite en cualquier recta que pase por el origen es 0. Esto no demuestra que el límite dado sea 0, pero los límites

en las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$ también resultan ser 0, de modo que sospeche que el límite sí existe y es igual a 0.

Sea $\varepsilon > 0$. Se busca determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \qquad \text{cuando} \qquad \left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

es decir, $$\text{si} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \qquad \text{cuando} \qquad \frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Pero $x^2 \leqslant x^2 + y^2$ porque $y^2 \geqslant 0$, de modo que $x^2/(x^2 + y^2) \leqslant 1$ y, por lo tanto,

3 $$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leqslant 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

Por lo tanto, si escoge $\delta = \varepsilon/3$ y hace $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leqslant 3\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon$$

■ Otro modo de resolver el ejemplo 4 es aplicar el teorema de contracción en lugar de la definición 1. De (2) se infiere que

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} 3|y| = 0$$

y entonces la primera desigualdad de (3) muestra que el límite dado es 0.

De aquí que, según la definición 1,

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$ □

CONTINUIDAD

Recuerde que es fácil evaluar los límites de funciones continuas con una sola variable. Se realiza sustituyendo en forma directa porque la propiedad que define una función continua es $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Las funciones continuas de dos variables se definen también por medio de la propiedad de sustitución.

4 DEFINICIÓN Se dice que una función f de dos variables es **continua en** (a, b) si

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = f(a, b)$$

f es **continua en D** si f es continua en todos los puntos (a, b) de D.

Este significado intuitivo de continuidad es que si el punto (x, y) cambia una pequeña cantidad, entonces el valor de $f(x, y)$ cambia una pequeña cantidad. Esto quiere decir que una superficie que es la gráfica de una función continua no tiene agujeros ni grietas.

Al aplicar las propiedades de los límites, puede ver que las sumas, diferencias, productos y cocientes de funciones continuos son continuos en sus dominios. Se usa este hecho para dar ejemplos de funciones continuas.

Una **función polinomial de dos variables**, es decir, un polinomio, es una suma de términos de la forma cx^my^n, donde c es una constante y m y n son enteros no negativos. Una **función racional** es una razón de polinomios. Por ejemplo,

$$f(x, y) = x^4 + 5x^3y^2 + 6xy^4 - 7y + 6$$

es una función polinomio, mientras

$$g(x, y) = \frac{2xy + 1}{x^2 + y^2}$$

es una función racional.

Los límites en (2) demuestran que las funciones $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ y $h(x, y) = c$ son continuas. Puesto que cualquier polinomio se puede conformar con las funciones simples f, g y h mediante multiplicación o adición, se infiere que *todos los polinomios son continuos en* $\mathbb{R}^2$. De igual manera, cualquier función racional es continua en su dominio, porque es un cociente de funciones continuas.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y)$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ es un polinomio y es continuo entonces se puede encontrar el límite mediante la sustitución directa:

$$\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 11$$ □

EJEMPLO 6 ¿Dónde es continua la función $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

SOLUCIÓN La función f es discontinua en (0, 0) porque no está definida allí. Puesto que f es una función racional, es continua en su dominio, que es el conjunto $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$. □

EJEMPLO 7 Sean

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí g se define en (0, 0) pero g es discontinua en 0 porque $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} g(x, y)$ no existe (véase ejemplo 1). □

■ En la figura 8 se muestra la gráfica de la función continua del ejemplo 8.

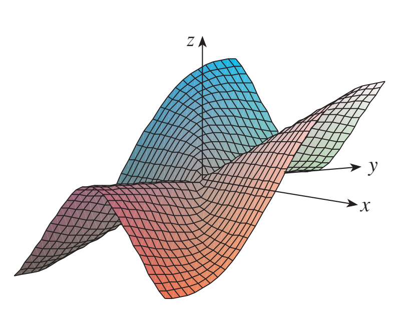


FIGURA 8

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f es continua para $(x, y) \neq (0, 0)$ puesto que es igual a una función racional. Asimismo, según el ejemplo 4

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

Por lo tanto, f es continua en (0, 0) y entonces es continua en $\mathbb{R}^2$. □

Igual que en el caso de una función de una variable, la composición es otra manera de combinar dos funciones continuas para obtener una tercera. De hecho, se puede demostrar que si f es una función continua de dos variables y g es una función continua de una sola variable que está definida en el rango de f, entonces la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es también una función continua.

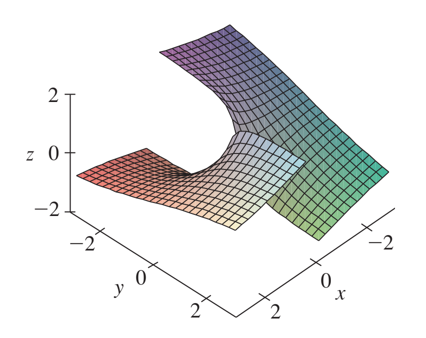


FIGURA 9
La función $h(x, y) = \arctan(y/x)$ es discontinua donde $x = 0$

EJEMPLO 9 ¿Dónde es continua la función $h(x, y) = \arctan(y/x)$?

SOLUCIÓN La función $f(x, y) = y/x$ es una función racional y por lo tanto continua, excepto en la recta $x = 0$. La función $g(t) = \arctan t$ es continua en todas partes. Entonces la función compuesta

$$g(f(x, y)) = \arctan(y/x) = h(x, y)$$

es continua excepto donde $x = 0$. La gráfica de la figura 9 muestra una rotura en la gráfica de h arriba del eje y. □

FUNCIONES DE TRES O MÁS VARIABLES

Todo lo tratado en esta sección se puede generalizar a funciones de tres o más variables. La notación

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = L$$

significa que los valores de $f(x, y, z)$ se aproximan al número L cuando el punto (x, y, z) tiende al punto (a, b, c) a lo largo de cualquier trayectoria en el dominio de f. Como la distancia entre dos puntos (x, y, z) y (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ está definida por $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, escriba la definición exacta como sigue: para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } (x, y, z) \text{ está en el dominio de } f \text{ y } 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} < \delta$$

$$\text{entonces } |f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

La función f es **continua** en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

es una función racional de tres variables, y entonces es continua en todos los puntos en $\mathbb{R}^3$, excepto donde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En otras palabras, es discontinua en la esfera con centro en el origen y radio 1.

Si usa la notación vectorial introducida al final de la sección 14.1, entonces puede escribir la definición de límite para funciones de dos o tres variables en una sola forma compacta como sigue.

5 Si f se define en un subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, entonces $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in D \quad \text{y} \quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que si $n = 1$, entonces $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{a} = a$, y (5) es justamente la definición de un límite para funciones de una sola variable. Para el caso $n = 2$, $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ y $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, de modo que (5) se transforma en la definición 1. Si $n = 3$, entonces $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$ y (5) se vuelve la definición de un límite de una función de tres variables. En cada caso, la definición de continuidad se puede escribir como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EJERCICIOS

1. Suponga que $\lim_{(x, y)\to(3, 1)} f(x, y) = 6$. ¿Qué puede decir con respecto al valor de $f(3, 1)$? ¿Y si f es continua?

2. Explique por qué cada una de las funciones es continua o discontinua.
   (a) La temperatura en el exterior como función de la longitud, latitud y tiempo
   (b) Elevación (altura sobre el nivel del mar) en función de la longitud, latitud y tiempo
   (c) El costo de un viaje en taxi en función de la distancia recorrida y el tiempo

3–4 Mediante una tabla de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) cerca del origen plantee alguna conjetura acerca del valor del límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Luego explique por qué su conjetura es correcta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$
4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–22 Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe.

5. $\lim_{(x, y)\to(1, 2)} (5x^3 - x^2y^2)$
6. $\lim_{(x, y)\to(1, -1)} e^{-xy}\cos(x + y)$
7. $\lim_{(x, y)\to(2, 1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$
8. $\lim_{(x, y)\to(1, 0)} \ln\left(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$
9. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^4}{x^4 + 3y^4}$
10. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$
11. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$
12. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{6x^3 - y}{2x^4 + y^4}$
13. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
14. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3 - y^4}{x^2 + y^2}$
15. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$
16. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$
17. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
18. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$
19. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} e^{-xy}\operatorname{sen}(\pi z/2)$
20. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
21. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$
22. $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23–24 Mediante una computadora, grafique la función para explicar por qué el límite no existe.

23. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$
24. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25–26 Encuentre $h(x, y) = g(f(x, y))$ y el conjunto en el cual h es continua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}, \quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$
26. $g(t) = t + \ln t, \quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27–28 Grafique la función y observe dónde es discontinua. Luego use la fórmula para explicar lo que ha observado.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$
28. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29–38 Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.

29. $F(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x - y^2}$
30. $F(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$
31. $F(x, y) = \arctan(x + \sqrt{y})$
32. $F(x, y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$
33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$
34. $G(x, y) = \tan^{-1}((x + y)^{-2})$
35. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$
36. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$
37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39–41 Mediante coordenadas polares determine el límite. [Si (r, θ) son las coordenadas polares del punto (x, y) con $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$
40. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$
41. $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{e^{-x^2y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. Al inicio de esta sección se consideró la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

y se adivinó que $f(x, y) \to 1$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ con base en evidencia numérica. Use coordenadas polares para confirmar el valor del límite. Luego grafique la función.

43. Grafique y discuta la continuidad de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

44. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \quad \text{o} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{si } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $f(x, y) \to 0$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de cualquier trayectoria que pase por $(0, 0)$ de la forma $y = mx^a$ con $a < 4$.

(b) No obstante la parte (a), demuestre que f es discontinua en $(0, 0)$.

(c) Demuestre que f es discontinua en dos curvas enteras.

45. Demuestre que la función f definida por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ es continua en $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Si $\mathbf{c} \in V_n$, demuestre que la función f definida por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ es continua en $\mathbb{R}^n$.

14.3 DERIVADAS PARCIALES

En un día caluroso la humedad extrema hace pensar que la temperatura es mayor de lo que en realidad es, en tanto que si el aire está muy seco, parece que la temperatura es más baja de lo que señala el termómetro. El National Weather Service de Estados Unidos ha diseñado el índice calorífico, que se denomina también índice de temperatura-humedad o humidex en algunos países, para describir los efectos combinados de temperatura y humedad. El índice calorífico I es la temperatura del aire que se siente cuando la temperatura real es T y la humedad relativa es H. De este modo, I es una función de T y H y se puede escribir como $I = f(T, H)$. La tabla siguiente de valores de I es parte de una tabla que elaboró el National Weather Service de Estados Unidos.

TABLA 1
Índice calorífico I en función de la temperatura y la humedad

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F): T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Si se concentra en la columna resaltada de la tabla, la cual corresponde a la humedad relativa de $H = 70\%$, esta considerando el índice calorífico como una función de la variable única T para un valor fijo de H. Escriba $g(T) = f(T, 70)$. Entonces $g(T)$ describe cómo el índice calorífico I se incrementa cuando la temperatura real T se incrementa cuando la humedad relativa es de 70%. La derivada de g cuando $T = 96$°F es la razón de cambio de I con respecto a T cuando $T = 96$°F:

$$g'(96) = \lim_{h \to 0} \frac{g(96 + h) - g(96)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96 + h, 70) - f(96, 70)}{h}$$

Aproxime $g'(96)$ usando los valores de la tabla 1 y tomando $h = 2$ y -2:

$$g'(96) \approx \frac{g(98) - g(96)}{2} = \frac{f(98, 70) - f(96, 70)}{2} = \frac{133 - 125}{2} = 4$$

$$g'(96) \approx \frac{g(94) - g(96)}{-2} = \frac{f(94, 70) - f(96, 70)}{-2} = \frac{118 - 125}{-2} = 3.5$$

Al promediar los valores, la derivada $g'(96)$ es aproximadamente 3.75. Esto quiere decir que cuando la temperatura real es de 96°F y la humedad relativa es 70%, la temperatura aparente (índice calorífico) se eleva casi 3.75°F ¡por cada grado que aumenta la temperatura real!

Ahora vea el renglón resaltado de la tabla 1, el cual corresponde a la temperatura fija de $T = 96$°F. Los números de este renglón son valores de la función $G(H) = f(96, H)$, la cual describe cómo el índice calorífico aumenta cuando la humedad relativa H se incrementa cuando la temperatura real es $T = 96$°F. La derivada de esta función cuando $H = 70\%$ es la tasa de cambio de I con respecto a H cuando $H = 70\%$:

$$G'(70) = \lim_{h \to 0} \frac{G(70 + h) - G(70)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(96, 70 + h) - f(96, 70)}{h}$$

Si hace $h = 5$ y -5, se aproxima a $G'(70)$ usando los valores de la tabla:

$$G'(70) \approx \frac{G(75) - G(70)}{5} = \frac{f(96, 75) - f(96, 70)}{5} = \frac{130 - 125}{5} = 1$$

$$G'(70) \approx \frac{G(65) - G(70)}{-5} = \frac{f(96, 65) - f(96, 70)}{-5} = \frac{121 - 125}{-5} = 0.8$$

Al promediar estos valores obtiene la estimación $G'(70) \approx 0.9$. Esto establece que, cuando la temperatura es de 96°F y la humedad relativa es de 70%, el índice calorífico se eleva casi 0.9°F por cada punto porcentual que aumenta la humedad relativa.

En general, si f es una función de dos variables x y y, suponga que sólo hace variar x mientras mantiene fija a y, $y = b$, donde b es una constante. Entonces está considerando en realidad una función de una sola variable x, a saber, $g(x) = f(x, b)$. Si g tiene derivada en a, entonces se denomina **derivada parcial de f con respecto a x en (a, b)** y la denota con $f_x(a, b)$. Por consiguiente

1 $$f_x(a, b) = g'(a) \qquad \text{donde} \qquad g(x) = f(x, b)$$

De acuerdo con la definición de derivada

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h}$$

y entonces la ecuación 1 se transforma en

2 $$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

De igual manera, la **derivada parcial de f con respecto a y en (a, b)**, denotada por $f_y(a, b)$, se obtiene al mantener fija la variable x ($x = a$) y determinar la derivada ordinaria de b de la función $G(y) = f(a, y)$:

3
$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Con esta notación de derivadas parciales, puede escribir las razones de cambio del índice calorífico I con respecto a la temperatura real T y humedad relativa H cuando $T = 96°\text{F}$ y $H = 70\%$ como sigue:

$$f_T(96, 70) \approx 3.75 \qquad f_H(96, 70) \approx 0.9$$

Si ahora deja que el punto (a, b) varíe en las ecuaciones 2 y 3, f_x y f_y se transforman en funciones de dos variables.

4 Si f es una función de dos variables, sus derivadas parciales son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Hay muchas otras notaciones para las derivadas parciales. Por ejemplo, en lugar de f_x puede escribir f_1 o $D_1 f$ para indicar la derivación con respecto a la primera variable, o bien, $\partial f/\partial x$. Pero aquí $\partial f/\partial x$ no se puede interpretar como un cociente de diferenciales.

NOTACIONES PARA DERIVADAS PARCIALES Si $z = f(x, y)$, escriba

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Para calcular derivadas parciales, todo lo que debe hacer es recordar que, según la ecuación 1, la derivada parcial con respecto a x es justamente la derivada *ordinaria* de la función g de una sola variable que obtiene al mantener fija a y. Por lo tanto, se encuentra la regla siguiente.

REGLA PARA DETERMINAR LAS DERIVADAS PARCIALES DE $z = f(x, y)$

1. Para determinar f_x, conservar a y constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para determinar f_y, conservar a x constante y derivar $f(x, y)$ con respecto a y.

EJEMPLO 1 Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, determine $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.

SOLUCIÓN Al considerar como constante a y y derivar con respecto a x se obtiene

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

y entonces

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Si considera como constante a x y deriva con respecto a y entonces

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

□

INTERPRETACIONES DE DERIVADAS PARCIALES

Para dar una interpretación geométrica de las derivadas parciales, recuerde que la ecuación $z = f(x, y)$ no representa una superficie (es un valor) la gráfica $\{(x, y, z) | (x, y) \in D_f\}$ es una superficie. Si $f(a, b) = c$, entonces el punto $P(a, b, c)$ está situado sobre S. Si hace $y = b$, está enfocando la atención en la curva C_1 en la cual el plano vertical $y = b$ corta a S. (En otras palabras, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$.) De igual manera, el plano vertical $x = a$ corta a S en una curva C_2. Tanto la curva C_1 como C_2, pasan por el punto P (véase figura 1).

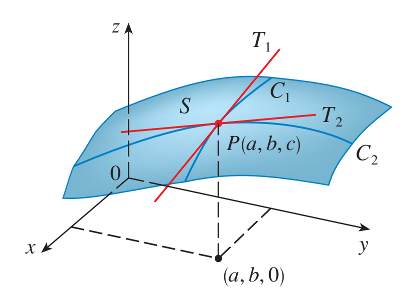


FIGURA 1
Las derivadas parciales de f en (a, b) son las pendientes de las tangentes a C_1 y C_2

Observe que la curva C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$, de modo que la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a) = f_x(a, b)$. La curva C_2 es la gráfica de la función $G(y) = f(a, y)$, de modo que la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b) = f_y(a, b)$.

Por lo tanto, las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en $P(a, b, c)$ a las trazas C_1 y C_2 de S en los planos $y = b$ y $x = a$.

Como ya se vio en el caso de la función del índice calorífico, las derivadas parciales también se pueden interpretar como *razones de cambio*. Si $z = f(x, y)$, entonces $\partial z/\partial x$ representa la razón de cambio de z con respecto a x cuando y permanece constante. De manera similar, $\partial z/\partial y$ representa la razón de cambio de z con respecto a y cuando x es constante.

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $f_x(1, 1)$ y $f_y(1, 1)$, e interprete estos números como pendientes.

SOLUCIÓN Si

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

La gráfica de f es el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano vertical $y = 1$ lo corta en la parábola $z = 2 - x^2$, $y = 1$. (Al igual que en el análisis anterior, es C_1 en la figura 2.) La pendiente de la tangente de esta parábola en el punto $(1, 1, 1)$ es $f_x(1, 1) = -2$. De la misma manera, la curva C_2 que se forma cuando el plano $x = 1$ corta al paraboloide es la parábola $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$, y la pendiente de la tangente en $(1, 1, 1)$ es $f_y(1, 1) = -4$ (véase figura 3). □

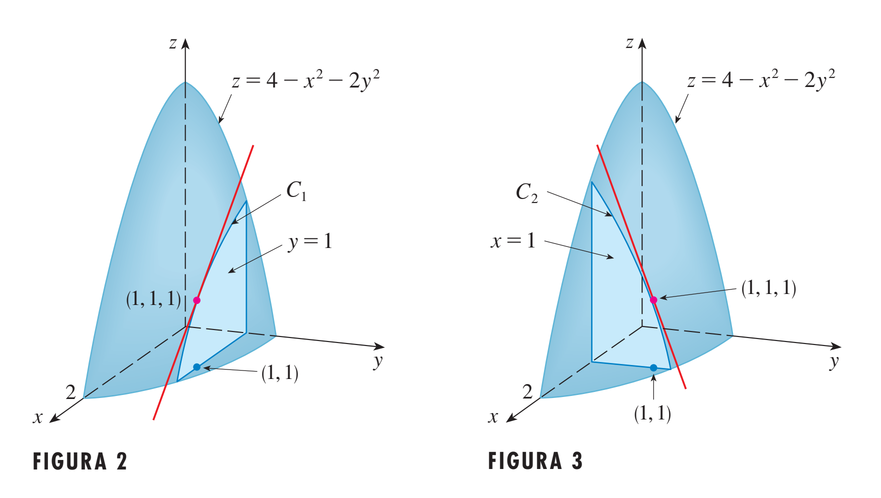


FIGURA 2

FIGURA 3 □

La figura 4 se generó mediante computadora y es análoga a la figura 2. En la parte (a) se ilustra el plano $y = 1$ que corta a la superficie para formar la curva C_1 y en la parte (b) se muestra C_1 y a T_1. (A patir de las ecuaciones vectoriales $\mathbf{r}(t) = \langle t, 1, 2 - t^2 \rangle$ para C_1 y $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1, 1 - 2t \rangle$ para T_1.) Asimismo, la figura 5 corresponde a la figura 3.

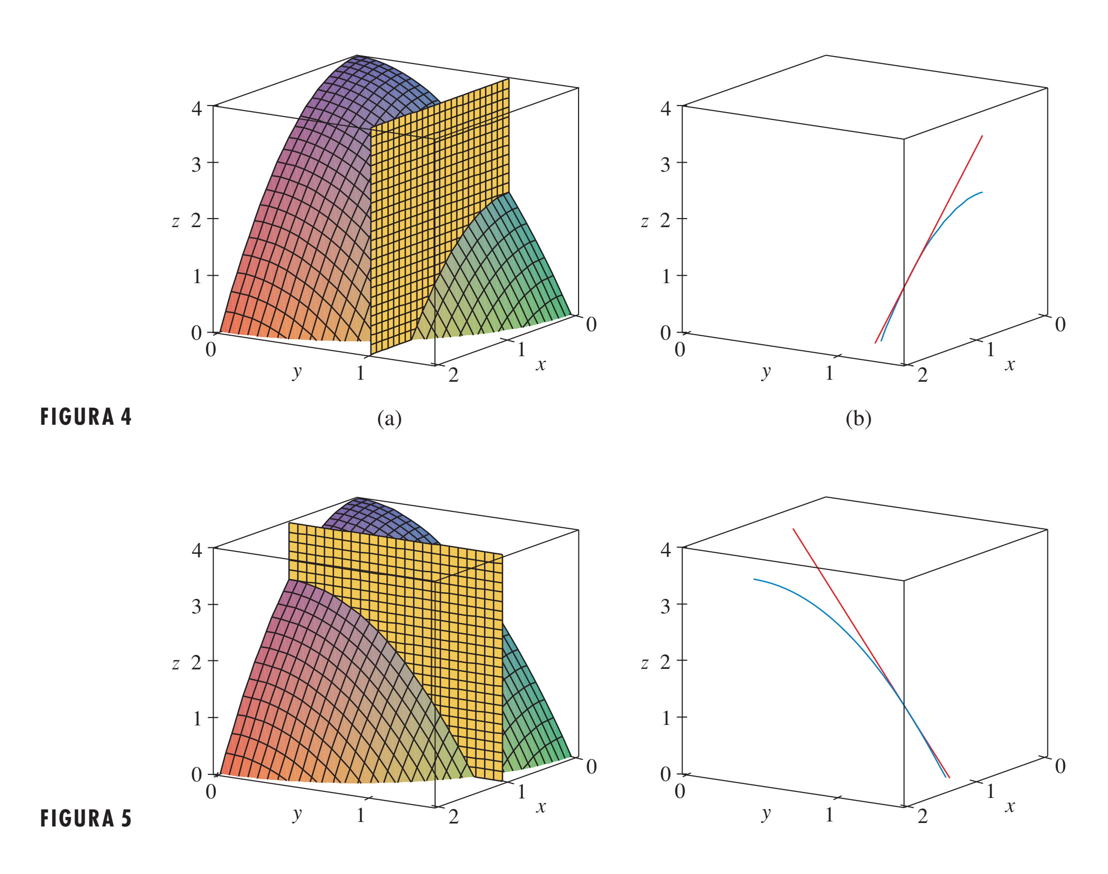


FIGURA 4

FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{1 + y}\right)$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN Al aplicar la regla de la cadena para funciones de una variable

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1 + y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{1}{1 + y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1 + y}\right) = -\cos\left(\frac{x}{1 + y}\right) \cdot \frac{x}{(1 + y)^2}$$

□

■ Algunos sistemas algebraicos computacionales tienen la capacidad de dibujar superficies definidas por ecuaciones implícitas con tres variables. En la figura 6 se presenta una gráfica de la ecuación definida por la ecuación del ejemplo 4.

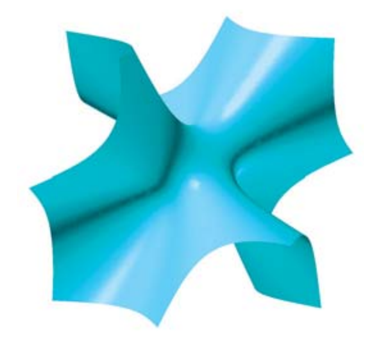


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si z se define implícitamente como una función de x y y mediante la ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

SOLUCIÓN Para determinar $\partial z/\partial x$, se deriva en forma implícita con respecto a x, teniendo cuidado de tratar a y como constante:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Al final, tiene que $\partial z/\partial x$, es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

De manera similar, la derivación implícita con respecto a y da

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

□

FUNCIONES DE MÁS DE TRES VARIABLES

También se pueden definir las derivadas parciales mediante funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z, entonces su derivada parcial con respecto a x se define como

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

y se determina considerando a y y a z como constantes y derivando $f(x, y, z)$ con respecto a x. Si $w = f(x, y, z)$, entonces $f_x = \partial w/\partial x$ se puede interpretar como la razón de cambio de w con respecto a x cuando y y z se mantienen constantes. Pero no puede hacer una interpretación geométrica porque la gráfica de f se encuentra en un espacio de cuatro dimensiones.

En general, si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, su derivada parcial con respecto a la i-ésima variable x_i es

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

y también

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

EJEMPLO 5 Determine f_x, f_y y f_z si $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

SOLUCIÓN Si mantiene constantes a y y z y deriva con respecto a x, y obtiene

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

De manera similar, $\quad f_y = xe^{xy} \ln z \quad$ y $\quad f_z = \dfrac{e^{xy}}{z}$ □

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que se consideran sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$, que se llaman **segundas derivadas parciales** de f. Si $z = f(x, y)$, use la notación siguiente:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Por lo tanto, la notación f_{xy}, (o bien, $\partial^2 f/\partial y\, \partial x$) quiere decir que primero se deriva con respecto a x y después con respecto a y, y que al calcular f_{xy} el orden es el inverso.

EJEMPLO 6 Determine las segundas derivadas parciales de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

SOLUCIÓN En el ejemplo 1

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

Por lo tanto,

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$ □

■ En la figura 7 se ilustra la gráfica de la función f del ejemplo 6 y las gráficas de su primera y segunda derivadas parciales para $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$. Observe que estas gráficas son congruentes con la interpretación de f_x y f_y y las pendientes de las tangentes a las trazas de la gráfica de f. Por ejemplo, la gráfica de f decrece si inicia en $(0, -2)$ y se desplaza en la dirección positiva de x. Esto se refleja en los valores negativos de f_x. Compare las gráficas de f_{yx} y f_{yy} con la gráfica de f_y para ver las relaciones.

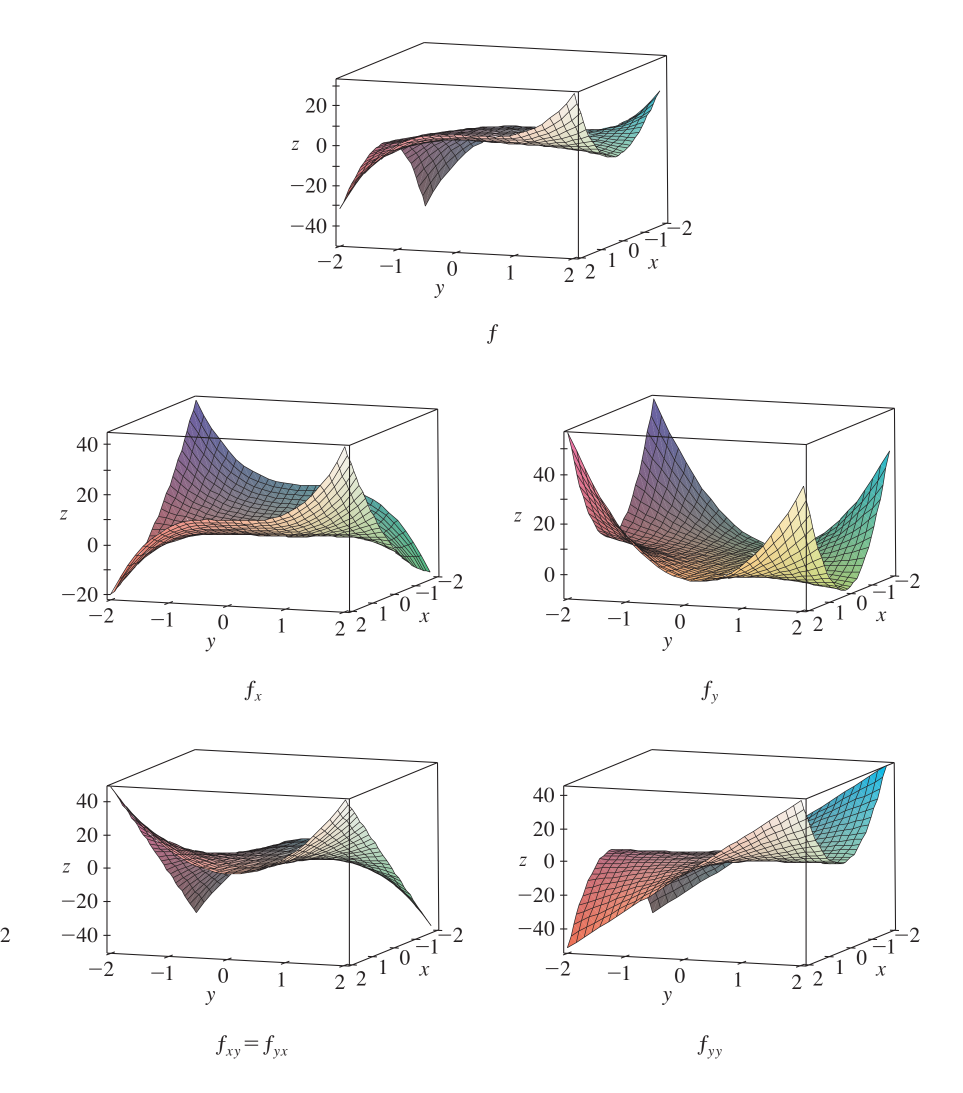


FIGURE 7

Observe que $f_{xy} = f_{yx}$ en el ejemplo 6. Esto no es una coincidencia. Resulta que las derivadas parciales combinadas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayor parte de las funciones que uno encuentra en la práctica. El teorema siguiente, el cual fue descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), presenta las condiciones en las cuales es posible afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$. La demostración se proporciona en el apéndice F.

■ Alexis Clairaut fue un niño prodigio en matemática. Estudió el libro de texto de l'Hospital sobre cálculo cuando tenía 10 años y presentó un trabajo sobre geometría en la Academia Francesa de las Ciencias cuando tenía 13 años. A la edad de 18 años publicó *Recherches sur les courbes à double courbure*, que fue el primer tratado sistemático sobre geometría analítica del espacio; entre otras cosas, presentaba el cálculo de curvas tridimensionales.

TEOREMA DE CLAIRAUT Suponga que f está definida en un disco D que contiene el punto (a, b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas en D entonces

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

Las derivadas parciales de orden 3 o superiores también se pueden definir. Por ejemplo,

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

y mediante el teorema de Clairaut se puede demostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ si estas funciones son continuas.

EJEMPLO 7 Calcule f_{xxyz} si $f(x, y, z) = \text{sen}(3x + yz)$.

SOLUCIÓN

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9\,\text{sen}(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\,\text{sen}(3x + yz)$$ □

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

En las *ecuaciones diferenciales parciales* que expresan ciertas leyes físicas aparecen derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama **ecuación de Laplace** en honor a Pierre Laplace (1749-1827). Las soluciones de esta ecuación reciben el nombre de **funciones armónicas**, y desempeñan un papel en los problemas de conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

EJEMPLO 8 Demuestre que la función $u(x, y) = e^x \text{sen}\, y$ es una solución de la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN

$$u_x = e^x \text{sen}\, y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \text{sen}\, y \qquad u_{yy} = -e^x \text{sen}\, y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \text{sen}\, y - e^x \text{sen}\, y = 0$$

Por lo tanto, u cumple con la ecuación de Laplace. □

La **ecuación de onda**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

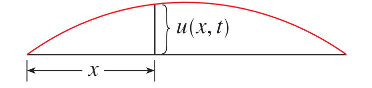


FIGURA 8

describe el movimiento de una onda, que puede ser una ola de mar, una onda de sonido, una onda de luz o una onda que viaja por una cuerda que vibra. Por ejemplo, si $u(x, t)$ representa el desplazamiento de una cuerda de violín que está vibrando en el tiempo t y a una distancia x de un extremo de la cuerda, (como se ilustra en la figura 8), entonces $u(x, t)$ cumple con la ecuación de onda. En este caso la constante a depende de la densidad de la cuerda y de la tensión de la misma.

EJEMPLO 9 Compruebe que la función $u(x, t) = \text{sen}(x - at)$ cumple con la ecuación de onda.

SOLUCIÓN

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_{xx} = -\text{sen}(x - at)$$

$$u_t = -a\cos(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2\,\text{sen}(x - at) = a^2 u_{xx}$$

De este modo u cumple con la ecuación de onda. □

LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN DE COBB-DOUGLAS

En el ejemplo 3 de la sección 14.1, se describe el trabajo de Cobb y Douglas al modelar la producción total P de un sistema económico como una función de la cantidad de mano de obra L y la inversión de capital K. En este caso se utilizan derivadas parciales para demostrar cómo la forma particular del modelo se infiere de ciertas suposiciones que plantearon con respecto a la economía.

Si la función de producción se denota con $P = P(L, K)$, entonces la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón a la cual cambia la producción con respecto a la cantidad de mano de obra. Los economistas la llaman producción marginal con respecto a la mano de obra o *productividad marginal de la mano de obra*. De manera similar, la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital y se denomina *productividad marginal del capital*. En estos términos las suposiciones que plantearon Cobb y Douglas se pueden formular como sigue:

(i) Si la mano de obra o el capital se desvanece, entonces sucede lo mismo con la producción.

(ii) La productividad marginal de la mano de obra es proporcional a la cantidad de producción por unidad de mano de obra.

(iii) La productividad marginal del capital es proporcional a la cantidad de producción por unidad de capital.

Debido a que la producción por unidad de mano de obra es P/L, la suposición (ii) plantea que

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \alpha \frac{P}{L}$$

para alguna constante α. Si mantiene constante a K ($K = K_0$), entonces esta ecuación diferencial parcial se vuelve una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dP}{dL} = \alpha \frac{P}{L} \tag{5}$$

Si resuelve esta ecuación diferencial separable mediante los métodos de la sección 9.3 (véase también ejercicio 79), obtiene

$$P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha} \tag{6}$$

Observe que la constante C_1 aparece como una función de K_0 porque puede depender del valor de K_0.

Igualmente, la suposición (iii) plantea que

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \beta \frac{P}{K}$$

y se resuelve esta ecuación diferencial para tener

$$P(L_0, K) = C_2(L_0)K^{\beta} \tag{7}$$

Al comparar las ecuaciones 6 y 7, se obtiene

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{\beta} \tag{8}$$

donde b es una constante que es independiente tanto de L como de K. La suposición (i) muestra que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$.

Observe que según la ecuación 8, si la mano de obra y el capital se incrementan un factor m, entonces

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Si $\alpha + \beta = 1$, entonces $P(mL, mK) = mP(L, K)$, lo cual quiere decir que la producción también aumenta un factor de m. Ésta es la razón de que Cobb y Douglas supusieron que $\alpha + \beta = 1$ y, por lo tanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Ésta es la función de producción de Cobb-Douglas que estudió en la sección 14.1.

14.3 EJERCICIOS

1. La temperatura T en un lugar del hemisferio norte depende de la longitud x, latitud y y tiempo t, de modo que puede escribir $T = f(x, y, t)$. Mida el tiempo en horas a partir del inicio de enero.

(a) ¿Qué significan las derivadas parciales $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulú; tiene una longitud de 158°W y una latitud de 21°N. Suponga que a las 9:00 AM el primero de enero, los vientos empujan aire caliente hacia el noreste, de modo que el aire del oeste y del sur es caliente y el aire al norte y el este es más frío. ¿Esperaría que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ y $f_t(158, 21, 9)$ sean positivas o negativas? Explique.

2. Al principio de esta sección, estudió la función $I = f(T, H)$, donde I es el índice calorífico, T es la temperatura y H es la humedad relativa. Mediante la tabla 1 estime $f_T(92, 60)$ y $f_H(92, 60)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

3. El factor de enfriamiento W, es la temperatura que se percibe cuando la temperatura real es T y la velocidad del viento es v, de modo que $W = f(T, v)$. La tabla siguiente de valores es una parte de la tabla 1 de la sección 14.1.

Velocidad del viento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime los valores de $f_T(-15, 30)$ y $f_v(-15, 30)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

(b) En general, ¿qué puede decir con respecto al signo de $\partial W/\partial T$ y $\partial W/\partial v$?

(c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{v\to\infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. La altura h de una ola en el mar abierto depende de la rapidez v del viento y de la cantidad de tiempo t que el viento ha estado soplando a esa velocidad. En la tabla siguiente se registran valores de la función $h = f(v, t)$ en pies.

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

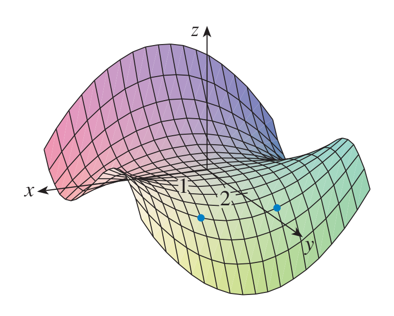
(a) ¿Cuáles son los significados de las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?

(b) Estime los valores de $f_v(40, 15)$ y $f_t(40, 15)$. ¿Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?

(c) ¿Cuál parece ser el valor del límite siguiente?

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5–8 Determine los signos de las derivadas parciales de la función f cuya gráfica se ilustra.



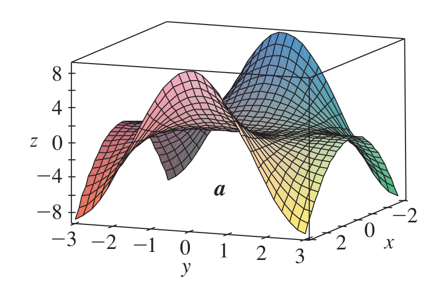
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

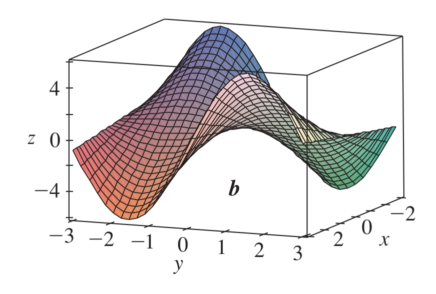
6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

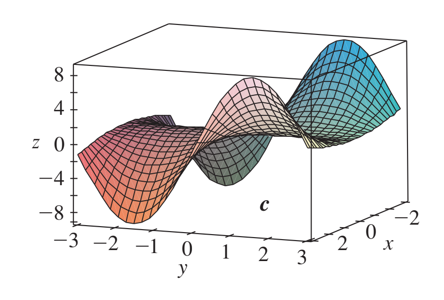
7. (c) $f_{xx}(-1, 2)$ (d) $f_{yy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (d) $f_{xy}(-1, 2)$

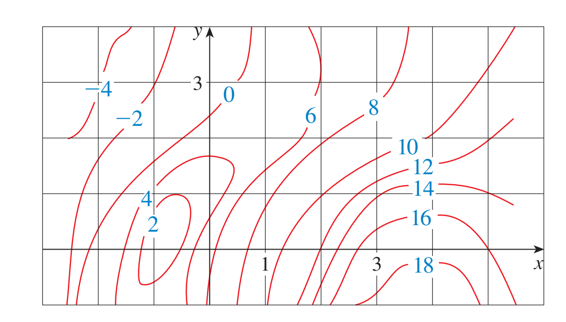
9. Las superficies siguientes, marcadas con *a, b* y *c,* son gráficas de una función f y de sus derivadas parciales f_x y f_y. Identifique cada superficie y explique el porqué de su elección.







10. Se presenta un mapa de curvas de nivel de una función f. Estime $f_x(2, 1)$ y $f_y(2, 1)$.



11. Si $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.

12. Si $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ y $f_y(1, 0)$ e interprete estos valores como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas a mano o mediante una computadora.

13–14 Encuentre f_x y f_y y grafique f, f_x y f_y con dominios y desde perspectivas que le permitan ver las relaciones entre ellas.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ **14.** $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

15–38 Calcule las primeras derivadas parciales de la función.

15. $f(x, y) = y^5 - 3xy$ **16.** $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

17. $f(x, t) = e^{-t} \cos \pi x$ **18.** $f(x, t) = \sqrt{x} \ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$ **20.** $z = \tan xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **22.** $f(x, y) = x^y$

23. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$ **24.** $w = e^v/(u + v^2)$

25. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$ **26.** $f(x, t) = \arctan\left(x\sqrt{t}\right)$

27. $u = te^{w/t}$ **28.** $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2)\, dt$

29. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ **30.** $f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y - z)$

31. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **32.** $w = ze^{xyz}$

33. $u = xy \operatorname{sen}^{-1}(yz)$ **34.** $u = x^{y/z}$

35. $f(x, y, z, t) = xyz^2 \tan(yt)$ **36.** $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

37. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

38. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

39–42 Determine las derivadas parciales indicadas.

39. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

40. $f(x, y) = \arctan(y/x)$; $f_x(2, 3)$

41. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

42. $f(x, y, z) = \sqrt{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y + \text{sen}^2 z}$; $fz(0,0, \pi/4)$

43–44 A partir de la definición de las derivadas parciales como límites (4) para determinar $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

43. $f(x, y) = xy^2 - x^3y$

44. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

45–48 Mediante derivación implícita, determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$. (Puede ver cómo son estas superficies en Visual 14.3.)

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

46. $yz = \ln(x + z)$

47. $x - z = \arctan(yz)$

48. $\text{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

49–50 Calcule $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

49. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

50. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

51–56 Determine todas las segundas derivadas parciales.

51. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$

52. $f(x, y) = \text{sen}^2(mx + ny)$

53. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$

54. $v = \dfrac{xy}{x - y}$

55. $z = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$

56. $v = e^{xe^y}$

57–60 Compruebe que la conclusión del teorema de Clairaut se cumple, es decir, $u_{xy} = u_{yx}$.

57. $u = x\,\text{sen}(x + 2y)$

58. $u = x^4y^2 - 2xy^5$

59. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

60. $u = xye^y$

61–68 Encuentre la derivada parcial indicada.

61. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

62. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt}, f_{txx}

63. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

64. $f(r, s, t) = r\ln(rs^2t^3)$; f_{rss}, f_{rst}

65. $u = e^{r\theta}\,\text{sen}\,\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$

66. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

67. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$

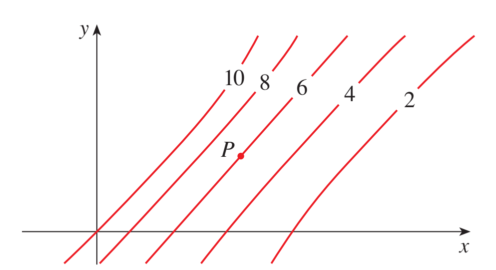
68. $u = x^ay^bz^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z^3}$

69. Con la tabla de valores de $f(x, y)$ estime los valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$ y $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

70. Se muestran las curvas de nivel para una función f. Determine si las siguientes derivadas parciales son positivas o negativas en el punto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



71. Compruebe que la función $u = e^{-\alpha^2k^2t}\,\text{sen}\,kx$ es una solución de la *ecuación de la conducción del calor* $u_t = \alpha^2u_{xx}$.

72. Determine si cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
(a) $u = x^2 + y^2$
(b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$
(d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \text{sen}\,x\cosh y + \cos x\,\text{senh}\,y$
(f) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

73. Verifique que la función $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es una solución de la ecuación tridimensional de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

74. Demuestre que cada una de las funciones siguientes es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$.
(a) $u = \text{sen}(kx)\,\text{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \text{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

75. Si f y g son funciones de una sola variable derivables dos veces, demuestre que la función

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda del ejercicio 74.

76. Si $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, donde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

77. Verifique que la función $z = \ln(e^x + e^y)$ es una solución de las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

78. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción $P = bL^{\alpha}K^{\beta}$ cumple con la ecuación

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

79. Demuestre que la función de Cobb-Douglas para la producción cumple con $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^{\alpha}$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Véase ecuación 5.)

80. La temperatura en un punto (x, y) en una plancha de metal plana, está definida por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, donde T se mide en °C y x, y en metros. Calcule la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto (2, 1) en (a) la dirección de x y (b) la dirección de y.

81. La resistencia total R producida por tres conductores con resistencias R_1, R_2 y R_3 unidas en un circuito eléctrico en paralelo está definida por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Calcule $\partial R/\partial R_1$.

82. La ley de los gases para una masa fija m de un gas ideal a temperatura T, presión P y volumen V absolutos es $PV = mRT$, donde R es la constante de los gases. Demuestre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

83. En el caso del gas ideal del ejercicio 82, demuestre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

84. El factor de enfriamiento se modela mediante la función

$$W = 13.12 + 0.6215T - 11.37v^{0.16} + 0.3965Tv^{0.16}$$

donde T es la temperatura (°C) y v es la velocidad del viento (km/h). Cuando $T = -15$°C y $v = 30$ km/h, ¿cuánto esperaría con certeza usted que cayera la temperatura aparente W si la temperatura real disminuye 1°C? ¿Y si la velocidad del viento se incrementa 1 km/h?

85. La energía cinética de un cuerpo cuya masa m y velocidad v es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Demuestre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

86. Si a, b y c son los lados de un triángulo, y A, B y C son los ángulos opuestos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$, $\partial A/\partial c$ mediante la derivación implícita de la ley de los cosenos.

87. Le dicen que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x, y) = x + 4y$ y $f_y(x, y) = 3x - y$. ¿Debe creerlo?

88. El paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ corta el plano $x = 1$ en una parábola. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta parábola en el punto $(1, 2, -4)$. Con una computadora grafique el paraboloide, la parábola y la tangente en la misma pantalla.

89. El elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ corta el plano $y = 2$ en una elipse. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la tangente a esta elipse en el punto (1, 2, 2).

90. En un estudio de penetración del congelamiento se encontró que la temperatura T en el tiempo t (medido en días) a una profundidad x (medida en pies) se puede modelar con la función

$$T(x, t) = T_0 + T_1e^{-\lambda x}\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

donde $\omega = 2\pi/365$ y λ es una constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. ¿Cuál es el significado físico?
(b) Determine $\partial T/\partial t$. ¿Cuál es el significado físico?
(c) Demuestre que T cumple con la ecuación del calor $T_t = kT_{xx}$ para una cierta constante k.
(d) Si $\lambda = 0.2$, $T_0 = 0$ y $T_1 = 10$, mediante una computadora grafique $T(x, t)$.
(e) ¿Cuál es el significado físico del término $-\lambda x$ en la expresión $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

91. Aplique el teorema de Clairaut para demostrar que si las derivadas parciales de tercer orden de f son continuas, entonces

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

92. (a) ¿Cuántas derivadas parciales de n-ésimo orden tiene una función de dos variables?
(b) Si estas derivadas parciales son continuas, ¿cuántas de ellas pueden ser distintas?
(c) Responda el inciso (a) para el caso de que la función sea de tres variables.

93. Si $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Sugerencia*: en lugar de hallar primero $f_x(x, y)$, observe que es más fácil aplicar la ecuación 1 o la ecuación 2.]

94. Si $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

95. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Grafique f mediante una computadora.
(b) Encuentre $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ cuando $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Calcule $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ usando las ecuaciones 2 y 3.
(d) Demuestre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ y $f_{yx}(0, 0) = 1$.
CAS (e) ¿El resultado del inciso (d) contradice el teorema de Clairaut? Mediante gráficas de f_{xy} y f_{yx} ilustre su respuesta.

14.4 PLANOS TANGENTES Y APROXIMACIONES LINEALES

Una de las ideas más importantes en el cálculo de una sola variable, es que a medida que se acerca a un punto de la gráfica de una función derivable, la gráfica se vuelve indistinguible desde su tangente, y puede aproximarse a la función mediante una función lineal (véase sección 3.11). Ahora se desarrollan ideas similares en tres dimensiones. A medida que se acerca hacia un punto sobre la superficie que es la gráfica de una función derivable de dos variables, la superficie se parece más y más a un plano, su plano tangente, y es posible aproximarse a la función mediante una función lineal de dos variables. También se generaliza la idea de una diferencial a funciones de dos o más variables.

PLANOS TANGENTES

Suponga que una superficie S tiene por ecuación a $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Al igual que en la sección anterior, sea C_1 y C_2 las curvas que se obtienen al intersectar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Por lo tanto, el punto P se encuentra tanto en C_1 como en C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces, el **plano tangente** a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene las rectas tangentes T_1 y T_2 (véase figura 1).

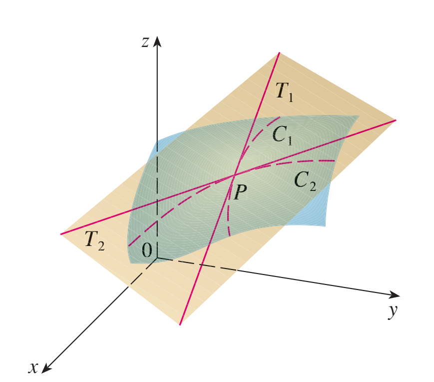


FIGURA 1
El punto tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.

En la sección 14.6 se ve que si C es cualquier otra curva que queda en la superficie S y pasa por P, entonces su tangente en P también está en el plano tangente. Por lo tanto, puede pensar que el plano tangente a S en P consta de todas las tangentes posibles en P a curvas que quedan en S y pasan por P. El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S cerca del punto P.

Sabe por la ecuación 12.5.7 que cualquier plano que pase por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación entre C y hacer $a = -A/C$ y $b = -B/C$, la escribe en la forma

1 $$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

Si la ecuación 1 representa el plano tangente en P, entonces su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente T_1. Al hacer $y = y_0$ en la ecuación 1

$$z - z_0 = a(x - x_0) \qquad y = y_0$$

e identifica estas expresiones como la ecuación de una recta cuando se conoce su pendiente y pasa por un punto, en donde la pendiente es a. Pero de acuerdo con la sección 14.3, la pendiente de la recta tangente T_1 es $f_x(x_0, y_0)$. Por lo tanto, $a = f_x(x_0, y_0)$.

De manera similar, al hacer $x = x_0$ en la ecuación 1, $z - z_0 = b(y - y_0)$, la cual debe representar a la recta tangente T_2, de modo que $b = f_y(x_0, y_0)$.

■ Observe la similitud entre la ecuación del plano tangente y de una recta tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

2 Suponga que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

V EJEMPLO 1 Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto (1, 1, 3).

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Entonces

$$f_x(x, y) = 4x \qquad f_y(x, y) = 2y$$

$$f_x(1, 1) = 4 \qquad f_y(1, 1) = 2$$

Entonces (2) da la ecuación del plano tangente en (1, 1, 3) como

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

o bien,
$$z = 4x + 2y - 3$$
□

TEC En Visual 14.4 se pueden ver imágenes animadas de las figuras 2 y 3.

En la figura 2(a) se ilustra el paraboloide elíptico y su plano tangente en (1, 1, 3) determinado en el ejemplo 1. Las partes (b) y (c) se acercan al punto (1, 1, 3) restringiendo el dominio de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que a medida que se acerca, parece más plana la gráfica y más parece su plano tangente.

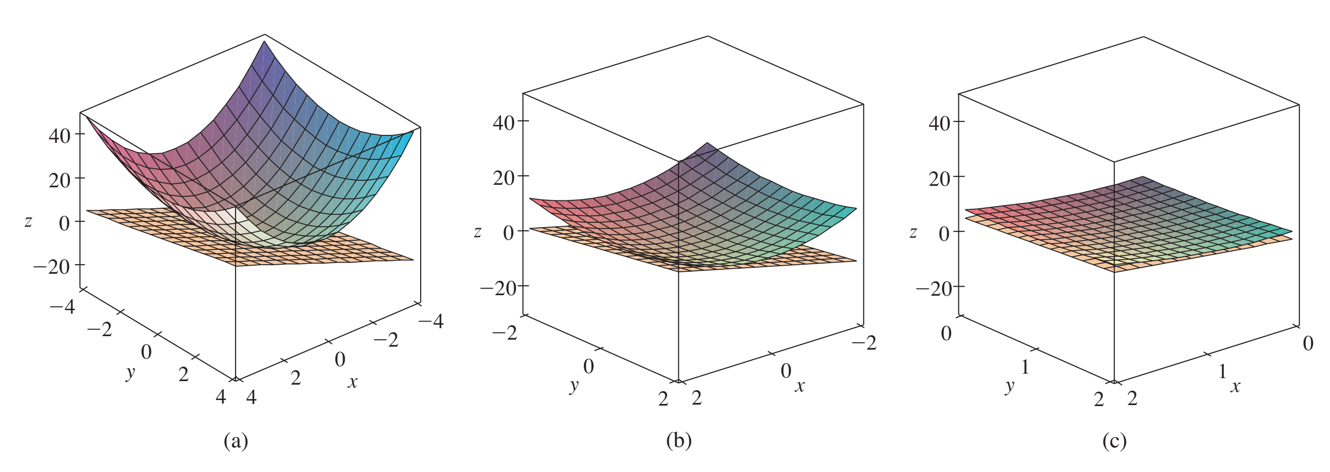
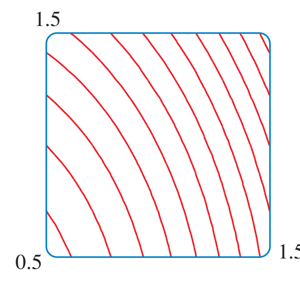
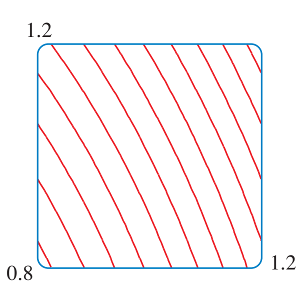


FIGURA 2 El paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ parece coincidir con su plano tangente a medida que se acerca a (1, 1, 3)

En la figura 3 se comprueba esta impresión al acercarse al punto (1, 1) en un mapa de curvas de nivel de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Observe que a medida que se acerca, las curvas de nivel parecen más rectas paralelas con igual separación, lo cual es característico de un plano.





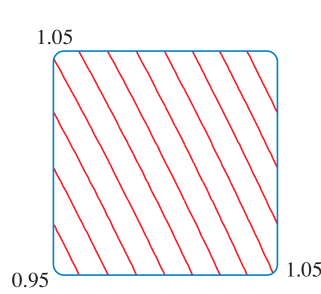


FIGURA 3
Acercamiento a (1, 1) en un mapa de curvas de nivel de $f(x, y) = 2x^2 + y^2$

APROXIMACIONES LINEALES

En el ejemplo 1 encontramos que una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$ es $z = 4x + 2y - 3$. Por lo tanto, en vista de la evidencia de las figuras 2 y 3, la función lineal de dos variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

es una buena aproximación a $f(x, y)$ cuando (x, y) está cerca de $(1, 1)$. La función L es llamada *linealización* de f en $(1, 1)$ y la aproximación

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

recibe el nombre de *aproximación lineal*, o bien, *aproximación del plano tangente* de f en $(1, 1)$.

Por ejemplo, en el punto $(1.1, 0.95)$ la aproximación lineal da

$$f(1.1, 0.95) \approx 4(1.1) + 2(0.95) - 3 = 3.3$$

que es muy cercana al valor verdadero de $f(1.1, 0.95) = 2(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Pero si toma un punto alejado de $(1, 1)$, tal como $(2, 3)$, ya no consigue una buena aproximación. En efecto, $L(2, 3) = 11$ y $f(2, 3) = 17$.

En general, sabemos a partir de (2) que una ecuación del plano tangente a la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a, b))$ es

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

La función lineal cuya gráfica es este plano tangente, a saber,

3 $$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama la **linealización** de f en (a, b) y la aproximación

4 $$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

se llama **aproximación lineal** o **aproximación del plano tangente** de f en (a, b).

Ya ha definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? En la figura 4 se ilustra tal función; su ecuación es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

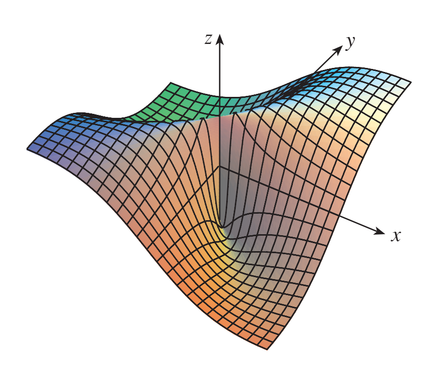


FIGURA 4
$f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$,
$f(0, 0) = 0$

Usted puede comprobar (véase ejercicio 46) que existen sus derivadas parciales en el origen y, de hecho, $f_x(0, 0) = 0$ y $f_y(0, 0) = 0$, pero f_x y f_y no son continuas. La aproximación lineal sería $f(x, y) \approx 0$, pero $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos de la recta $y = x$. De este modo una función de dos variables se puede comportar erráticamente aun cuando ambas derivadas parciales existan. Para evitar dicho comportamiento, se plantea la idea de una función diferenciable de dos variables.

Recuerde que para una función de una variable, $y = f(x)$, si x pasa de a a $a + \Delta x$, se define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

En el capítulo 3 se demostró que si f es diferenciable en a, entonces

■ Ésta es la ecuación 3.4.7.

5 $$\Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde } \varepsilon \to 0 \text{ cuando } \Delta x \to 0$$

Ahora considere una función de dos variables, $z = f(x, y)$, y suponga que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y pasa de b a $b + \Delta y$. Entonces el **incremento** correspondiente de z es

6 $$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Por consiguiente, el incremento Δz representa el cambio del valor de f cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Por analogía con (5) se define la diferenciabilidad de una función de dos variables como sigue.

7 DEFINICIÓN Si $z = f(x, y)$, entonces f es diferenciable en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

La definición 7 establece que una función diferenciable es una para la cual la aproximación lineal (4) es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b). En otras palabras, el plano tangente se aproxima a la gráfica de f muy cerca al punto de tangencia.

Algunas veces es difícil aplicar directamente la definición 7 para comprobar la diferenciabilidad de una función, pero el teorema siguiente proporciona una condición suficiente y práctica para la diferenciabilidad.

■ El teorema 8 se demuestra en el apéndice F.

8 TEOREMA Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

V EJEMPLO 2 Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1, 0)$ y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales son

■ En la figura 5 se ilustran las gráficas de la función f y la linealización L del ejemplo 2 .

$$f_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad f_y(x, y) = x^2e^{xy}$$
$$f_x(1, 0) = 1 \qquad f_y(1, 0) = 1$$

Tanto f_x como f_y son funciones continuas, de modo que f es diferenciable según el teorema 8. La linealización es

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)(y - 0) \\ &= 1 + 1(x - 1) + 1 \cdot y = x + y \end{aligned}$$

La aproximación lineal correspondiente es

$$xe^{xy} \approx x + y$$

de modo que $$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$$

FIGURA 5

Compare lo anterior con el valor real de $f(1.1, -0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$. □

EJEMPLO 3 Al inicio de la sección 14.3, estudió el índice calorífico (temperatura percibida) I como una función de la temperatura real T y la humedad relativa H y se presentó la tabla siguiente de valores del National Weather Service.

Humedad relativa (%)

Temperatura real (°F)

T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Calcule una aproximación lineal para el índice calorífico $I = f(T, H)$ cuando T está cerca de 96°F y H está cerca del 70%. Mediante ella estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 97°F y la humedad relativa es 72%.

SOLUCIÓN En la tabla se ve que $f(96, 70) = 125$. En la sección 14.3 usó los valores de la tabla para estimar que $f_T(96, 70) \approx 3.75$ y $f_H(96, 70) \approx 0.9$. (Véanse páginas 878 y 879.) Entonces, la aproximación lineal es

$$\begin{aligned} f(T, H) &\approx f(96, 70) + f_T(96, 70)(T - 96) + f_H(96, 70)(H - 70) \\ &\approx 125 + 3.75(T - 96) + 0.9(H - 70) \end{aligned}$$

En particular,

$$f(97, 72) \approx 125 + 3.75(1) + 0.9(2) = 130.55$$

Por lo tanto, cuando $T = 97°F$ y $H = 72\%$, el índice calorífico es

$$I \approx 131°F$$

□

DIFERENCIALES

En el caso de una función diferenciable de una variable, $y = f(x)$, defina la diferencial dx como una variable independiente; es decir, dx puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de y se define entonces como

9. $$dy = f'(x)\, dx$$

(Véase sección 3.10.) En la figura 6 se ilustra la relación entre el incremento Δy y la diferencial dy: Δy representa el cambio en altura de la curva $y = f(x)$ y dy representa el cambio en altura de la tangente cuando x cambia una cantidad $dx = \Delta x$.

En el caso de una función diferenciable de dos variables, $z = f(x, y)$, defina las **diferenciales** dx y dy como variables independientes; es decir, pueden tomar cualquier valor. Entonces, la **diferencial** dz, también conocida como **diferencial total**, se define como

10. $$dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

(Compare con la ecuación 9.) Algunas veces se usa la notación df en lugar de dz.

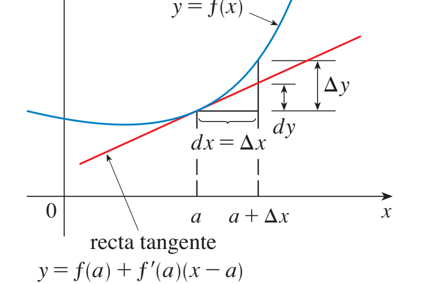


FIGURA 6

Si toma $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$ de la ecuación 10, entonces la diferencial de z es

$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal (4) se puede escribir como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

La figura 7 es el equivalente tridimensional de la figura 6 y en ella se muestra la interpretación geométrica de la diferencial dz y del incremento Δz: dz representa el cambio en altura del plano tangente, y Δz representa el cambio en la altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$.

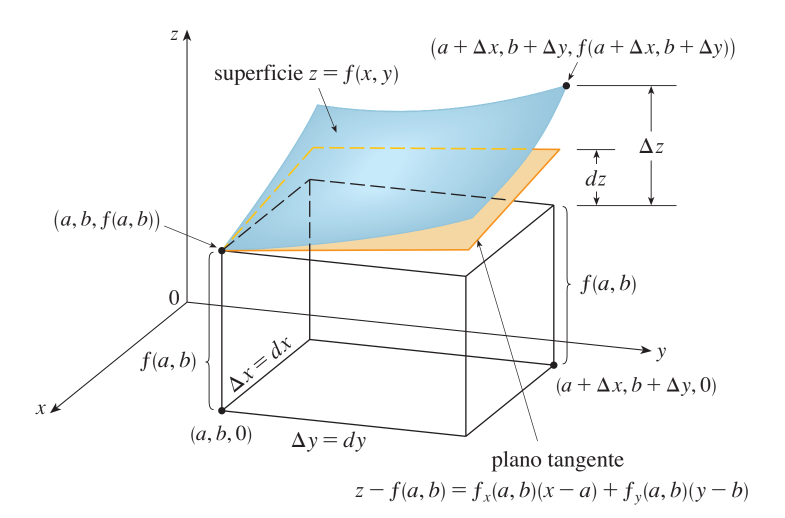


FIGURA 7

EJEMPLO 4

(a) Si $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$, determine la diferencial dz.

(b) Si x cambia de 2 a 2.05 y y pasa de 3 a 2.96, compare los valores de Δz y dz.

SOLUCIÓN

(a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (2x + 3y)\,dx + (3x - 2y)\,dy$$

(b) Si hace $x = 2$, $dx = \Delta x = 0.05$, $y = 3$ y $dy = \Delta y = -0.04$, obtiene

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

El incremento de z es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3)\\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2]\\ &= 0.6449\end{aligned}$$

Observe que $\Delta z \approx dz$ pero dz es más fácil de calcular. □

■ En el ejemplo 4, dz está cerca de Δz porque el plano tangente es una buena aproximación a la superficie $z = x^2 + 3xy - y^2$ cerca de (2, 3, 13). (Véase figura 8.)

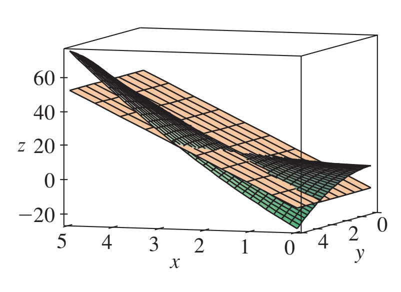


FIGURA 8

EJEMPLO 5 El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 10 cm y 25 cm, respectivamente, pero hay un error posible en la medición de 0.1 cm como

máximo en cada uno. Mediante diferenciales estime el error máximo en el volumen calculado del cono.

SOLUCIÓN El volumen V de un cono de radio en la base r y altura h es $V = \pi r^2 h/3$. De modo que la diferencial de V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\,dr + \frac{\partial V}{\partial h}\,dh = \frac{2\pi rh}{3}\,dr + \frac{\pi r^2}{3}\,dh$$

Puesto que cada error es de 0.1 cm como máximo, $|\Delta r| \leqslant 0.1$, $|\Delta h| \leqslant 0.1$. Para determinar el error más grande en el volumen, tomamos el error más grande en la medición de r y de h. entonces $dr = 0.1$ y $dh = 0.1$ junto con $r = 10$, $h = 25$. Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) = 20\pi$$

Por lo tanto, el error máximo en el volumen calculado es de casi 20π cm$^3 \approx 63$ cm^3. □

FUNCIONES DE TRES O MÁS VARIABLES

Se pueden definir de manera similar las aproximaciones lineales, la diferenciabilidad y las diferenciales para funciones de más de dos variables. Una función diferenciable se define como una expresión similar a la definición 7. Para tales funciones la **aproximación lineal** es

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f_x(a, b, c)(x - a) + f_y(a, b, c)(y - b) + f_z(a, b, c)(z - c)$$

y la linealización $L(x, y, z)$ es el segundo miembro de esta expresión.

Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** de w es

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

La **diferencial** de dw se define en función de las diferenciales de dx, dy y dz de las variables independientes

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz$$

EJEMPLO 6 Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 cm, y cada medida no difiere 0.2 cm del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.

SOLUCIÓN Si las dimensiones de la caja son x, y y z, entonces su volumen es $V = xyz$ por lo que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$$

Sabe que $|\Delta x| \leqslant 0.2$, $|\Delta y| \leqslant 0.2$ y $|\Delta z| \leqslant 0.2$. Por lo tanto, para determinar el error más grande en el volumen, utilice $dx = 0.2$, $dy = 0.2$ y $dz = 0.2$ junto con $x = 75$, $y = 60$ y $z = 40$:

$$\begin{aligned}\Delta V \approx dV &= (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2)\\ &= 1980\end{aligned}$$

Por consiguiente, un error de sólo 0.2 cm al medir cada una de las dimensiones podría llevar a un error de ¡tanto como 1980 cm^3 en el volumen calculado! Esto parecería un gran error, pero sólo es alrededor de 1% del volumen de la caja. □

14.4 EJERCICIOS

1–6 Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto específico.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $(-1, 2, 4)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7$, $(2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$

4. $z = y \ln x$, $(1, 4, 0)$

5. $z = y \cos(x - y)$, $(2, 2, 2)$

6. $z = e^{x^2 - y^2}$, $(1, -1, 1)$

7–8 Grafique la superficie y el plano tangente en el punto dado. Elija el dominio y el ángulo desde donde obtenga una buena vista de la superficie y del plano tangente. Luego efectúe un acercamiento hasta la superficie y el plano tangente se vuelve indistinguible.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$

8. $z = \arctan(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

CAS **9–10** Grafique la superficie y el plano tangente en el punto dado. (Use un sistema computarizado de álgebra para calcular las derivadas parciales y para graficar la superficie y su plano tangente.) Luego efectúe un acercamiento hasta la superficie y el plano tangente se vuelve indistinguible.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$, $(1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy})$, $(1, 1, 3e^{-0.1})$

11–16 Explique por qué la función es diferenciable en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $(1, 4)$

12. $f(x, y) = x^3y^4$, $(1,1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $(2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y$, $(\pi, 0)$,

16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $(-3, 2)$

17–18 Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$.

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$

18. $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en $(2, 1)$ y con ella aproxime $f(1.95, 1.08)$.

20. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ en $(7, 2)$ y con ella aproxime $f(6.9, 2.06)$. Grafique f y el plano tangente.

21. Determine la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y a través de ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

22. La altura h de una ola en el mar abierto, depende de la velocidad v del viento y del tiempo t en que ha estado soplando el aire a esa velocidad. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en la tabla siguiente.

Duración (horas) — Velocidad del viento (nudos)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Con ayuda de la tabla, determine una aproximación lineal a la función de la altura de la ola cuando v está cerca de 40 nudos y t es de cerca de 20 horas. Luego estime las alturas de las olas cuando el viento ha estado soplando durante 24 h a 43 nudos.

23. Mediante la tabla del ejemplo 3, determine una aproximación lineal para la función del índice calorífico cuando la temperatura se acerca a 94°F y la humedad relativa es de casi 80%. Luego estime el índice calorífico cuando la temperatura es de 95°F y la humedad relativa es de 78%.

24. El factor de enfriamiento W es la temperatura que se percibe cuando la temperatura real es T y la velocidad del aire es v, de modo que $W = f(T, v)$. La tabla siguiente de valores es tan sólo una parte de la tabla 1 de la sección 14.1.

Velocidad del viento (km/h) — Temperatura real (°C)

T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Con esta tabla determine una aproximación lineal a la función del factor de enfriamiento cuando T es casi de $-15°C$ y v es casi de 50 km/h. Después estime el factor de enfriamiento cuando la temperatura es $-17°C$ y la velocidad del aire es de 55 km/h.

25–30 Determine la diferencial de la función.

25. $z = x^3 \ln(y^2)$

26. $v = y \cos xy$

27. $m = p^5q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \gamma$

30. $w = xye^{xz}$

---

31. Si $z = 5x^2 + y^2$ y (x, y) cambia de $(1, 2)$ a $(1.05, 2.1)$, compare los valores de Δz y dz.

32. Si $z = x^2 - xy + 3y^2$ y (x, y) cambia de $(3, -1)$ a $(2.96, -0.95)$, compare los valores de Δz y dz.

33. El largo y el ancho de una rectángulo miden respectivamente 30 cm y 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.1 cm en cada una de las dimensiones. Use diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del rectángulo.

34. Una caja rectangular cerrada mide 80 cm, 60 cm y 50 cm en sus tres dimensiones, con un error posible en la medición de 0.2 cm en cada una. Use diferenciales para estimar el error máximo en el cálculo del área superficial de la caja.

35. Use diferenciales para estimar la cantidad de estaño en una lata cerrada de estaño cuyo diámetro es 8 cm y altura de 12 cm si el estaño tiene 0.04 cm de espesor.

36. Use diferenciales para estimar la cantidad de metal en una lata cilíndrica cerrada que mide 10 cm de altura y 4 cm de diámetro. El metal para la parte superior y el fondo es de 0.1 cm de grueso y el metal de los lados tiene 0.05 cm de espesor.

37. Alrededor de un rectángulo de 100 por 200 pies, hay pintada una franja de 3 pulg de ancho, que sirve como límite. Utilice diferenciales para aproximar la cantidad de pies cuadrados de pintura en la franja.

38. La presión, volumen y temperatura de un mol de gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$, donde P se mide en kilopascales, V en litros y T en kelvin. Mediante diferenciales determine el cambio aproximado en la presión si el volumen pasa de 12 litros a 12.3 litros y la temperatura disminuye de 310 K a 305 K.

39. Si R es la resistencia total de tres resistores, conectados en paralelo, con resistencias R_1, R_2, R_3, entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Si la resistencia se mide en ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ y $R_3 = 50\ \Omega$, con un error posible de 0.5% en cada caso, estime el error máximo en el valor calculado de R.

40. Cuatro números positivos, cada uno menor de 50, se redondean a la primera cifra decimal, y luego se multiplican todos. Mediante diferenciales, estime el error máximo posible en el producto calculado que podría resultar por el redondeo.

41. Un modelo para el área superficial de un cuerpo humano está dado por $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$, donde w es el peso (en libras), h es la estatura (en pulgadas), y S se mide en pies cuadrados. Si los errores en la medición de w y h son a lo sumo un 2%, use diferenciales para estimar el máximo error porcentual en el área superficial calculada.

42. Suponga que el lector necesita saber una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P(2, 1, 3)$. No tiene una ecuación para S pero sabe que las curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t,\ 1 - t^2,\ 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2,\ 2u^3 - 1,\ 2u + 1 \rangle$$

se encuentran ambas en S. Encuentre una ecuación del plano tangente en P.

43–44 Demuestre que la función es diferenciable determinando los valores de ε_1 y ε_2 que cumplen con la definición 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

---

45. Demuestre que si f es una función de dos variables que es diferenciable en (a, b), entonces f es continua en (a, b).

Sugerencia: demuestre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

se grafica en la figura 4. Demuestre que existen tanto $f_x(0, 0)$ como $f_y(0, 0)$, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$. [*Sugerencia*: use el resultado del ejercicio 45.]

(b) Explique por qué f_x y f_y no son continuas en $(0, 0)$.

14.5 REGLA DE LA CADENA

Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una sola variable, da la regla para derivar una función compuesta: si $y = f(x)$ y $x = g(t)$, donde f y g son funciones diferenciables, entonces y es indirectamente una función diferenciable de t y

1
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

En el caso de funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se relaciona con el caso donde $z = f(x, y)$ y cada variable x y y es a su vez una función de la variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para diferenciar z como una función de t. Suponga que f es diferenciable (definición 14.4.7). Recuerde que éste es el caso cuando f_x y f_y son continuas (teorema 14.4.8).

2 REGLA DE LA CADENA (CASO 1) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función de x y y diferenciable, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones de t diferenciables. Entonces z es una función de t diferenciable y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DEMOSTRACIÓN Un cambio de Δt en t produce cambios de Δx en x y Δy en y. Éstos, a su vez, producen un cambio de Δz en z, y de acuerdo con la definición de 14.4.7

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. [Si las funciones ε_1 y ε_2 no están definidas en (0, 0), puede definir que son 0 allí.] Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre Δt,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Si ahora hace $\Delta t \to 0$, entonces $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ porque g es diferenciable y, por lo tanto, continua. De igual manera, $\Delta y \to 0$. A su vez, esto quiere decir que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}
\end{aligned}$$

□

Como se escribe a menudo $\partial z/\partial x$ en lugar de $\partial f/\partial x$, puede volver a escribir la regla de la cadena en la forma

■ Observe la similitud con la definición de la diferencial:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

EJEMPLO 1 Si $z = x^2y + 3xy^4$, donde $x = \text{sen } 2t$ y $y = \cos t$, determine dz/dt cuando $t = 0$.

SOLUCIÓN La regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\text{sen } t)\end{aligned}$$

No es necesario escribir las expresiones para x y y en términos de t. Simplemente observe que cuando $t = 0$ tiene $x = \text{sen } 0 = 0$ y $y = \cos 0 = 1$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0 + 3)(2\cos 0) + (0 + 0)(-\text{sen } 0) = 6$$ □

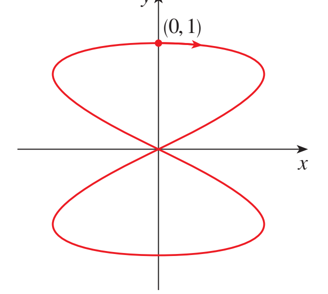


FIGURA 1
La curva $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$

La derivada del ejemplo 1 se puede interpretar como la razón de cambio de z con respecto a t cuando el punto (x, y) se desplaza por la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \text{sen } 2t$, $y = \cos t$ (véase figura 1). En particular, cuando $t = 0$, el punto (x, y) es $(0, 1)$ y $dz/dt = 6$ es la razón del incremento cuando uno se desplaza por la curva C que pasa por el punto $(0, 1)$. Por ejemplo, si $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$ representa la temperatura en el punto (x, y), entonces la función compuesta $z = T(\text{sen } 2t, \cos t)$ representa la temperatura en los puntos sobre C y la derivada dz/dt representa la razón a la cual la temperatura cambia a lo largo de C.

V EJEMPLO 2 La presión P, en kilopascales, el volumen V, en litros y la temperatura T, en kelvin, de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación $PV = 8.31T$. Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es de 300 K y se incrementa a razón de 0.1 K/s y el volumen es de 100 L y se incrementa a razón de 0.2 L/s.

SOLUCIÓN Si t representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en el instante dado $T = 300$, $dT/dt = 0.1$, $V = 100$, $dV/dt = 0.2$. Puesto que

$$P = 8.31\frac{T}{V}$$

con la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2}\frac{dV}{dt}\\ &= \frac{8.31}{100}(0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2}(0.2) = -0.04155\end{aligned}$$

La presión disminuye a razón de casi 0.042 kPa/s. □

Ahora considere la situación en donde $z = f(x, y)$ pero cada x y y es una función de dos variables s y t: $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$. Entonces z es indirectamente una función de s y de t y desea hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$. Recuerde que al calcular $\partial z/\partial t$ mantiene fija a s y

calcula la derivada ordinaria de z con respecto a t. Por lo tanto, aplicar el teorema 2 para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 REGLA DE LA CADENA (CASO 2) Suponga que $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones diferenciables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

EJEMPLO 3 Si $z = e^x \operatorname{sen} y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

SOLUCIÓN Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2e^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2}\cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2}\operatorname{sen}(s^2t) + s^2e^{st^2}\cos(s^2t)$$ □

El caso 2 de la regla de la cadena contiene tres tipos de variables: s y t son variables **independientes**, x y y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Observe que el teorema 3 tiene un término para cada variable intermedia, y cada uno de estos términos es similar a la regla de la cadena unidimensional de la ecuación 1.

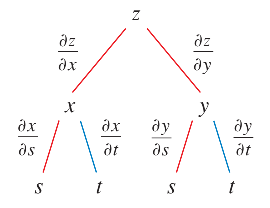


FIGURA 2

Para recordar la regla de la cadena, es útil dibujar el **diagrama de árbol** de la figura 2. Dibujamos ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego dibuje ramas desde x y y a las variables independientes s y t. En cada rama escriba la derivada parcial correspondiente. Para determinar $\partial z/\partial s$ calcule el producto de las derivadas parciales en cada trayectoria desde z hasta s y luego sume los productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

De la misma manera determine $\partial z/\partial t$ mediante las trayectorias de z a t.

Enseguida considere la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias $x_1, \ldots, x_n$, cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $t_1, \ldots, t_m$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La demostración es similar a la del caso 1.

4 REGLA DE LA CADENA (VERSIÓN GENERAL) Suponga que u es una función diferenciable de las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función diferenciable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2 \ldots, m$.

V EJEMPLO 4 Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ y $t = t(u, v)$.

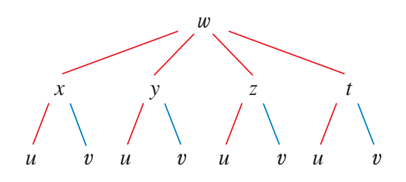
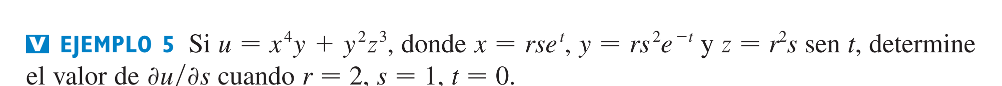


FIGURA 3

SOLUCIÓN Aplique el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no ha escrito las derivadas en las ramas, se sobreentiende que si una rama va desde y a u, entonces la derivada parcial para esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, puede escribir las expresiones necesarias:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$ □



V EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

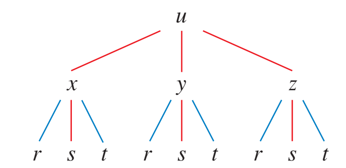


FIGURA 4

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$ y $t = 0$ tiene $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, de este modo

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$ □

EJEMPLO 6 Si $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es diferenciable, demuestre que g cumple con la ecuación

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

SOLUCIÓN Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s, t) = f(x, y)$ y la regla de la cadena dan

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

Por lo tanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$ □

EJEMPLO 7 Si las derivadas parciales de segundo orden de $z = f(x, y)$ son continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, calcule (a) $\partial z/\partial r$ y (b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN

(a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

(b) Al aplicar la regla del producto a la expresión en la parte (a) obtiene

5
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

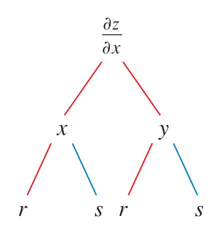


FIGURA 5

Pero al aplicar la regla de la cadena una vez más (véase figura 5), llega a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas de segundo orden combinadas, obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$ □

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita que se empezó a tratar en las secciones 3.6 y 14.3. Se supone que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función diferenciable de x, es decir, $y = f(x,)$, donde $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F es diferenciable, aplica el caso 1 de la regla de la cadena para diferenciar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ se resuelve $\dfrac{dy}{dx}$ para obtener

6
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Para deducir esta ecuación, suponga que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, que se demuestra en cálculo avanzado, proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si F se define sobre un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$ y F_x y F_y son continuas en el disco, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función la da la ecuación 6.

EJEMPLO 8 Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

SOLUCIÓN La ecuación dada se puede escribir como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

de modo que la ecuación 6 da como resultado

■ La solución del ejemplo 8 se debe comparar con la del ejemplo 2 de la sección 3.5.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$ □

Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto quiere decir que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son diferenciables, entonces aplica la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

de este modo esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, determine $\partial z/\partial x$ y obtiene la primera fórmula de las ecuaciones 7. La fórmula $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Una vez más, una versión del **teorema de la función implícita** da condiciones en las cuales la suposición es válida. Si F está definida dentro de una esfera que contiene (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ y F_x, F_y y F_z son continuas dentro de la esfera, entonces la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es diferenciable; sus derivadas parciales las define (7).

EJEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUCIÓN Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 7

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$ □

■ La solución del ejemplo 9 se debe comparar con la del ejemplo 4 de la sección 14.3.

14.5 EJERCICIOS

1–6 Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt o dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy,\ x = \operatorname{sen} t,\ y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y),\ x = 5t^4,\ y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2},\ x = \ln t,\ y = \cos t$

4. $z = \tan^{-1}(y/x),\ x = e^t,\ y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z},\quad x = t^2,\quad y = 1 - t,\quad z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ x = \operatorname{sen} t,\ y = \cos t,\ z = \tan t$

7–12 Mediante la regla de la cadena encuentre $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3,\ x = s\cos t,\ y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y),\ x = s^2 + t^2,\ y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta\cos\phi,\ \theta = st^2,\ \phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y},\ x = s/t,\ y = t/s$

11. $z = e^r\cos\theta,\quad r = st,\quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \tan(u/v),\ u = 2s + 3t,\ v = 3s - 2t$

13. Si $z = f(x, y)$, donde f es diferenciable,

$$x = g(t), \qquad y = h(t),$$
$$g(3) = 2, \qquad h(3) = 7,$$
$$g'(3) = 5, \qquad h'(3) = -4,$$
$$f_x(2, 7) = 6 \qquad f_y(2, 7) = -8,$$

determine dz/dt cuando $t = 3$.

14. Sea $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, donde F, u y v son diferenciables,

$$u(1, 0) = 2, \qquad v(1, 0) = 3,$$
$$u_s(1, 0) = -2, \qquad v_s(1, 0) = 5,$$
$$u_t(1, 0) = 6, \qquad v_t(1, 0) = 4,$$
$$F_u(2, 3) = -1 \qquad F_v(2, 3) = 10.$$

Determine $W_s(1, 0)$ y $W_t(1, 0)$.

15. Suponga que f es una función diferenciable de x y y, y que $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Mediante la tabla de valores calcule $g_u(0, 0)$ y $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponga que f es una función diferenciable de x y y, y que $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Mediante la tabla de valores del ejercicio 15 calcule $g_r(1, 2)$ y $g_s(1, 2)$.

17–20 Mediante un diagrama de árbol, escriba la regla de la cadena para el caso dado. Suponga que todas las funciones son diferenciables.

17. $u = f(x, y)$, donde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, donde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, donde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, donde $(u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se piden.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;
$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ cuando $u = 2, v = 1, w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$, $s = x + y \operatorname{sen} t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ cuando $x = 1, y = 2, t = 0$

23. $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2)$,
$u = x + 2y$, $v = 2x - y$, $w = 2xy$;
$\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ cuando $x = y = 1$

24. $M = xe^{y - z^2}$, $x = 2uv$, $y = u - v$, $z = u + v$;
$\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}$ cuando $u = 3, v = -1$

25. $u = x^2 + yz$, $x = pr\cos\theta$, $y = pr \operatorname{sen}\theta$, $z = p + r$;
$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ cuando $p = 2, r = 3, \theta = 0$

26. $Y = w \tan^{-1}(uv)$, $u = r + s$, $v = s + t$, $w = t + r$;
$\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ cuando $r = 1, s = 0, t = 1$

27–30 Aplique la ecuación 6 para encontrar dy/dx.

27. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

28. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

29. $\cos(x - y) = xe^y$

30. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

31–34 Con las ecuaciones 7 halle $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

32. $xyz = \cos(x + y + z)$

33. $x - z = \arctan(yz)$

34. $yz = \ln(x + z)$

---

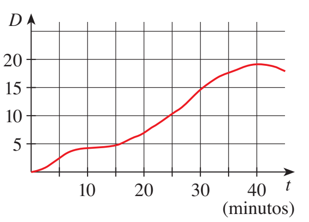
35. La temperatura en un punto (x, y) es $T(x, y)$, medida en grados Celsius. Un animalito se arrastra de tal modo que su posición después de t segundos está definida por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función de la temperatura cumple con $T_x(2, 3) = 4$ y $T_y(2, 3) = 3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura en la trayectoria del animalito después de 3 segundos?

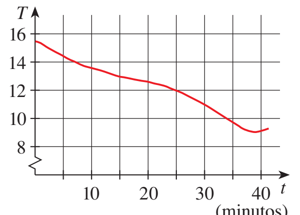
36. La producción de trigo en un año dado, W, depende de la temperatura promedio T y de la precipitación pluvial anual R. Los científicos estiman que la temperatura promedio se eleva a razón de 0.15°C/año, y que la precipitación está disminuyendo a razón de 0.1 cm/año. También estiman que, a niveles de producción actuales, $\partial W/\partial T = -2$ y $\partial W/\partial R = 8$.
(a) ¿Cuál es el significado de los signos de estas derivadas parciales?
(b) Estime la razón de cambio actual de la producción de trigo, dW/dt.

37. La velocidad del sonido que viaja a través del agua del mar con salinidad de 35 partes por millar, está modelada por la ecuación

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T es la temperatura (en grados Celsius) y D es la profundidad por abajo de la superficie del mar (en metros). Un buzo en escafandra autónoma empieza a sumergirse en el agua del mar; la profundidad del buzo y la temperatura del agua que lo rodea con respecto al tiempo se registran en las gráficas siguientes. Estime la razón de cambio, con respecto al tiempo, de la velocidad del sonido a través del agua de mar que experimentó el buzo durante una inmersión de 20 min. ¿Cuáles son las unidades?





38. El radio de un cono circular recto se incrementa a una razón de 1.8 pulg/s, mientras su altura disminuye a razón de 2.5 pulg/s. ¿A qué razón cambia el volumen del cono cuando el radio es 120 pulg y la altura es de 140 pulg?

39. La longitud ℓ, ancho w y altura h de una caja cambia con el tiempo. En un cierto instante, las dimensiones son $\ell = 1$ m y $w = h = 2$ m, y ℓ y w se incrementan a razón de 2 m/s, en tanto que h disminuye a razón de 3 m/s. Encuentre en ese instante las razones a las cuales las siguientes magnitudes cambian.
(a) El volumen
(b) El área superficial
(c) La longitud de la diagonal

40. El voltaje V en un circuito eléctrico simple disminuye con lentitud a medida que la batería se gasta. La resistencia R se incrementa lentamente cuando el resistor se calienta. Mediante la ley de Ohm, $V = IR$, determine cómo cambia la corriente I en el momento en que $R = 400\ \Omega$, $I = 0.08$ A, $dV/dt = -0.01$ V/s y $dR/dt = 0.03\ \Omega$/s.

41. La presión de un mol de gas ideal se incrementa a razón de 0.05 kPa/s y la temperatura aumenta a razón de 0.15 K/s. Utilice la ecuación del ejemplo 2 para determinar la razón de cambio del volumen cuando la presión es de 20 kPa y la temperatura es de 320 K.

42. El automóvil A viaja hacia el norte por la carretera 16 y el automóvil B viaja hacia el oeste por la carretera 83. Los vehículos se aproximan a la intersección de dichas carreteras. En un cierto momento, el automóvil A está a 0.3 km de la intersección y se desplaza a 90 km/h mientras que el automóvil B está a 0.4 km de la intersección y viaja a 80 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los automóviles en ese momento?

43. Un lado de un triángulo está creciendo a razón de 3 cm/s y un segundo lado está decreciendo a razón de 2 cm/s. Si el área del

triángulo permanece constante, ¿a qué ritmo cambia el ángulo entre los lados cuando el primer lado mide 20 cm de largo, el segundo lado es de 30 cm, y el ángulo es $p/6$?

44. Si un sonido de frecuencia f_s es producido por una fuente que se desplaza a lo largo de una línea con rapidez v_s, y un observador se mueve con rapidez v_o a lo largo de la misma línea desde la dirección opuesta hacia la fuente, entonces la frecuencia del sonido escuchado por el observador es

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_o}\right)$$

donde c es la velocidad del sonido, de unos 332 m/s. (Éste es el **efecto Doppler.**) Suponga que, en un momento en particular, usted está en un tren que corre a 34 m/s y que acelera a 1.2 m/s^2. Un tren se aproxima desde la dirección opuesta en la otra vía a 40 m/s, acelerando a 1.4 m/s^2, y hace sonar su silbato, que tiene una frecuencia de 460 Hz. En ese instante, ¿cuál es la frecuencia percibida que usted escucha y con qué rapidez está cambiando?

45–48 Suponga que todas las funciones dadas son diferenciables.

45. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial\theta$ y (b) demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s\,\text{sen}\,t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Si $z = f(x - y)$, demuestre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t$ y $y = s - t$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49–54 Suponga que todas las funciones dadas tienen derivadas parciales de segundo orden continuas.

49. Demuestre que cualquier función de la forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

es una solución de la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugerencia*: sea $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Si $u = f(x, y)$, donde $x = e^s\cos t$ y $y = e^s\,\text{sen}\,t$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. Compare con el ejemplo 7.

52. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ y (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponga que $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$.
(a) Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Encuentre una fórmula similar para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Una función f se llama **homogénea de grado *n*** si cumple con la ecuación $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para toda t, donde n es un entero positivo y f tiene derivadas parciales continuas de segundo orden.
(a) Compruebe que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ es homogénea de grado 3.
(b) Demuestre que si f es homogénea de grado n, entonces

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugerencia*: aplique la regla de la cadena para derivar $f(tx, ty)$ con respecto a t.]

56. Si f es homogénea de grado n demuestre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1)f(x, y)$$

57. Si f es homogénea de grado n demuestre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define en forma implícita cada una de las tres variables x, y y z como funciones de otras dos: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Si F es diferenciable y F_x, F_y y F_z son diferentes de cero, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

14.6 DERIVADAS DIRECCIONALES Y SU VECTOR GRADIENTE

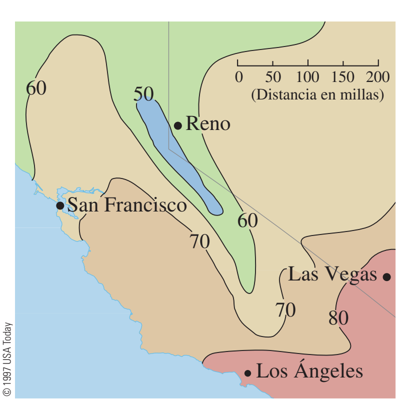


FIGURA 1

En el mapa del clima de la figura 1, se muestra un mapa de curvas de nivel de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 P.M., de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia si viaja hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viaja hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si quiere saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección? En esta sección se estudia un tipo de derivada, que se denomina *derivada direccional,* que permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

DERIVADAS DIRECCIONALES

Recuerde que si $z = f(x, y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

1

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios **i** y **j**.

Suponga que ahora quiere encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto considere la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y haga $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda en S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de **u** corta a S en una curva C (véase figura 3). La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de **u**.

FIGURA 2
Un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos \theta, \text{sen } \theta \rangle$

TEC Visual 14.6A incluye figuras animadas de la figura 3 al hacer girar **u** y, por lo tanto T.

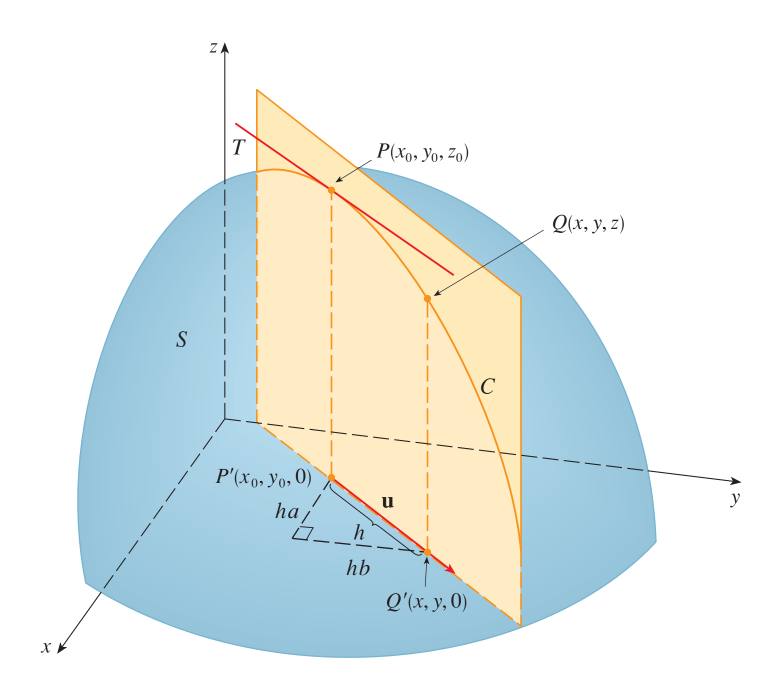


FIGURA 3

Si $Q(x, y, z)$ es otro punto en C y P', Q' son las proyecciones de P, Q en el plano xy, entonces el vector $\overrightarrow{P'Q'}$ es paralelo a $\mathbf{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

para un escalar h. Por lo tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si considera el límite cuando $h \to 0$, obtiene la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\mathbf{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$.

2 DEFINICIÓN La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si existe este límite

Al comparar la definición 2 con (1), observe que si $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{i}} f = f_x$ y si $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_{\mathbf{j}} f = f_y$. En otra palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.

EJEMPLO 1 Con ayuda del mapa del clima ilustrado en la figura 1 estime el valor de la derivada direccional de la función de la temperatura en Reno en la dirección sureste.

SOLUCIÓN El vector unitario dirigido hacia el sureste es $\mathbf{u} = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2}$, pero no es necesario recurrir a esta expresión. Inicie dibujando una recta que pase por Reno y que se dirija hacia el sureste (véase figura 4).

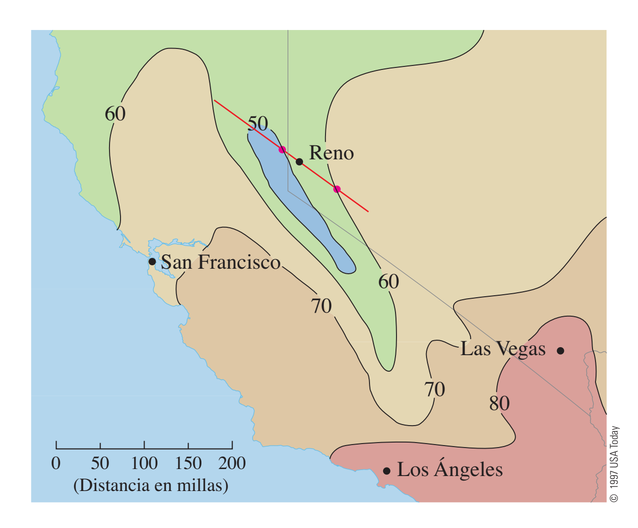


FIGURA 4

Se aproxima a la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} T$ por medio del promedio de la tasa de cambio de la temperatura entre los puntos donde la recta corta las isotermas $T = 50$ y

$T = 60$. La temperatura en el punto al sureste de Reno es $T = 60°F$ y la temperatura en el punto noroeste de Reno es $T = 50°F$. Al parecer, la distancia entre estos puntos es de casi 75 millas. De este modo, la razón de cambio de la temperatura en la dirección sureste es

$$D_{\mathbf{u}} T \approx \frac{60 - 50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13°\text{F/mi}$$ □

Cuando calcula la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general aplica el teorema siguiente.

3 TEOREMA Si f es una función diferenciable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

DEMOSTRACIÓN Si define una función g de una sola variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

entonces según la definición de una derivada

4
$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Por otro lado, puede escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Si ahora hace $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

5
$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$

Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b$$ □

Si el vector unitario $\mathbf{u}$ forma un ángulo θ con el eje positivo x, (como en la figura 2), entonces puede escribir $\mathbf{u} = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$ y así la fórmula del teorema 3 se transforma en

6
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta$$

EJEMPLO 2 Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\mathbf{u}$ es el vector unitario que se obtiene con el ángulo $\theta = \pi/6$. ¿Qué es $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$?

■ La derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(1, 2)$ del ejemplo 2 representa la razón de cambio de z en la dirección de **u**. Es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3 - 3xy + 4y^2$ y al plano vertical que pasa por $(1, 2, 0)$ en la dirección de **u** mostrada en la figura 5.

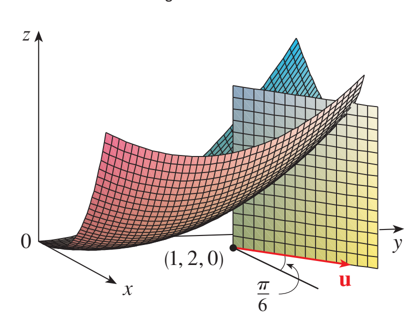


FIGURA 5

SOLUCIÓN Con la fórmula 6 se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \\ &= (3x^2 - 3y) \frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2} \qquad \square$$

VECTOR GRADIENTE

Observe que de acuerdo con el teorema 3, la derivada direccional se puede escribir como el producto punto de dos vectores:

7
$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)a + f_y(x, y)b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto se presenta no sólo al calcular las derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Por eso se le da un nombre especial, *gradiente de f*, y una notación especial (**grad** f o ∇f, que se lee "nabla f").

8 DEFINICIÓN Si f es una función de dos variables x y y, entonces el **gradiente** de f es la función vectorial ∇f definida por

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

EJEMPLO 3 Si $f(x, y) = \operatorname{sen} x + e^{xy}$, entonces

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle \cos x + ye^{xy}, xe^{xy} \rangle$$

y
$$\nabla f(0, 1) = \langle 2, 0 \rangle \qquad \square$$

Con esta notación para el vector gradiente, puede escribir la expresión (7) para la derivada direccional como

9
$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Esta ecuación expresa la derivada direccional en la dirección de **u** como la proyección escalar del vector gradiente en **u**.

■ El vector gradiente $\nabla f(2, -1)$ del ejemplo 4 se muestra en la figura 6 con punto inicial $(2, -1)$. También se muestra el vector $\mathbf{v}$ que da la dirección de la derivada direccional. Ambos vectores se suporponen en las curvas de nivel de la gráfica de f.

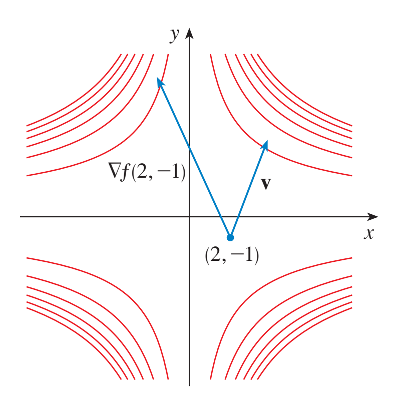


FIGURA 6

V EJEMPLO 4 Determine la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$.

SOLUCIÓN Primero calcule el vector gradiente en $(2, -1)$:

$$\nabla f(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 - 4)\,\mathbf{j}$$

$$\nabla f(2, -1) = -4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}$$

Note que $\mathbf{v}$ no es un vector unitario, pero como $|\mathbf{v}| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, según la ecuación 9

$$D_{\mathbf{u}} f(2, -1) = \nabla f(2, -1) \cdot \mathbf{u} = (-4\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\,\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\,\mathbf{j} \right)$$

$$= \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$ □

FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Para funciones de tres variables, puede definir las derivadas direccionales de una manera similar. Igualmente, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$.

10 DEFINICIÓN La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si existe este límite.

Si utiliza la notación de vectores, entonces puede escribir ambas definiciones, 2 y 10, de la derivada direccional en la forma compacta

11
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{h}$$

donde $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ si $n = 2$ y $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ si $n = 3$. Esto es razonable porque la ecuación vectorial de la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$ está dada por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$ (ecuación 12.5.1) y de este modo $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{u})$ representa el valor de f en un punto sobre esta recta.

Si $f(x, y, z)$ es derivable y $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, entonces utilice el mismo método que se aplicó en el teorema 3 para demostrar que

12 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = f_x(x, y, z)a + f_y(x, y, z)b + f_z(x, y, z)c$$

Por lo que toca a la función f de tres variables, el **vector gradiente**, denotado por ∇f o **grad** f, es

$$\nabla f(x, y, z) = \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle$$

es decir,

13 $$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Entonces, justo como en las funciones de dos variables, la fórmula 12 de la derivada direccional se puede volver a expresar como

14 $$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$$

EJEMPLO 5 Si $f(x, y, z) = x \operatorname{sen} yz$, (a) determine el gradiente de f y (b) encuentre la derivada direccional de f en $(1, 3, 0)$ en la dirección $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

SOLUCIÓN

(a) El gradiente de f es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \operatorname{sen} yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

(b) En $(1, 3, 0)$ tiene $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$. El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Por lo tanto, la ecuación 14 da

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 3, 0) &= \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u} \\ &= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right) \\ &= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

□

MAXIMIZACIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Suponga que tiene una función f de dos o tres variables y considera todas las derivadas direccionales posibles de f en un punto dado. Éstas dan las razones de cambio de f en todas las direcciones posibles. Cabe entonces, plantear las preguntas: ¿en cuál de estas direcciones f cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio? Las respuestas las proporciona el teorema siguiente.

TEC Visual 14.6B proporciona confirmación visual del teorema 15.

15 TEOREMA Suponga que f es una función diferenciable de dos o tres variables. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ es $|\nabla f(\mathbf{x})|$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{x})$.

DEMOSTRACIÓN Según la ecuación 9 o 14

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f| \cos \theta$$

donde θ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. El valor máximo de $\cos \theta$ es 1 y esto ocurre cuando $\theta = 0$. Por lo tanto, el valor máximo de $D_{\mathbf{u}} f$ es $|\nabla f|$ y se presenta cuando $\theta = 0$, es decir, cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f. □

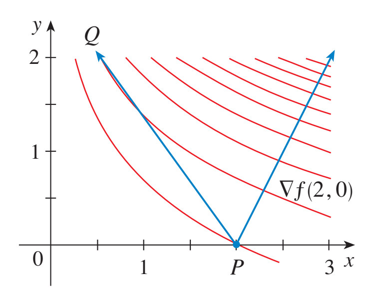


FIGURA 7

EJEMPLO 6

(a) Si $f(x, y) = xe^y$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(\frac{1}{2}, 2)$.

(b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es esta máxima razón de cambio?

SOLUCIÓN

(a) Primero calcule el vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

$$\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$$

■ En (2, 0) la función del ejemplo 6 se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. Observe que según la figura 7 este vector, al parecer, es perpendicular a la curva de nivel que pasa por (2, 0). En la figura 8 se ilustra la gráfica de f y el vector gradiente.

El vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ} = \langle -1.5, 2 \rangle$ es $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$, de modo que la razón de cambio de f en la dirección de P a Q es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle -\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle$$

$$= 1\left(-\tfrac{3}{5}\right) + 2\left(\tfrac{4}{5}\right) = 1$$

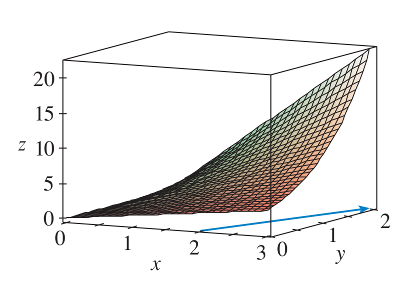


FIGURA 8

(b) De acuerdo con el teorema 15, f se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla f(2, 0) = \langle 1, 2 \rangle$. La razón de cambio máxima es

$$|\nabla f(2, 0)| = |\langle 1, 2 \rangle| = \sqrt{5}$$ □

EJEMPLO 7 Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) en el espacio está dado por $T(x, y, z) = 80/(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)$, donde T se mide en grados Celsius y x, y, z en metros. ¿En qué dirección se incrementa más rápido la temperatura en el punto $(1, 1, -2)$? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

SOLUCIÓN El gradiente de T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= -\frac{160x}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{i} - \frac{320y}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{j} - \frac{480z}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}\mathbf{k}$$

$$= \frac{160}{(1 + x^2 + 2y^2 + 3z^2)^2}(-x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} - 3z\,\mathbf{k})$$

En el punto ((1, 1, −2) el vector gradiente es

$$\nabla T(1, 1, -2) = \tfrac{160}{256}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = \tfrac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

De acuerdo con el teorema 15, la temperatura se incrementa más rápido en la dirección del vector gradiente $\nabla T(1, 1, -2) = \frac{5}{8}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$ o bien, en forma equivalente, en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ o del vector unitario $(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})/\sqrt{41}$. La máxima razón de incremento es la longitud del vector gradiente:

$$|\nabla T(1, 1, -2)| = \tfrac{5}{8}|-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| = \tfrac{5}{8}\sqrt{41}$$

Por lo tanto, la máxima razón de incremento de temperatura es $\frac{5}{8}\sqrt{41} \approx 4°\text{C/m}$. □

PLANOS TANGENTES A SUPERFICIES DE NIVEL

Suponga que S es una superficie cuya ecuación es $F(x, y, z) = k$, es decir, es una superficie de nivel de una función F de tres variables, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en S. Sea C una curva que queda en la superficie S y pasa por el punto P. Recuerde que según la sección 13.1, la curva C se describe mediante una función vectorial continua $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$. Sea t_0 el valor del parámetro que corresponde a P; es decir, $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. Puesto que C está en S, cualquier punto $(x(t), y(t), z(t))$ debe cumplir con la ecuación de S, es decir,

16
$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$

Si x, y y z son funciones diferenciables de t y F es también diferenciable, entonces se aplica la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación 16 como sigue:

17
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

Pero, como $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z\rangle$ y $\mathbf{r}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$, la ecuación 17 se puede escribir en función de un producto punto como

$$\nabla F \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

En particular, cuando $t = t_0$ tiene $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, de modo que

18
$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$$

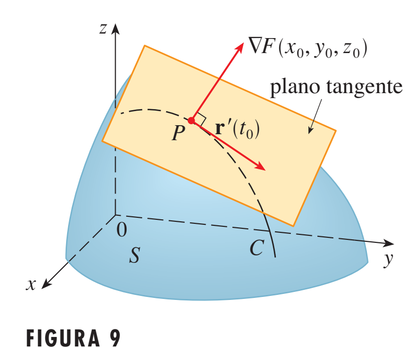


FIGURA 9

La ecuación 18 establece que *el vector gradiente en* P, $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, *es perpendicular al vector tangente* $\mathbf{r}'(t_0)$ *a cualquier curva* C *en* S *que pasa por* P (véase figura 9). Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, es por lo tanto natural definir el **plano tangente a la superficie de nivel** $F(x, y, z) = k$ **en** $P(x_0, y_0, z_0)$ cuando el plano que pasa por P y tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Si aplica la ecuación estándar de un plano (ecuación 12.5.7), escriba la ecuación de este plano tangente como

19
$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

La **recta normal** a S en P es la recta que pasa por P y es perpendicular al plano tangente. La dirección de la recta normal está definida por lo tanto por el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, y, de este modo, mediante la ecuación 12.5.3, sus ecuaciones simétricas son

20 $$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

En el caso especial en el cual la ecuación de una superficie S es de la forma $z = f(x, y)$; (es decir, S es la gráfica de una función f de dos variables), puede volver a escribir la ecuación como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

y considerar S como una superficie de nivel de F con $k = 0$. Entonces

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0)$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

de modo que la ecuación 19 se vuelve

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

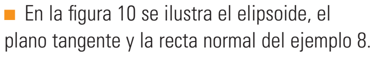
que equivale a la ecuación 14.4.2. Por lo tanto, la nueva definición más general de un plano tangente es congruente con la definición que se dio para el caso especial de la sección 14.4.

V EJEMPLO 8 Determine las ecuaciones del plano tangente y recta normal en el punto $(-2, 1, -3)$ al elipsoide

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$$

SOLUCIÓN El elipsoide es la superficie de nivel de la función siguiente con $k = 3$

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9}$$


En la figura 10 se ilustra el elipsoide, el plano tangente y la recta normal del ejemplo 8.

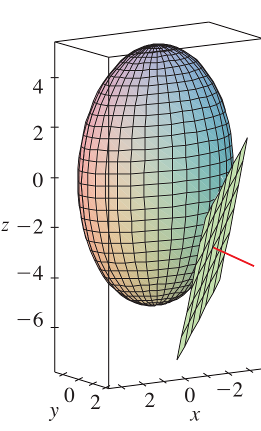


FIGURA 10

Por lo tanto,

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\tfrac{2}{3}$$

Entonces la ecuación 19 da la ecuación del plano tangente en $(-2, 1, -3)$ cuando

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \tfrac{2}{3}(z + 3) = 0$$

lo cual se simplifica a $3x - 6y + 2z + 18 = 0$.

Según la ecuación 20, las ecuaciones de la recta normal son

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}$$

□

IMPORTANCIA DEL VECTOR GRADIENTE

Enseguida se resumen los modos en los que el vector gradiente es importante. Primero se considera una función de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 15, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Además, también se sabe que $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P (refiérase a la figura 9). Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque, a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia. Así, parece razonable que si al desplazarse en dirección perpendicular, se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. Una vez más, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ señala la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de f siguen siendo constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (véase la figura 11).

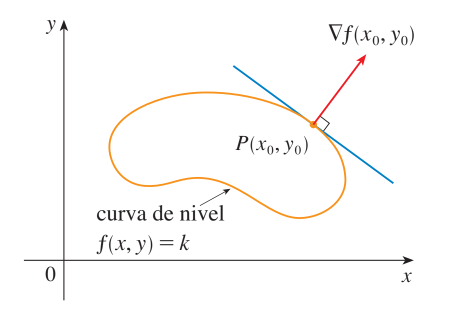


FIGURA 11

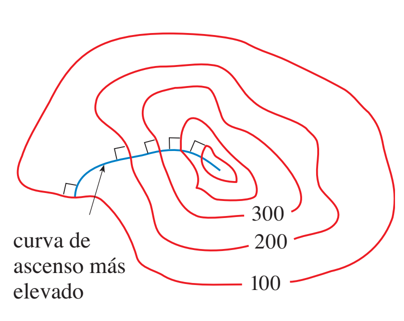


FIGURA 12

Si considera un mapa topográfico de una colina y representa mediante $f(x, y)$ la altura por arriba del nivel del mar de un punto de coordenadas (x, y), entonces se puede dibujar una curva de máxima pendiente como en la figura 12, haciéndola perpendicular a todas las curvas de nivel. Este fenómeno también se puede observar en la figura 12 de la sección 14.1, donde Lonesome Creek sigue una curva con el descenso más empinado.

Los sistemas algebraicos computacionales poseen comandos para dibujar vectores gradiente muestrales. Cada vector gradiente $\nabla f(a, b)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (a, b). En la figura 13 se ilustra una gráfica de éstas (que se denominan *campo del vector gradiente*), para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobrepuesta en un mapa de curvas de nivel de f. Como era de esperarse, los vectores gradiente señalan "pendiente arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.

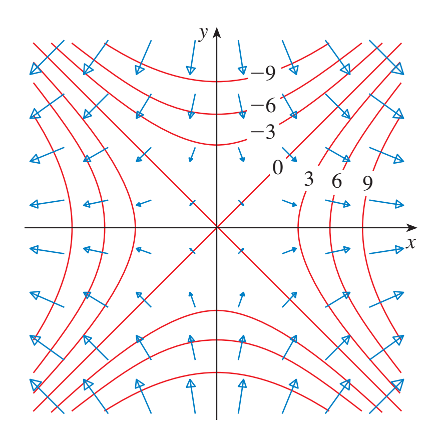
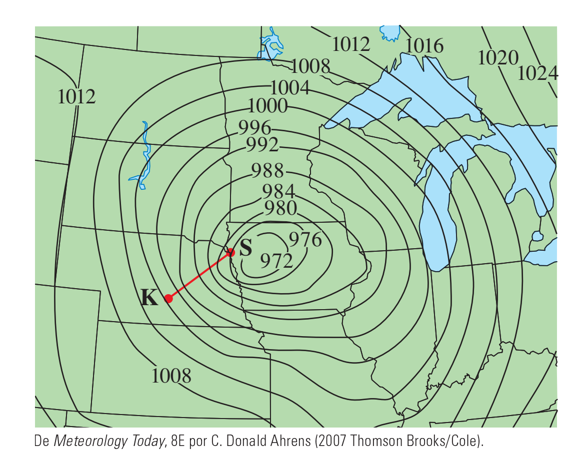


FIGURA 13

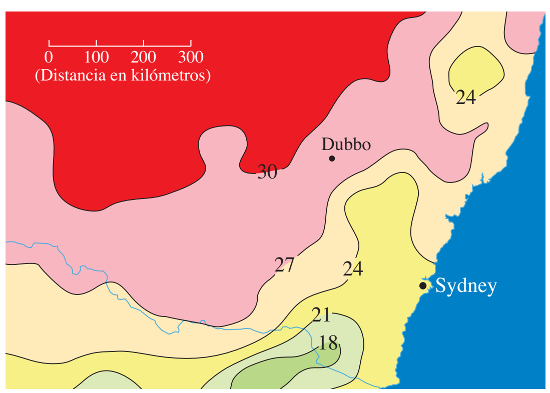
14.6 EJERCICIOS

1. Se muestran curvas de nivel para presión barométrica (en milibaras), para las 6:00 A.M. del 10 de noviembre de 1998. Una zona con una presión de sólo 972 mb se mueve la región noreste de Iowa. La distancia a lo largo de la línea roja de K (Kearney, Nebraska) a S (Sioux City, Iowa) es 300 km. Estime el valor de la derivada direccional de la función de presión en Kearney en la dirección de Sioux City. ¿Cuáles son las unidades de la derivada direccional?



De *Meteorology Today*, 8E por C. Donald Ahrens (2007 Thomson Brooks/Cole).

2. El mapa de contornos muestra el promedio de temperatura máxima para noviembre de 2004 (en °C). Estime el valor de la derivada direccional de esta función de temperatura en Dubbo, Nueva Gales del Sur, en la dirección de Sydney. ¿Cuáles son las unidades?



Copyright Commonwealth of Australia. Reproducido con permiso.

3. Una tabla de valores para el factor de enfriamiento $W = f(T, v)$ se proporciona en el ejercicio 3 de la página 888. Mediante esta tabla, estime el valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4–6 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección que indica el ángulo θ.

4. $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, $(2, 1)$, $\theta = \pi/4$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = x\,\text{sen}(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$

7–10
(a) Determine el gradiente de f.
(b) Evalúe el gradiente en el punto P.
(c) Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \text{sen}(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\right)$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{3}\left(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j}\right)$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11–17 Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

12. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

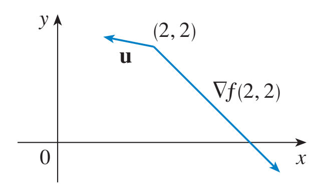
14. $g(r, s) = \tan^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$, $(1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

18. Use la figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ en $P(2, 8)$ en la dirección de $Q(5, 4)$.

20. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ en $P(1, -1, 3)$ en la dirección de $Q(2, 4, 5)$.

21–26 Determine la razón máxima de cambio de f en el punto dado y la dirección en la cual se presenta.

21. $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$

22. $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$, $(0, 0)$

23. $f(x, y) = \text{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(x, y, z) = \tan(x + 2y + 3z)$, $(-5, 1, 1)$

27. (a) Demuestre que una función diferenciable f disminuye más rápidamente en $\mathbf{x}$ en la dirección opuesta al vector gradiente, es decir, en la dirección de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Mediante el resultado anterior, determine la dirección en que la función $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decrece más rápido en el punto $(2, -3)$.

28. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ en el punto $(0, 2)$ tiene el valor de 1.

29. Encuentre todos los puntos en los cuales la dirección del cambio más rápido de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. En las cercanías de una boya, la profundidad de un lago en el punto de coordenadas (x, y) es $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, donde x, y y z se miden en metros. Un pescador en un bote pequeño parte del punto $(80, 60)$ y se dirige hacia la boya, la cual se ubica en $(0, 0)$. ¿El agua bajo el bote se hace más somera o más profunda cuando el pescador parte? Explique.

31. La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $(1, 2, 2)$ es 120°.
(a) Determine la razón de cambio de T en $(1, 2, 2)$ en la dirección hacia el punto $(2, 1, 3)$.
(b) Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está definido por un vector que señala hacia el origen.

32. La temperatura en un punto (x, y, z) está dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

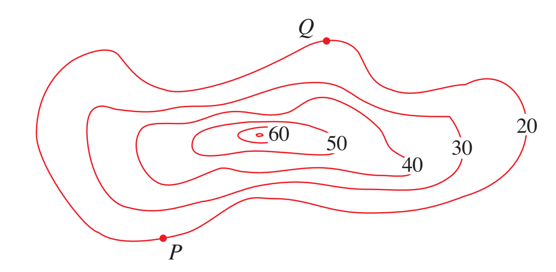
donde T se mide en °C y x, y, z en metros.
(a) Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2, -1, 2)$ en la dirección hacia el punto $(3, -3, 3)$.
(b) ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápido en P?
(c) Encuentre la razón máxima de incremento en P.

33. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está definido por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) ¿En qué dirección cambia V con mayor rapidez en P?
(c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

34. Suponga que escala una montaña cuya forma la da la ecuación $z = 1\,000 - 0.005 - 0.01y^2$, donde x, y, z se dan en metros, y usted está parado en un punto cuyas coordenadas son $(60, 40, 966)$. El eje de las x positivas va hacia el este y el eje de las y positivas va hacia el norte.
(a) Si camina directo hacia el sur, ¿empezará a ascender o descender?
(b) Si camina hacia el noroeste, ¿empezará a ascender o descender?
(c) ¿En qué dirección es la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección? ¿En qué ángulo por arriba de la horizontal la trayectoria inicia en esa dirección?

35. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ y $D(6, 15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

36. Para el siguiente mapa de curvas de nivel, dibuje el ascenso más empinado que inicie en P y en Q.

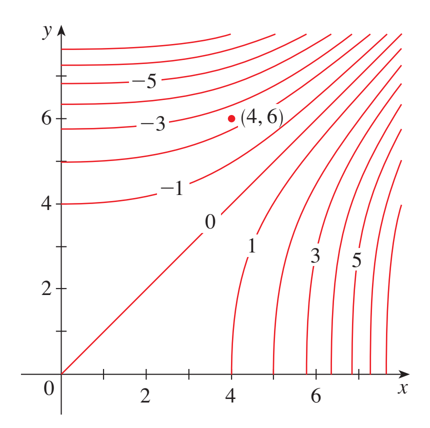


37. Demuestre que la operación de obtener el gradiente de una función tiene la propiedad dada. Suponga que u y v son funciones diferenciables de x y y y a, b son constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Trace el vector gradiente $\nabla f(4, 6)$ para la función f cuyas curvas de nivel se presentan. Explique cómo selecciona la dirección y la longitud de este vector.



39–44 Determine las ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

39. $2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$

40. $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$

41. $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$, $(2, 1, -1)$

42. $x - z = 4\arctan(yz)$, $(1 + \pi, 1, 1)$

43. $z + 1 = xe^y\cos z$, $(1, 0, 0)$

44. $yz = \ln(x + z)$, $(0, 0, 1)$

45–46 Mediante una computadora grafique la superficie, el plano tangente y la recta normal en la misma pantalla. Escoja cuidadosamente el dominio para evitar planos verticales extraños. Elija la perspectiva que le permita visualizar bien los tres objetos.

45. $xy + yz + zx = 3, \quad (1, 1, 1)$

46. $xyz = 6, \quad (1, 2, 3)$

---

47. Si $f(x, y) = xy$, determine el vector gradiente $\nabla f(3, 2)$ y con éste determine la tangente a la curva de nivel $f(x, y) = 6$ en el punto $(3, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

48. Si $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, determine el vector gradiente $\nabla g(1, -2)$ y con él determine la recta tangente a la curva de nivel $g(x, y) = 1$ en el punto $(1, 2)$. Dibuje la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente.

49. Demuestre que la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede escribir como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

50. Encuentre la ecuación del plano tangente al hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ en (x_0, y_0, z_0), y exprésela en forma similar a la del ejercicio 49.

51. Demuestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ en el punto (x_0, y_0, z_0) se puede expresar como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

52. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$?

53. Halle los puntos del hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$?

54. Demuestre que el elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ son tangentes entre sí en el punto $(1, 1, 2)$. (Esto quiere decir que tienen un plano tangente común en ese punto.)

55. Demuestre que todo plano que es tangente al cono $x^2 + y^2 = z^2$ pasa por el origen.

56. Demuestre que toda recta normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pasa por el centro de la esfera.

57. Demuestre que la suma de las intersecciones con el eje x, con el y y con el z de cualquier plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ es una constante.

58. Demuestre que las pirámides cortadas desde el primer octante por cualesquier planos tangentes a la superficie $xyz = 1$, en puntos del primer octante, deben tener todas el mismo volumen.

59. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el elipsoide de $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $(-1, 1, 2)$.

60. (a) El plano $y + z = 3$ al cortar al cilindro $x^2 + y^2 = 5$ forma una elipse. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta elipse en el punto $(1, 2, 1)$.
(b) Grafique el cilindro, el plano y la recta tangente en la misma pantalla.

61. (a) Se dice que dos superficies son **ortogonales** en un punto de intersección si las rectas normales son perpendiculares en ese punto. Demuestre que las superficies con ecuaciones $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en un punto P donde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ y $\nabla G \neq \mathbf{0}$ si y sólo si $F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$ en P.
(b) Con ayuda del inciso (a) demuestre que las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ son ortogonales en cada punto de intersección. ¿Se da cuenta por qué esto es cierto sin usar el cálculo?

62. (a) Demuestre que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y que las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen, pero que no existen las derivadas direccionales en todas las otras direcciones.
(b) Grafique f cerca del origen y comente cómo la gráfica confirma el inciso (a).

63. Suponga que las derivadas direccionales de $f(x, y)$ se conocen en un punto dado en dos direcciones no paralelas dadas por los vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Es posible determinar ∇f en ese punto? Si es así, ¿como lo haría?

64. Demuestre que si $z = f(x, y)$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, entonces

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugerencia*: aplique directamente la definición 14.4.7].

14.7 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Como se estableció en el capítulo 4, una de las principales aplicaciones de las derivadas ordinarias es hallar los valores máximos y mínimos. En esta sección aprednerá cómo usar las derivadas parciales para localizar los máximos y mínimos de funciones de dos variables. En particular, el ejemplo 6 trata de cómo maximizar el volumen de una caja sin tapa sin tener una cantidad fija de cartón para hacerla.

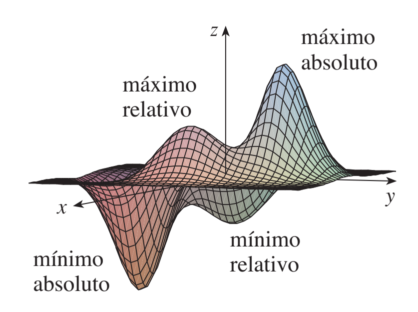


FIGURA 1

Observe las colinas y los valles en la gráfica de f mostrada en la figura 1. Hay dos puntos (a, b) donde f tiene un *máximo local*, es decir, donde es mayor $f(a, b)$ que los valores cercanos de $f(x, y)$. El mayor de estos valores es al *máximo absoluto*. Asimismo, f tiene dos mínimos locales, donde es más pequeña $f(a, b)$ que los valores cercanos. El menor de estos dos valores es el *mínimo absoluto*.

1 DEFINICIÓN Una función de dos variables tiene un **máximo relativo** en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b). [Esto quiere decir que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b).] El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo relativo**. Si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), entonces $f(a, b)$ es un **mínimo relativo** en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo relativo**.

Si las desigualdades de la definición 1 se cumplen para *todos* los puntos (x, y) en el dominio de f, entonces f tiene un **máximo absoluto**, o un **mínimo absoluto**, en (a, b).

■ Observe que la conclusión del teorema 2 se puede establecer con la notación de los vectores gradiente como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

2 TEOREMA Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden existen allí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = f(x, b)$. Si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b), entonces g tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en a, entonces $g'(a) = 0$ según el teorema de Fermat (véase teorema 4.1.4). Pero $g'(a) = f_x(a, b)$ (véase ecuación 14.3.1) de modo que $f_x(a, b) = 0$. De igual manera, al aplicar el teorema de Fermat a la función $G(y) = f(a, y)$, obtiene $f_y(a, b) = 0$. □

Si hace $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación de un plano tangente (ecuación 14.4.2), obtiene $z = z_0$. Por lo tanto, la interpretación geométrica del teorema 2 es que si la gráfica de f tiene un plano tangente en un máximo relativo o en un mínimo relativo, entonces el plano tangente debe ser horizontal.

Un punto (a, b) se llama **punto crítico** (o *punto estacionario*) de f si $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de estas derivadas parciales no existe. El teorema 2 dice que si f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b), entonces (a, b) es un punto crítico de f. Sin embargo, como en el cálculo de una variable, no todos los puntos críticos generan un máximo o un mínimo. En un punto crítico, una función podría tener un máximo relativo o un mínimo relativo o ninguno de los dos.

EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, de modo que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado, se encuentra que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Puesto que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, tiene que $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por lo tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo relativo, y, en efecto, es el mínimo absoluto de f. Se puede confirmar lo anterior en forma geométrica a partir de la gráfica de f, la cual es el paraboloide elíptico con vértice $(1, 3, 4)$ que se ilustra en la figura 2. □

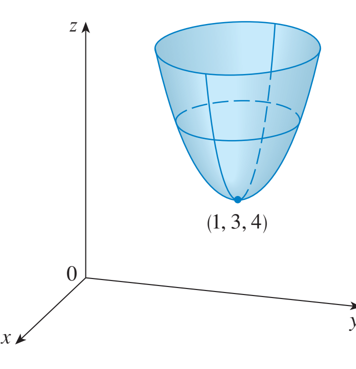


FIGURA 2
$z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

EJEMPLO 2 Calcule los valores extremos de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

SOLUCIÓN Puesto que $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Observe que para los puntos en el eje x, $y = 0$, de modo que $f(x, y) = -x^2 < 0$ (si $x \neq 0$). No obstante, para puntos en el eje y, $x = 0$, de modo que $f(x, y) = y^2 > 0$ (si $y \neq 0$). Por lo tanto, todo disco con centro en $(0, 0)$ contiene puntos donde f toma valores positivos, así como puntos donde f toma valores negativos. Por lo tanto, $f(0, 0) = 0$ no puede ser un valor extremo de f, de modo que f no tiene valor extremo. □

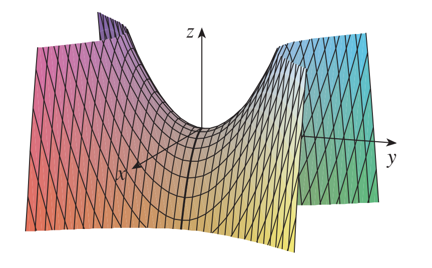
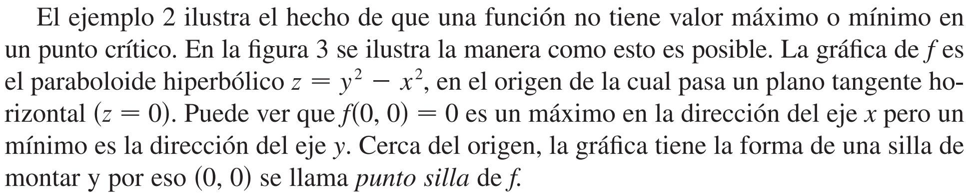


FIGURA 3
$z = y^2 - x^2$


El ejemplo 2 ilustra el hecho de que una función no tiene valor máximo o mínimo en un punto crítico. En la figura 3 se ilustra la manera como esto es posible. La gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, en el origen de la cual pasa un plano tangente horizontal ($z = 0$). Puede ver que $f(0, 0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x pero un mínimo es la dirección del eje y. Cerca del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar y por eso $(0, 0)$ se llama *punto silla* de f.

Es necesario ser capaz de determinar si la función tiene o no un valor extremo en un punto crítico. La prueba siguiente, que se demuestra al final de la sección, es análoga a la prueba de la segunda derivada para funciones de una variable.

3 **PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA** Suponga que las segundas derivadas parciales de f son continuas en un disco de centro (a, b), y suponga que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b)\,f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.

(b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.

(c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es ni un máximo relativo ni un mínimo relativo.

NOTA 1 En caso de (c) el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b).

NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo relativo o un mínimo relativo en (a, b), o bien, (a, b) podría ser un punto silla de f.

NOTA 3 Para recordar la fórmula de D es útil escribirla como un determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

V EJEMPLO 3 Determine los valores máximo y mínimo relativos y los puntos silla de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

SOLUCIÓN Primero localice los puntos críticos:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

Al igualar a estas derivadas parciales con 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^3 - y = 0 \qquad \text{y} \qquad y^3 - x = 0$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituya $y = x^3$ de la primera ecuación en la segunda, y obtiene

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

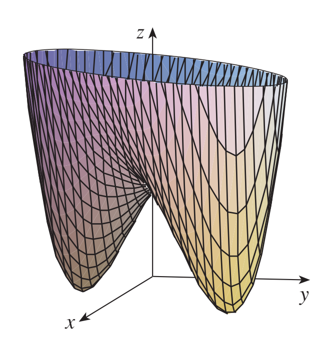


FIGURA 4
$z = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

de modo que hay tres raíces reales: $x = 0, 1, -1$. Los tres puntos críticos son $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

Luego calcule la segunda derivada parcial y $D(x, y)$:

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{xy} = -4 \qquad f_{yy} = 12y^2$$

$$D(x, y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Puesto que $D(0, 0) = -16 < 0$, se infiere del caso (c) de la prueba de la segunda derivada que el origen es un punto silla; es decir, f no tiene máximo relativo, ni mínimo relativo en $(0, 0)$. Como $D(1, 1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1, 1) = 12 > 0$, se ve que según el caso (a) de la prueba que $f(1, 1) = -1$ es un mínimo relativo. De igual manera, $D(-1, -1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$, de modo que $f(-1, -1) = -1$ es también un mínimo relativo.

La gráfica de f se ilustra en la figura 4. □

■ En la figura 5 se ilustra el mapa de contornos de la función f del ejemplo 3. Las curvas de nivel cerca de $(1, 1)$ y de $(-1, -1)$ son de forma oval e indican que a medida que se aleja de $(1, 1)$ o $(-1, -1)$ en cualquier dirección, los valores de f son crecientes. Las curvas de nivel cerca de $(0, 0)$, por otra parte, se asemejan a hipérbolas y dejan ver que cuando se aleja del origen (donde el valor de f es 1), los valores de f decrecen en algunas direcciones pero crecen en otras. Por lo tanto, el mapa de contornos sugiere la presencia de los mínimos y del punto de silla que se encontró en el ejemplo 3.

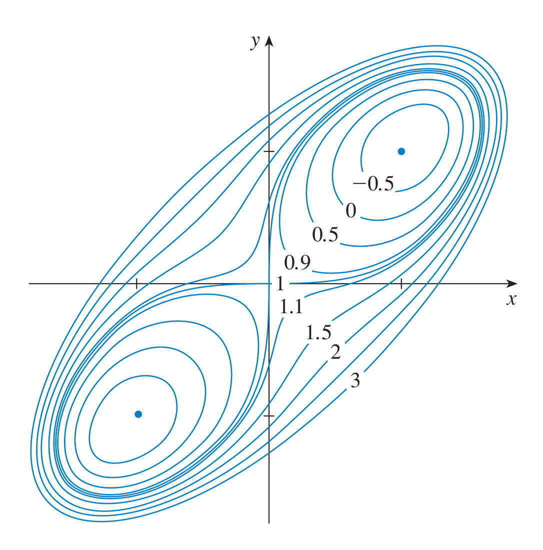


FIGURA 5

□

TEC Module 14.7 puede utilizar mapas de curvas de nivel para estimar las ubicaciones de los puntos críticos.

EJEMPLO 4 Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

Además, encuentre el punto más alto en la gráfica de f.

SOLUCIÓN Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = 20xy - 10x - 4x^3 \qquad f_y = 10x^2 - 8y - 8y^3$$

De modo que para determinar los puntos críticos, necesita resolver las ecuaciones

$$2x(10y - 5 - 2x^2) = 0 \tag{4}$$

$$5x^2 - 4y - 4y^3 = 0 \tag{5}$$

Según la ecuación 4

$$x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 10y - 5 - 2x^2 = 0$$

En el primer caso ($x = 0$), la ecuación 5 se vuelve $-4y(1 + y^2) = 0$, de modo que $y = 0$ y tiene el punto crítico $(0, 0)$.

En el segundo caso, ($10y - 5 - 2x^2 = 0$), obtiene

6 $$x^2 = 5y - 2.5$$

y al llevar esto a la ecuación 5, obtiene $25y - 12.5 - 4y - 4y^3 = 0$. Entonces, hay que resolver la ecuación cúbica

7 $$4y^3 - 21y + 12.5 = 0$$

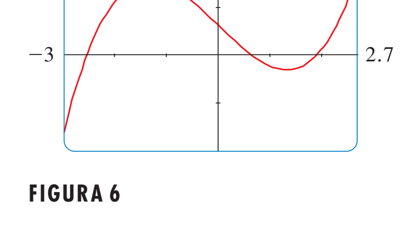


FIGURA 6

Si mediante una calculadora que grafique o una computadora obtenga la gráfica de la función

$$g(y) = 4y^3 - 21y + 12.5$$

como en la figura 6, la ecuación 7 tiene tres raíces reales. Al acercarse a los valores, se encuentran las raíces con cuatro cifras decimales:

$$y \approx -2.5452 \qquad y \approx 0.6468 \qquad y \approx 1.8984$$

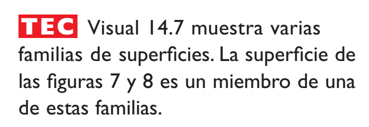
(Otra opción es aplicar el método de Newton o buscador de raíces para localizar estos valores.) De acuerdo con la ecuación 6, los valores de x correspondientes están definidos por

$$x = \pm\sqrt{5y - 2.5}$$

Si $y \approx -2.5452$, entonces x no tiene valores reales correspondientes. Si $y \approx 0.6468$, entonces $x \approx \pm 0.8567$. Si $y \approx 1.8984$, entonces $x \approx \pm 2.6442$. De este modo se tienen un total de cinco puntos críticos, los cuales se analizan en la tabla siguiente. Todas las cantidades están redondeadas a dos cifras decimales.

Punto crítico	Valor de f	f_{xx}	D	Conclusión
(0, 0)	0.00	−10.00	80.00	máximo relativo
(±2.64, 1.90)	8.50	−55.93	2488.71	máximo relativo
(±0.86, 0.65)	−1.48	−5.87	−187.64	punto silla

En las figuras 7 y 8 se dan dos vistas de la gráfica de f donde se ve que la superficie se abre hacia abajo. [Esto también se puede ver en la expresión de $f(x, y)$: los términos dominantes son $-x^4 - 2y^4$ cuando $|x|$ y $|y|$ son grandes.] Al comparar los valores de f en sus puntos máximos relativos, se ve que el valor máximo absoluto de f es $f(\pm 2.64, 1.90) \approx 8.50$. En otras palabras, los puntos más altos en la gráfica de f son $(\pm 2.64, 1.90, 8.50)$.



TEC Visual 14.7 muestra varias familias de superficies. La superficie de las figuras 7 y 8 es un miembro de una de estas familias.

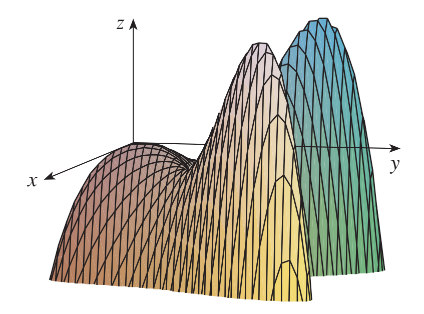


FIGURA 7

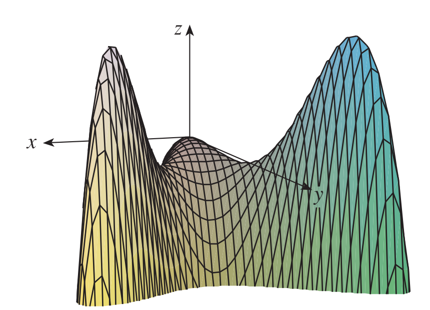


FIGURA 8

□

■ Los cinco puntos críticos de la función f del ejemplo 4 se muestran en color rojo en el mapa de curvas de nivel de f en la figura 9 .

FIGURA 9

V EJEMPLO 5 Calcule la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

SOLUCIÓN La distancia más corta desde cualquier punto (x, y, z) al punto $(1, 0, -2)$ es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2}$$

pero si (x, y, z) se encuentra en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces $z = 4 - x - 2y$ y se tiene $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2}$. Puede minimizar d maximizando la expresión más sencilla

$$d^2 = f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

Al resolver las ecuaciones

$$f_x = 2(x - 1) - 2(6 - x - 2y) = 4x + 4y - 14 = 0$$

$$f_y = 2y - 4(6 - x - 2y) = 4x + 10y - 24 = 0$$

Se encuentra que el único punto crítico es $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Puesto que $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = 4$ y $f_{yy} = 10$, se tiene $D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 24 > 0$ y $f_{xx} > 0$, de este modo, de acuerdo con la prueba de la segunda derivada f tiene un mínimo relativo en $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$. Intuitivamente, se desprende que este mínimo relativo es en realidad un mínimo absoluto porque debe haber un punto en el plano dado que está más cerca a $(1, 0, -2)$. Si $x = \frac{11}{6}$ y $y = \frac{5}{3}$, entonces

■ El ejemplo 5 se puede resolver también usando vectores. Compare con los métodos de la sección 12.5.

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

La distancia más corta desde $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$ es $\frac{5}{6}\sqrt{6}$. □

V EJEMPLO 6 Una caja rectangular sin tapa se fabrica con 12 m^2 de cartón. Calcule el volumen máximo de la caja.

SOLUCIÓN Sean x, y y z la longitud, el ancho y la altura de la caja en metros, según se muestra en la figura 10. Entonces, el volumen de la caja es

$$V = xyz$$

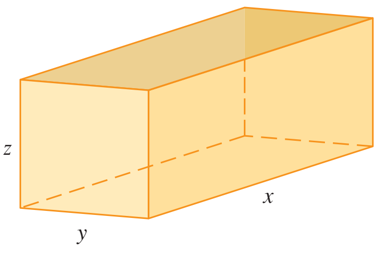


FIGURA 10

Exprese V como una función de sólo dos variables x y y recurriendo al hecho de que el área de los cuatro lados y el fondo de la caja es

$$2xz + 2yz + xy = 12$$

Al resolver la ecuación y determinar z, obtiene $z = (12 - xy)/[2(x + y)]$, de modo que la expresión para V se transforma en

$$V = xy \frac{12 - xy}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Calcule las derivadas parciales:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2(12 - 2xy - x^2)}{2(x + y)^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2(12 - 2xy - y^2)}{2(x + y)^2}$$

Si V es un máximo, entonces $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, pero $x = 0$ o $y = 0$ da $V = 0$, de modo que debe resolver las ecuaciones

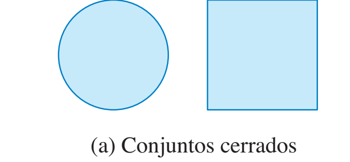
$$12 - 2xy - x^2 = 0 \qquad 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Esto significa que $x^2 = y^2$ y $x = y$. (Note que x y y deben ser ambas positivas en este problema.) Si hace $x = y$ en cualquier otra ecuación obtiene $12 - 3x^2 = 0$, lo cual da $x = 2$, $y = 2$ y $z = (12 - 2 \cdot 2)/[2(2 + 2)] = 1$.

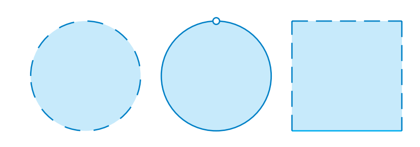
Podría utilizar la prueba de la segunda derivada para demostrar que esto da un máximo relativo de V, o bien, podría argumentar simplemente que por la naturaleza física de este problema debe haber un volumen máximo absoluto, lo cual tiene que ocurrir en un punto crítico de V, de modo que se debe presentar cuando $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$. Entonces $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, de modo que el volumen máximo de la caja es 4 m^3. □

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS

En el caso de una función f de una variable el teorema del valor extremo establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene un valor mínimo absoluto y un valor máximo absoluto. Según el método del intervalo cerrado de la sección 4.1, se calculan evaluando f no sólo en los números críticos, sino también en los extremos a y b.



(a) Conjuntos cerrados



(b) Conjuntos que no son cerrados

FIGURA 11

Hay una situación similar en el caso de las funciones de dos variables. Al igual que un intervalo cerrado contiene sus extremos, un **conjunto cerrado** en $\mathbb{R}^2$ es uno que contiene todos los puntos frontera. [Un punto frontera de D es un punto (a, b) tal que todo disco con centro (a, b) contiene puntos en D y también puntos que no están en D.] Por ejemplo, el disco

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

el cual consiste en todos los puntos en la circunferencia y dentro del círculo $x^2 + y^2 = 1$, es un conjunto cerrado porque contiene todos sus puntos límite, que son los puntos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Pero si aun un punto en la curva límite se omitiera, el conjunto no sería cerrado. Véase figura 11.

Un **conjunto acotado** en $\mathbb{R}^2$ es uno que está contenido dentro de algún disco. En otras palabras, su extensión es finita. Entonces, en términos de conjuntos cerrados y acotados, puede establecer la siguiente equivalencia del teorema del valor extremo en dos dimensiones.

8 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES Si f es continua en un conjunto D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

Para determinar los valores extremos que garantiza el teorema 8, note que, según el teorema 2, si f tiene un valor extremo en (x_1, y_1), entonces (x_1, y_1) es un punto crítico de f, o bien, un punto límite o frontera de D. Por lo tanto, obtiene la generalización siguiente del método del intervalo cerrado.

9 Para calcular los valores absolutos máximo y mínimo de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado D:

1. Se calculan los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Se determinan los valores extremos de f en la frontera de D.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 7 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ en el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUCIÓN Puesto que f es un polinomio, es continuo en el rectángulo cerrado y acotado D, de modo que el teorema 8 establece que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. De acuerdo con el paso 1 de (9), primero calcule los puntos críticos. Estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$.

En el paso 2 de (9) observe los valores de f en la frontera de D, el cual consiste en los cuatro segmentos rectilíneos L_1, L_2, L_3 y L_4 mostrados en la figura 12. En L_1 tiene $y = 0$ y

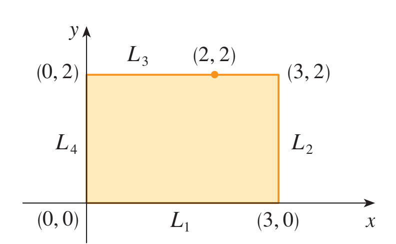


FIGURA 12

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Ésta es una función creciente de x, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$. En L_2 tiene $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Ésta es una función decreciente de y, de modo que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$. En L_3 tiene $y = 2$ y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Mediante estos métodos del capítulo 4, o bien, simplemente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, ve que el valor mínimo de esta función es $f(2, 2) = 0$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$. Para finalizar, en L_4 tiene $x = 0$ y

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Por lo tanto, en el límite, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

En el paso 3 de (9), compare estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico y concluya que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. En la figura 13 se ilustra la gráfica de f. □

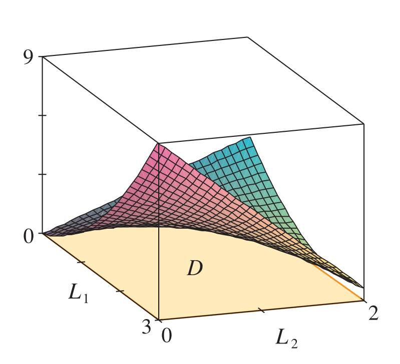


FIGURA 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y$

Esta sección concluye con la demostración de la primera parte de la prueba de la segunda derivada. La parte (b) se demuestra de manera similar.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3, PARTE (A) Calcule la derivada direccional de segundo orden de f en la dirección de $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$. La derivada de primer orden la proporciona el teorema 14.6.3:

$$D_{\mathbf{u}} f = f_x h + f_y k$$

Al aplicar este teorema una segunda vez, obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) &= \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

(según el teorema de Clairaut)

Si completa el cuadrado en esta expresión, el resultado es

10
$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Se sabe que $f_{xx}(a, b) > 0$ y $D(a, b) > 0$. Pero f_{xx} y $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ son funciones continuas, de modo que hay un disco B con centro (a, b) y radio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ y $D(x, y) > 0$ cuando (x, y) está en B. Por lo tanto, al examinar la ecuación 10, observe que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ cuando (x, y) está en B. Esto quiere decir que si C es la curva que se obtiene cuando se corta la gráfica de f con el plano vertical que pasa por $P(a, b, f(a, b))$ en la dirección de $\mathbf{u}$, entonces C es cóncava hacia arriba en un intervalo de longitud 2δ. Esto se cumple en la dirección de todo vector $\mathbf{u}$, de modo que si restringe que (x, y) quede en B, la gráfica de f queda por arriba de su plano tangente horizontal en P. Por consiguiente, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está en B. Esto demuestra que $f(a, b)$ es un mínimo relativo. □

14.7 EJERCICIOS

1. Suponga que (1, 1) es un punto crítico de una función f con segunda derivada continua. En cada caso, ¿qué puede decir con respecto a f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 1$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 3$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponga que (0, 2) es un punto crítico de una función g cuyas segundas derivadas son continuas, ¿qué puede decir con respecto a g?

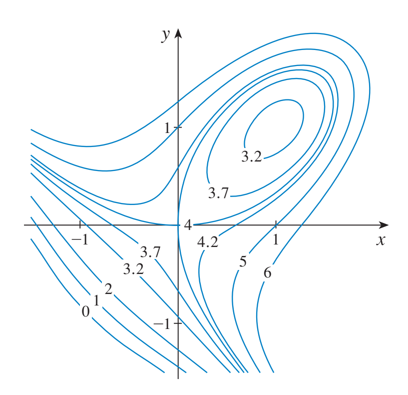
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 2$, $g_{yy}(0, 2) = -8$

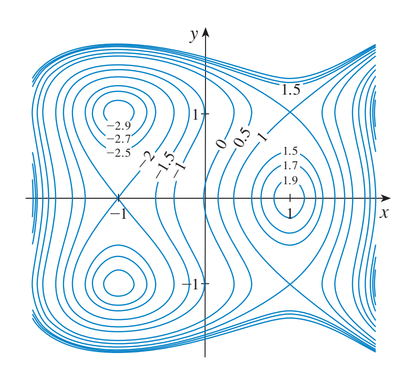
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 Use las curvas de nivel de la figura para pronosticar la ubicación de los puntos críticos de f y si f tiene un punto silla o un máximo relativo o un mínimo relativo en cada uno de esos puntos. Explique su razonamiento. Luego aplique la prueba de la segunda derivada para confirmar su pronóstico.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 Calcule los valores máximo y mínimo relativos, y punto o puntos sillas de la función. Si tiene programas para graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y desde otra perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

8. $f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2}$

9. $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Demuestre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tiene un número infinito de puntos críticos y que $D = 0$ en cada uno. A continuación demuestre que f tiene un mínimo local (y absoluto) en cada punto crítico.

20. Demuestre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tiene valores máximos en $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ y valores mínimos en $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Demuestre también que f tiene muchos otros puntos críticos y $D = 0$ en cada uno de ellos. ¿Cuál de ellos da lugar a valores máximos? ¿Y a valores mínimos? ¿Y a puntos de silla?

21–24 Utilice una gráfica, unas curvas de nivel o ambas para estimar los valores máximo y mínimo relativos y el punto o los puntos silla de la función. Luego mediante el cálculo encuentre los valores exactos.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi, \; 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4, \; 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25–28 Mediante una calculadora que grafique o una computadora como en el ejemplo 4 (o el método de Newton o buscador de raíces), determine los puntos críticos de f aproximados a cuatro cifras decimales. Luego clasifique los puntos críticos y determine los puntos más altos o más bajos en la gráfica.

25. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

26. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

27. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

28. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

29–36 Determine los valores máximos y mínimos absolutos de f en el conjunto D.

29. $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D es la región triangular cerrada con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 3)$.

30. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D es la región triangular cerrada con vértices $(1, 0)$, $(5, 0)$ y $(1, 4)$.

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, $D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, \; |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, \; y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D es el cuadrilátero cuyos vértices son $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ y $(-2, -2)$.

37. En funciones de una sola variable es imposible, en el caso de funciones continuas, tener dos máximos relativos y ningún mínimo relativo. Pero si las funciones son de dos variables, sí existen esas funciones. Demuestre que la función

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

tiene sólo dos puntos críticos, pero sí tiene máximos relativos en ambos puntos. Luego, mediante una computadora grafique con un dominio escogido con todo cuidado y ángulos que permitan ver cómo es posible esto.

38. Si una función de una variable es continua en un intervalo y tiene sólo un valor crítico, entonces un máximo relativo tiene que ser

un máximo absoluto. Pero esto no se cumple para funciones de dos variables. Demuestre que la función

$$f(x, y) = 3xe^{y} - x^{3} - e^{3y}$$

tiene un solo punto crítico, y que f tiene un máximo local allí que no es un máximo absoluto. Luego use una computadora para generar una gráfica con un dominio escogido cuidadosamente y perspectiva que permita ver cómo es esto posible.

39. Calcule la distancia más corta desde el punto $(2, 1, -1)$ al plano $x + y - z = 1$.

40. Determine el punto sobre el plano $x - y + z = 4$ que está más cerca al punto $(1, 2, 3)$.

41. Encuentre los puntos sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(4, 2, 0)$.

42. Determine los puntos en la superficie $y^2 = 9 + xz$ que están más cercanos al origen.

43. Encuentre tres números positivos cuya suma es 100 y cuyo producto es un máximo.

44. Encuentre tres números positivos cuya suma sea 12 y la suma de cuyos cuadrados es tan pequeña como sea posible.

45. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular inscrita en una esfera de radio r.

46. Encuentre las dimensiones de la caja con volumen 1 000 cm^3 que tiene mínima área superficial.

47. Calcule el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine las dimensiones de la caja rectangular con el mayor volumen si el área superficial total es de 64 cm^2.

49. Determine las dimensiones de una caja rectangular de volumen máximo tal que la suma del largo de las 12 aristas es una constante c.

50. La base de un acuario de volumen V está hecho de pizarra y los lados son de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más por unidad de área que el vidrio, determine las dimensiones del acuario que minimizan el costo de los materiales.

51. Una caja de cartón sin tapa debe tener 32 000 cm^3. Calcule las dimensiones que minimicen la cantidad de cartón utilizado.

52. Está en proceso de diseño un edificio rectangular para que minimice las pérdidas de calor. Los muros oriente y poniente pierden calor a razón de 10 unidades/m^2 por día, los muros del norte y del sur pierden 8 unidades/m^2 día, el piso pierde 1 unidad/m^2 por día, y el techo pierde 5 unidades/m^2 por día. Cada muro debe medir por lo menos 30 m de largo, la altura debe ser por lo menos de 4 m y el volumen debe ser exactamente 4 000 m^3.

(a) Determine y grafique el dominio de la pérdida de calor como una función del largo de los lados.

(b) Encuentre las dimensiones que minimizan la pérdida de calor. Compruebe tanto los puntos críticos como los puntos en el límite del dominio.

(c) ¿Podría diseñar un edificio con menos pérdida de calor si las restricciones de las longitudes de los muros se eliminaran?

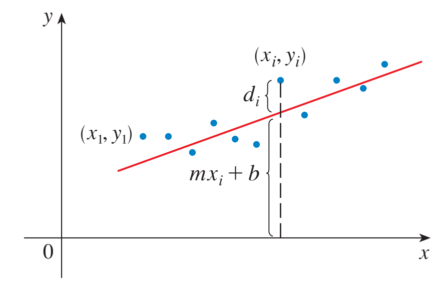
53. Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser L, ¿cuál es el volumen más grande posible?

54. Tres alelos (otras versiones de un gen), A, B y O determinan los cuatro tipos de sangre, a saber, A (AA o AO), B (BB o BO), O (OO) y AB. La ley de Hardy-Weinberg establece que la proporción de individuos de una población que llevan dos alelos diferentes es

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

donde p, q y r son las proporciones de A, B y O en la población. Aplique el hecho de que $p + q + r = 1$ para demostrar que P es cuanto mucho $\frac{2}{3}$.

55. Suponga que un científico tiene razón en creer que dos cantidades x y y están relacionadas linealmente, es decir, $y = mx + b$, por lo menos en modo aproximado, para algunos valores de m y b. El hombre de ciencia ejecuta un experimento y reúne información en la forma de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, y luego grafique los puntos. Los puntos no quedan exactamente sobre una recta, de modo que el científico quiere hallar las constantes m y b de modo que la recta $y = mx + b$ se "ajuste" a los puntos tanto como sea posible (véase la figura).



Sea $d_i = y_i - (mx_i + b)$ la desviación vertical del punto (x_i, y_i) a partir de la recta. El **método de los mínimos cuadrados** determina m y b de modo que se minimice $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, la suma de los cuadrados de estas desviaciones. Demuestre que, de acuerdo con este método, la recta del mejor ajuste se obtiene cuando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Por lo tanto, la recta se determina al resolver estas dos ecuaciones y determinar las dos incógnitas m y b (véase sección 1.2 en donde se encuentra una explicación y aplicaciones del método de los mínimos cuadrados).

56. Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y corta el volumen más pequeño en el primer octante.

PROYECTO DE APLICACIÓN

DISEÑO DE UN CAMIÓN DE VOLTEO

En este proyecto se estudia la forma y la construcción de un camión recolector de basura. Después se determinan las dimensiones de un contenedor de diseño similar que reduzca al mínimo el costo de construcción.

1. Primero ubique un camión para la basura en su localidad. Estúdielo con todo cuidado y describa todos los detalles de su construcción; además, determine su volumen. Haga un dibujo del contenedor.
2. Conserve la forma general y el método de construcción, y determine las dimensiones de un contenedor del mismo volumen que debería tener con objeto de minimizar el costo de construcción. Observe las suposiciones siguientes en su análisis:
   - Los lados, la parte posterior y el frente, deben ser de hojas de acero de calibre 12 (0.1046 pulg de espesor), que cuestan 0.70 dólares por pie cuadrado, que incluyen cualquier corte o dobleces necesarios.
   - La base se haría de hojas de acero de calibre 10 (0.1345 pulg de espesor), que cuestan 0.90 dólares por pie cuadrado.
   - Las tapas cuestan casi 50 dólares cada una, sin que importen sus dimensiones.
   - Las soldaduras cuestan alrededor de 0.18 dólares por pie de material y mano de obra combinados.

   Justifique cualquier otra suposición o simplificación planteada de los detalles de construcción.
3. Describa cómo algunas de sus suposiciones o simplificaciones afectarían el resultado final.
4. Si usted fuera contratado como asesor de esta investigación, ¿a qué conclusión llegaría? ¿Recomendaría modificar el diseño del camión? Si así fuera, explique cuáles serían los ahorros que se obtendrían.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

APROXIMACIONES CUADRÁTICAS Y PUNTOS CRÍTICOS

La aproximación del polinomio de Taylor para funciones de una variable que se trata en el capítulo 11, se puede generalizar a funciones de dos o más variables. En esta parte se estudian las aproximaciones cuadráticas para funciones de dos variables, y se usan para reflexionar sobre la prueba de la segunda derivada y clasificar los puntos críticos.

En la sección 14.4 se analiza la linealización de una función f de dos variables en un punto (a, b):

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Recuerde que la gráfica de L es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(a, b, f(a, b))$ y la aproximación lineal correspondiente es $f(x, y) \approx L(x, y)$. La linealización L también se denomina **polinomio de Taylor de primer grado** de f en (a, b).

1. Si f tiene derivadas parciales de segundo orden en (a, b), entonces el **polinomio de Taylor de segundo grado** de f en (a, b) es

$$Q(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$
$$+ \tfrac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \tfrac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2$$

   y la aproximación $f(x, y) \approx Q(x, y)$ se llama **aproximación cuadrática** de f en (a, b). Verifique que Q tiene las mismas derivadas parciales de primer y segundo orden que f en (a, b).

2. (a) Encuentre los polinomios de Taylor L y Q de primero y segundo grados de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ en (0, 0).
(b) Grafique f, L y Q. Explique qué tan bien L y Q se aproximan a f.

3. (a) Determine los polinomios de Taylor L y Q de primero y segundo grados para $f(x, y) = xe^y$ en (1, 0).
(b) Grafique los valores de L, Q y f en (0.9, 0.1).
(c) Grafique f, L y Q. Explique qué tan bien L y Q se aproximan a f.

4. En este problema se analiza el comportamiento del polinomio $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ sin usar la prueba de la segunda derivada, mediante la identificación de la gráfica como un paraboloide.
(a) Mediante el procedimiento de completar cuadrados, demuestre que si $a \neq 0$, entonces

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)y^2\right]$$

(b) Sea $D = 4ac - b^2$. Demuestre que si $D > 0$ y $a > 0$, entonces f posee un mínimo relativo en (0. 0).
(c) Demuestre que si $D > 0$ y $a < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (0, 0).
(d) Demuestre que si $D < 0$, entonces (0, 0) es un punto silla.

5. (a) Suponga que f es una función con derivadas parciales de segundo orden continuas tales que $f(0, 0) = 0$ y (0, 0) es un punto crítico de f. Escriba una expresión para el polinomio de Taylor, Q de segundo grado de f en (0, 0).
(b) ¿Qué puede concluir con respecto a Q según el problema 4?
(c) En vista de la aproximación cuadrática $f(x, y) \approx Q(x, y)$, ¿qué sugiere el inciso (b) en relación con f?

14.8 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En el ejemplo 6 de la sección 14.7 se obtuvo el valor máximo de la función de volumen $V = xyz$ sujeta a la restricción $2xz + 2yz + xy = 12$, la cual expresa la condición lateral de que el área superficial era de 12 m². En esta sección se trata el método de Lagrange para maximizar o minimizar una función general $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción, o condición lateral, de la forma $g(x, y, z) = k$.

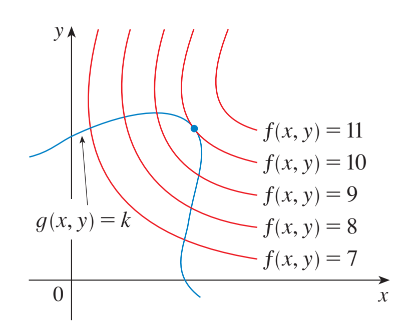


FIGURA 1

TEC Visual 14.8 presenta figuras animadas de la figura 1 tanto para curvas de nivel como superficies de nivel.

Es más fácil explicar el fundamento geométrico del método de Lagrange para funciones de dos variables. Para empezar, se calculan los valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a una restricción de la forma $g(x, y) = k$. Es decir, hay que buscar los valores extremos de $f(x, y)$ cuando el punto (x, y) está restringido a quedar en la curva de nivel $g(x, y) = k$. En la figura 1 se ilustra esta curva junto con varias curvas de nivel de f. Sus ecuaciones son $f(x, y) = c$, donde $c = 7, 8, 9, 10, 11$. Maximizar $f(x, y)$ sujeta a $g(x, y) = k$ es encontrar el valor más grande de c tal que la curva de nivel $f(x, y) = c$ corte a $g(x, y) = k$. Al parecer esto sucede cuando las curvas se tocan apenas según la figura 1, es decir, cuando tienen una recta tangente común. (De lo contrario, el valor de c podría incrementarse más.) Esto quiere decir que las rectas normales en el punto (x_0, y_0) donde se presentan son idénticas. De modo que los vectores gradiente son paralelos; es decir, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ para algún escalar λ.

Esta clase de razonamiento también se aplica al problema de encontrar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. Por consiguiente, el punto (x, y, z) está restringido a estar ubicado en la superficie de nivel S con ecuación $g(x, y, z) = k$. En lugar de las curvas de nivel de la figura 1, considere las superficies de nivel $f(x, y, z) = c$ y argumente que si el valor máximo de f es $f(x_0, y_0, z_0) = c$, entonces la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ es tangente a la superficie de nivel $g(x, y, z) = k$, y de este modo los vectores gradiente correspondientes son paralelos.

Este razonamiento intuitivo se puede precisar como sigue. Suponga que una función f posee un valor extremo en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en la superficie S y sea C una curva con ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ que está en S y pasa por P. Si t_0 es el valor del parámetro correspondiente al punto P, entonces $\mathbf{r}(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$. La función compuesta $h(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ representa los valores que f toma en la curva C. Puesto que f tiene un valor extremo en (x_0, y_0, z_0), se infiere que h presenta un valor extremo en t_0, de modo que $h'(t_0) = 0$. Pero si f es diferenciable, puede aplicarse la regla de la cadena para escribir

$$\begin{aligned} 0 &= h'(t_0) \\ &= f_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \end{aligned}$$

Esto demuestra que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ a toda curva C. Pero de acuerdo con la sección 14.6, el vector gradiente de g, $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$, también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$ para cada curva. Véase ecuación 14.6.18. Esto quiere decir que los vectores gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ deben ser paralelos. Por lo tanto, si $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, hay un número λ tal que

■ Los multiplicadores de Lagrange llevan este nombre en honor al matemático francoitaliano Joseph-Louis Lagrange (1736-1813). Véase en la página 283 un esbozo de su biografía.

1
$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

El número λ de la ecuación 1 se llama **multiplicador de Lagrange**. El procedimiento que se basa en la ecuación 1 es como sigue.

■ Al deducir el método de Lagrange se supone que $\nabla g \neq \mathbf{0}$. En cada uno de los ejemplos puede comprobar que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en todos los puntos donde $g(x, y, z) = k$.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE Para determinar los valores máximos y mínimos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$, [suponiendo que estos valores existan y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ se encuentre en la superficie $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos los valores de x, y, z y λ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

y
$$g(x, y, z) = k$$

(b) Evalúe f en todos los puntos (x, y, z) que resulten del paso (a). El más grande de estos valores es el valor máximo de f; el más pequeño es el valor mínimo de f.

Si escribe la ecuación vectorial $\nabla f = \lambda \nabla g$ en términos de sus componentes, entonces las ecuaciones en el paso (a) se transforman en

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad g(x, y, z) = k$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas x, y, z y λ, pero no es necesario determinar los valores explícitos de λ.

En el caso de funciones de dos variables, el método de los multiplicadores de Lagrange es similar al método que apenas se explicó. Para determinar los valores extremos de $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$, busque valores de x, y y λ tales que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = k$$

Esto equivale a resolver tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = k$$

En el primer ejemplo del método de Lagrange, se reconsidera el problema dado en el ejemplo 6 de la sección 14.7.

V EJEMPLO 1 Una caja rectangular sin tapa se hace con 12 m^2 de cartón. Calcule el volumen máximo de esta caja.

SOLUCIÓN Al igual que en el ejemplo 6 de la sección 14.7, sean x, y y z el largo, la anchura y la altura, respectivamente, de la caja medidos en metros. Bsuca maximizar

$$V = xyz$$

sujeta a la restricción

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, busca valores de x, y, z y λ tales que $\nabla V = \lambda \nabla g$ y $g(x, y, z) = 12$. De aquí se obtienen las ecuaciones

$$V_x = \lambda g_x \qquad V_y = \lambda g_y \qquad V_z = \lambda g_z \qquad 2xz + 2yz + xy = 12$$

las cuales se transforman en

$$yz = \lambda(2z + y) \tag{2}$$

$$xz = \lambda(2z + x) \tag{3}$$

$$xy = \lambda(2x + 2y) \tag{4}$$

$$2xz + 2yz + xy = 12 \tag{5}$$

No hay reglas generales para resolver sistemas de ecuaciones. Algunas veces se requiere ingenio. En el presente ejemplo, se ve que si multiplica (2) por x, (3) por y y (4) por z, entonces los primeros miembros de estas ecuaciones son idénticos. Al hacerlo tiene

■ Otro método para resolver el sistema de ecuaciones (2-5) es resolver cada una de las ecuaciones 2, 3 y 4 para encontrar el valor de λ, e igualar luego las expresiones resultantes.

$$xyz = \lambda(2xz + xy) \tag{6}$$

$$xyz = \lambda(2yz + xy) \tag{7}$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz) \tag{8}$$

Observe que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ significaría que $yz = xz = xy = 0$ de acuerdo con (2), (3) y (4) y esto contradice (5). Por lo tanto, según (6) y (7)

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

lo cual da $xz = yz$. Pero $z \neq 0$ (ya que $z = 0$ daría $V = 0$), de modo que $x = y$. De acuerdo con (7) y (8)

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

lo cual da $2xz = xy$ y de este modo, (como $x \neq 0$), $y = 2z$. Si hace $x = y = 2z$ en (5), obtiene

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Puesto que x, y y z son positivas, por lo tanto $z = 1$ de este modo $x = 2$ y $y = 2$ como antes. Esto concuerda con la respuesta de la sección 14.7. □

■ En términos geométricos, en el ejemplo 2 se pide determinar el punto más alto y el más bajo en la curva C de la figura 2, que está en el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y directamente arriba del círculo de restricción $x^2 + y^2 = 1$.

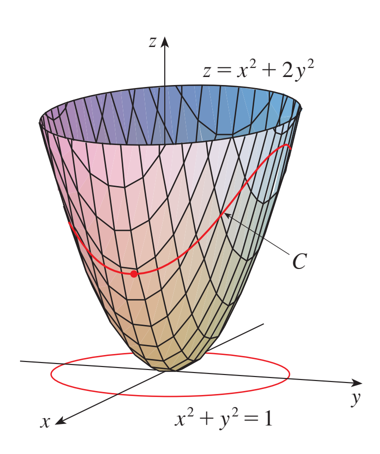


FIGURA 2

■ Los principios geométricos en los que se apoya el uso de los multiplicadores de Lagrange tratados en el ejemplo 2, se ilustran en la figura 3. Los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ corresponden a las curvas de nivel que tocan al círculo $x^2 + y^2 = 1$.

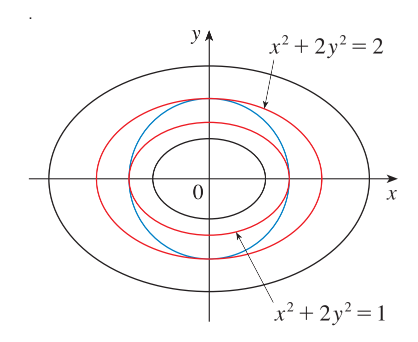


FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Se pide calcular los valores extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Mediante los multiplicadores de Lagrange, resuelva las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x, y) = 1$, lo que se puede escribir como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

o bien, como

9 $$2x = 2x\lambda$$

10 $$4y = 2y\lambda$$

11 $$x^2 + y^2 = 1$$

De acuerdo con (9) $x = 0$, o bien, $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces (11) da $y = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ de acuerdo con (10), de modo que (11) da $x = \pm 1$. Por lo tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Al evaluar f en estos cuatro puntos encuentra que

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Por lo tanto, el valor máximo de f en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(\pm 1, 0) = 1$. Al verificar en la figura 2, estos valores parecen razonables. □

EJEMPLO 3 Calcule los valores extremos $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el procedimiento en (14.7.9), compare los valores de f en los puntos críticos con valores en los puntos en el límite o frontera. Puesto que $f_x = 2x$ y $f_y = 4y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Compare el valor de f en ese punto con los valores extremos en la frontera del ejemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Por lo tanto, el valor máximo de f en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$. □

EJEMPLO 4 Determine los puntos en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cercanos al punto $(3, 1, -1)$ y más lejanos al mismo.

SOLUCIÓN La distancia desde un punto (x, y, z) al punto $(3, 1, -1)$ es

$$d = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2}$$

pero los pasos algebraicos son más sencillos si maximiza y minimiza el cuadrado de la distancia:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2$$

La restricción es que el punto (x, y, z) está en la esfera, es decir,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acuerdo con el método de los multiplicadores de Lagrange, se resuelve $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. el resultado es

$$2(x - 3) = 2x\lambda \tag{12}$$

$$2(y - 1) = 2y\lambda \tag{13}$$

$$2(z + 1) = 2z\lambda \tag{14}$$

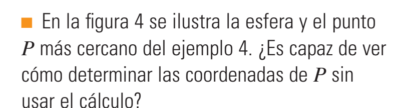
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \tag{15}$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones es determinar x, y y z en función de λ a partir de (12), (13) y (14), y luego sustituir estos valores en (15). Según (12) se tiene

$$x - 3 = x\lambda \qquad \text{o bien} \qquad x(1 - \lambda) = 3 \qquad \text{o bien} \qquad x = \frac{3}{1 - \lambda}$$

[Observe que $1 - \lambda \neq 0$ porque $\lambda = 1$ es imposible según (12).] De manera igual, con (13) y (14) se obtiene

$$y = \frac{1}{1 - \lambda} \qquad z = -\frac{1}{1 - \lambda}$$


En la figura 4 se ilustra la esfera y el punto P más cercano del ejemplo 4. ¿Es capaz de ver cómo determinar las coordenadas de P sin usar el cálculo?

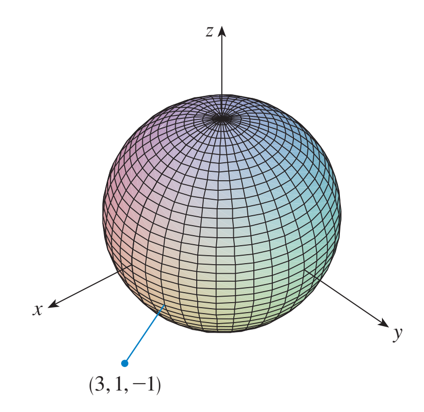


FIGURA 4

Por lo tanto, a partir de (15)

$$\frac{3^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{1^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1 - \lambda)^2} = 4$$

lo cual da $(1 - \lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, de modo que

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ proporcionan entonces los puntos correspondientes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Es fácil ver que f tiene un valor más pequeño en el primero de estos puntos, de modo que el punto más cercano es $\left(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}\right)$ y el más lejano es $\left(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}\right)$. □

DOS RESTRICCIONES

$h = c$ ∇g ∇f C P ∇h $g = k$

FIGURA 5

Suponga que ahora desea calcular los valores máximo y mínimo de una función $f(x, y, z)$ sujeta a dos restricciones (condiciones colaterales) de la forma $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$. Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que está buscando los valores extremos de f cuando (x, y, z) está restringida a quedar en la curva de intersección C de las superficies de nivel $g(x, y, z) = k$ y $h(x, y, z) = c$ (véase figura 5). Suponga que f tiene ese valor extremo en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$. Sabe que, de acuerdo al inicio de esta sección, ∇f es ortogonal a C. Pero también sabe que ∇g es ortogonal a $g(x, y, z) = k$ y ∇h es ortogonal a $h(x, y, z) = c$, de modo que ∇g y ∇h son ambos ortogonales a C. Esto quiere decir que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es el plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ y $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. (Se supone que estos vectores de gradiente no son cero y

no son paralelos.) Entonces, hay números λ y μ, (llamados multiplicadores de Lagrange), tales que

16 $$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

En este caso, el método de Lagrange es para determinar valores extremos resolviendo cinco ecuaciones con cinco incógnitas x, y, z, λ y μ. Estas ecuaciones se obtienen escribiendo la ecuación 16 en función de sus componentes y usando las ecuaciones de restricción:

$$f_x = \lambda g_x + \mu h_x$$

$$f_y = \lambda g_y + \mu h_y$$

$$f_z = \lambda g_z + \mu h_z$$

$$g(x, y, z) = k$$

$$h(x, y, z) = c$$

■ Al cortar el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ el plano $x - y + z = 1$ se forma una elipse (figura 6). En el ejemplo 5 se pregunta el valor máximo de f cuando (x, y, z) está restringido a ubicarse en la elipse.

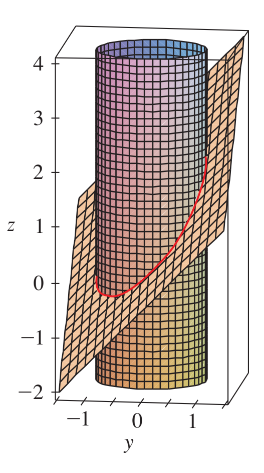


FIGURA 6

V EJEMPLO 5 Determine el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ en la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Maximice la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ y $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. La condición de Lagrange es $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que resulva las ecuaciones

17 $$1 = \lambda + 2x\mu$$

18 $$2 = -\lambda + 2y\mu$$

19 $$3 = \lambda$$

20 $$x - y + z = 1$$

21 $$x^2 + y^2 = 1$$

Al hacer $\lambda = 3$ [de acuerdo con (19)] en (17), obtiene $2x\mu = -2$, de modo que $x = -1/\mu$. De manera similar (18) da $y = 5/(2\mu)$. Al sustituir en (21) tiene

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

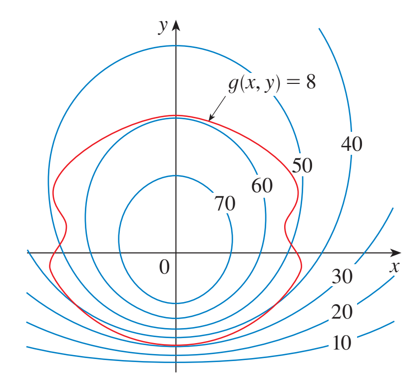
y entonces $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Luego, $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, y, de acuerdo con (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Los valores correspondientes de f son

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Por lo tanto, el valor máximo de f en la curva dada es $3 + \sqrt{29}$. □

14.8 EJERCICIOS

1. Se ilustran un mapa de curvas de nivel de f y una curva cuya ecuación es $g(x, y) = 8$. Estime los valores máximos y mínimos de f sujeta a la restricción $g(x, y) = 8$. Explique su razonamiento.



2. (a) Mediante una calculadora o una computadora para graficar, grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. En la misma pantalla, trace varias curvas de la forma $x^2 + y = c$ hasta que encuentre dos que justamente toquen la circunferencia. ¿Cuál es la importancia de estos valores de c para estas dos curvas?
(b) Mediante los multiplicadores de Lagrange, determine los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x^2 + y$ sometidos a la restricción $x^2 + y^2 = 1$. Compare sus respuestas con las del inciso (a).

3–17 Mediante multiplicadores de Lagrange, encuentre los valores máximo y mínimo de la función sujeta a la restricción o las restricciones dadas.

3. $f(x, y) = x^2 - y^2; \quad xy = 1$
4. $f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$
5. $f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$
6. $f(x, y) = e^{xy}; \; x^3 + y^3 = 16$
7. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$
8. $f(x, y, z) = 8x - 4z; \quad x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$
9. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$
11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$
12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$
13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t; \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;$
$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$
15. $f(x, y, z) = x + 2y; \quad x + y + z = 1, \quad y^2 + z^2 = 4$
16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z;$
$x + y - z = 0, \quad x^2 + 2z^2 = 1$
17. $f(x, y, z) = yz + xy; \quad xy = 1, \quad y^2 + z^2 = 1$

18–19 Calcule los valores extremos de f en la región descrita por la desigualdad.

18. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$
19. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

20. Considere el problema de maximizar la función $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeta a la restricción $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Intente usando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.
(b) ¿$f(25, 0)$ da un mayor valor que el de la parte (a)?
(c) Resuelva el problema al graficar la ecuación de restricción y varias curvas de nivel de f.
(d) Explique por qué el método de multiplicadores de Lagrange no resuelve el problema.
(e) ¿Cuál es la importancia de $f(9, 4)$?

21. Considere el problema de minimizar la función $f(x, y) = x$ en la curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (en forma de pera).
(a) Intente usando multiplicadores de Lagrange para resolver el problema.
(b) Demuestre que el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ pero la condición de Lagrange $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ no es satisfecha por ningún valor de λ.
(c) Explique por qué los multiplicadores de Lagrange no encuentran el valor mínimo en este caso.

CAS 22. (a) Si su sistema algebraico computacional traza curvas implícitamente definidas, con ayuda de éste, estime mediante métodos gráficos los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeta a la restricción $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
(b) Resuelva el problema del inciso (a) con la ayuda de los multiplicadores de Lagrange. Utilice su Sistema Algebráico Computacional para resolver numéricamente las ecuaciones. Compare sus respuestas con las del inciso (a).

23. La producción total P de un cierto producto depende de la cantidad L de mano de obra utilizada y de la cantidad K de inversión de capital. En las secciones 14.1 y 14.3, analizó cómo el modelo de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ se infiere de ciertas suposiciones económicas, donde b y α son constantes positivas y $\alpha < 1$. Si el costo de una unidad de mano de obra es m y el costo de una unidad de capital es n, y la compañía puede gastar sólo p dólares como su presupuesto total, la maximización de la producción P está sujeta a la restricción $mL + nK = p$. Demuestre que la producción máxima se presenta cuando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{y} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

24. Refiérase al ejercicio 23. Ahora suponga que la producción está fija en $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, donde Q es una constante. ¿Qué valores de L y K minimizan la función del costo $C(L, K) = mL + nK$?

25 Mediante los multiplicadores de Lagrange, demuestre que el rectángulo con área máxima que tiene un perímetro p es un cuadrado.

26. Mediante los multiplicadores de Lagrange, demuestre que el triángulo con área máxima que tiene un perímetro p es un triángulo equilátero. [*Sugerencia*: aplique la fórmula de Herón para el área: $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$, donde $s = p/2$ y x, y, z son las longitudes de los lados.]

27–39 Utilice los multiplicadores de Lagrange para obtener otra solución para el ejercicio indicado de la sección 14.7.

27. Ejercicio 39

28. Ejercicio 40

29. Ejercicio 41

30. Ejercicio 42

31. Ejercicio 43

32. Ejercicio 44

33. Ejercicio 45

34. Ejercicio 46

35 Ejercicio 47

36. Ejercicio 48

37. Ejercicio 49

38. Ejercicio 50

39. Ejercicio 51

---

40. Determine los volúmenes máximo y mínimo de una caja rectangular cuya área superficial es de 1 500 cm^2 y cuyo largo total es de 200 cm.

41. El plano $x + y + 2z = 2$ al cortar el paraboloide $z = x^2 + y^2$ forma una elipse. Calcule los puntos de la elipse que son los más cercanos y los más lejanos al origen.

42. El plano $4x - 3y + 8z = 5$ al cortar el cono $z^2 = x^2 + y^2$ forma una elipse.
(a) Grafique el cono, el plano y la elipse.
(b) Mediante multiplicadores de Lagrange, encuentre el punto más alto y el más bajo sobre la elipse.

CAS **43–44** Calcule los valores máximo y mínimo de f sujeta a la restricción dada. Utilice un sistema algebraico computacional para resolver el sistema de ecuaciones que se origina al usar multiplicadores de Lagrange. Si su sistema algebraico computacional determina sólo una solución, podría requerir más comandos.

43. $f(x, y, z) = ye^{x-z}$; $\quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36,\ xy + yz = 1$

44. $f(x, y, z) = x + y + z$; $\quad x^2 - y^2 = z,\ x^2 + z^2 = 4$

---

45 (a) Determine el valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos y $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, donde c es una constante.

(b) Deduzca a partir del inciso (a) que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números positivos, entonces

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Esta desigualdad establece que la media geométrica de n números no es mayor que la media aritmética de los números. ¿En qué condiciones las dos medias son iguales?

46. (a) Maximice $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeta a las restricciones $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ y $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Plantee

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \quad \text{y} \quad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para demostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

para números cualesquiera $a_1, \ldots, an$ y $b_1, \ldots, bn$. Esta desigualdad se conoce con el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarz.

PROYECTO DE APLICACIÓN

CIENCIA PARA COHETES

Muchos cohetes, como el *Pegasus XL*, que en la actualidad se usa para lanzar satélites, y el *Saturn V*, que fue el que ayudó a llevar al hombre a la Luna, están diseñados para usar tres etapas en su ascenso al espacio. Una primera etapa impulsa inicialmente al cohete hasta que se agota el combustible, momento en que la etapa se desprende para reducir la masa del cohete. Las etapas segunda y tercera funcionan de manera similar, y su objetivo es colocar a la tripulación y al equipo del cohete en órbita alrededor de la Tierra. (Con este diseño se requieren por lo menos dos etapas con el fin de alcanzar las velocidades necesarias, pero el uso de tres etapas ha demostrado ser una buena opción que combina el costo y el rendimiento.) La meta en este caso es determinar las masas individuales de las tres etapas que se tienen que diseñar para minimizar la masa total del cohete para que pueda alcanzar la velocidad deseada.







Cortesía de Orbital Sciences Corporation

En el caso de un cohete de una sola etapa que consume combustible a un ritmo constante, el cambio de velocidad que resulta de la aceleración del cohete ha sido modelado por

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1 - S)M_r}{P + M_r}\right)$$

donde M_r es la masa del motor del cohete que incluye el combustible inicial, P es la masa de la tripulación y el equipo, S es un *factor estructural* determinado por el diseño del cohete. (Específicamente, es la razón de la masa del vehículo del cohete sin combustible a la masa total del cohete con tripulación y equipo.) Por último, c es la velocidad (constante) de escape con respecto al cohete.

Considere un cohete de tres etapas y una carga útil de masa A. Suponga que las fuerzas exteriores son insignificantes y que tanto c como S son constantes en cada etapa. Si M_i es la masa de la i-ésima etapa, se puede considerar inicialmente que el motor del cohete tendrá una masa M_1 y su carga útil, es decir, tripulación y equipo, tendrá una masa $M_2 + M_3 + A$; la segunda y la tercera etapas se pueden manejar de manera similar.

1. Demuestre que la velocidad alcanzada después de que las tres etapas se han desprendido, está definida por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Se desea minimizar la masa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ del motor del cohete sujeta a la restricción de que se alcanza la velocidad deseada v_f del problema 1. El método de los multiplicadores de Lagrange es apropiado aquí, pero difícil de poner en marcha usando las expresiones actuales. Para simplificar, se definen variables N_i de modo que las ecuaciones de la restricción se podrían expresar como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Puesto que M es difícil de expresar en función de las N_i, puede usar una función más sencilla que será minimizada en el mismo lugar que M. Demuestre que

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1 - S)N_2}{1 - SN_2}$$

$$\frac{M_3 + A}{A} = \frac{(1 - S)N_3}{1 - SN_3}$$

y concluya que

$$\frac{M + A}{A} = \frac{(1 - S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1 - SN_1)(1 - SN_2)(1 - SN_3)}$$

3. Compruebe que $\ln((M + A)/A)$ es minimizada en el mismo lugar que M; mediante multiplicadores de Lagrange y los resultados del problema 2 determine expresiones para los valores de N_i, donde al mínimo ocurre sujeto a la restricción $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. [*Sugerencia*: aplique las propiedades de los logaritmos para ayudar a simplificar las expresiones.]

4. Plantee una expresión para el valor mínimo de M en función de v_f.

5. Si quiere poner en órbita un cohete de tres etapas a 100 millas sobre la superficie de la Tierra, se requiere una velocidad final de alrededor de 17 500 millas/hora. Suponga que cada etapa se construye con un factor estructural $S = 0.2$ y una rapidez de escape de $c = 6\,000$ millas/hora.

(a) Encuentre la masa mínima total M de los motores del cohete como una función de A.

(b) Determine la masa de cada una de las etapas en función de A. (¡No tienen las mismas dimensiones!)

6. El mismo cohete requeriría una velocidad final de casi 24 700 millas/hora, con objeto de librarse de la gravedad de la Tierra. Encuentre la masa de cada una de las etapas que minimizaría la masa total de los motores del cohete y que permita que el cohete impulse una sonda de 500 lb hacia el espacio.

PROYECTO DE APLICACIÓN

OPTIMIZACIÓN DE TURBINAS HIDRÁULICAS

La Great Northern Paper Company de Millinocket, Maine, opera una estación hidroeléctrica generadora de energía eléctrica en el río Penobscot. El agua es enviada por tubería desde una presa hasta la estación generadora. El caudal del agua es variable y depende de las condiciones externas.

La estación generadora de energía eléctrica cuenta con tres turbinas hidroeléctricas distintas, cada una con una función de potencia (única) y conocida que da la cantidad de energía eléctrica generada como una función del flujo de agua que llega a la turbina. El agua que entra se puede repartir en volúmenes distintos para cada turbina, de modo que el objetivo es determinar de qué manera distribuir el agua entre las turbinas para lograr la producción máxima total de energía con cualquier caudal.

Al aplicar la evidencia experimental y la *ecuación de Bernoulli,* se determinaron los siguientes modelos cuadráticos para la salida de energía eléctrica de cada turbina, de acuerdo con los caudales admisibles de operación:

$$KW_1 = (-18.89 + 0.1277Q_1 - 4.08 \cdot 10^{-5}Q_1^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_2 = (-24.51 + 0.1358Q_2 - 4.69 \cdot 10^{-5}Q_2^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$KW_3 = (-27.02 + 0.1380Q_3 - 3.84 \cdot 10^{-5}Q_3^2)(170 - 1.6 \cdot 10^{-6}Q_T^2)$$

$$250 \leqslant Q_1 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_2 \leqslant 1110, \quad 250 \leqslant Q_3 \leqslant 1225$$

donde

Q_i = flujo por la turbina i en pies cúbicos por segundo

KW_i = energía eléctrica generada por turbina i en kilowatts.

Q_T = flujo total por la estación en pies cúbicos por segundo.

1. Si las tres turbinas se utilizan, se desea determinar el flujo Q_i para cada turbina que generará la producción máxima total de energía. Las restricciones son que los flujos deben sumar el flujo total que entra y se deben observar las restricciones del dominio dadas. En consecuencia, use multiplicadores de Lagrange para hallar los valores para los flujos individuales (como funciones de Q_T), que maximicen la producción total de energía $KW_1 + KW_2 + KW_3$ sujeta a las restricciones $Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_T$ y a las restricciones del dominio en cada Q_i.
2. ¿Para qué valores de Q_T su resultado es válido?
3. En el caso de un flujo que entra de 2 500 pies^3/s, determine la distribución para las turbinas y compruebe que sus resultados son en efecto un máximo (tratando algunas distribuciones cercanas.)
4. Hasta ahora ha supuesto que las tres turbinas están funcionando. ¿Es posible en algunas situaciones que se pueda producir más energía eléctrica usando sólo una turbina? Haga una gráfica de las tres funciones de potencia, y con ayuda de ellas decida si un flujo que entra de 1 000 pies^3/s se debe distribuir entre las tres turbinas, o se debe guiar a sólo una. (Si usted encuentra que sólo una de las turbinas se debe usar, ¿cuál sería?) ¿Y si el flujo es de sólo 600 pies^3/s?
5. Tal vez para algunos niveles de flujo sería ventajoso usar dos turbinas. Si el flujo es de 1 500 pies^3/s, ¿cuál par de turbinas recomendaría usar? Mediante los multiplicadores de Lagrange, determine cómo debe distribuir el flujo entre las dos turbinas para maximizar la energía producida. En relación con este flujo, ¿el uso de las dos turbinas es más eficaz que usar las tres turbinas?
6. Si el flujo que entra es de 3 400 pies^3/s, ¿qué le recomendaría a la compañía?

14 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función de dos variables?
   (b) Explique tres métodos para representar una función de dos variables.
2. ¿Qué es una función de tres variables? ¿Cómo puede representar tal función?
3. ¿Qué significa la expresión siguiente?

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

   ¿Cómo puede demostrar que dicho límite no existe?
4. (a) ¿Qué significa decir que f es continua en (a, b)?
   (b) Si f es continua en $\mathbb{R}^2$, ¿qué puede decir con respecto a su gráfica?
5. (a) Escriba expresiones para las derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ como límites.
   (b) ¿Cuál es su interpretación geométrica de $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$? ¿Cuál es su interpretación como razones de cambio?
   (c) Si $f(x, y)$ está definida por una fórmula, ¿cómo calcula f_x y f_y?
6. ¿Qué dice el teorema de Clairaut?
7. ¿Cómo encuentra el plano tangente a cada uno de los tipos siguientes de superficies?
   (a) Una gráfica de una función de dos variables, $z = f(x, y)$.
   (b) Una superficie de nivel de una función de tres variables, $F(x, y, z) = k$.
8. Defina la linealización de f en (a, b). ¿Cuál es la aproximación lineal correspondiente? ¿Cuál es la interpretación geométrica de la aproximación lineal?
9. (a) ¿Qué significa decir que f es diferenciable en (a, b)?
   (b) ¿Cómo comprueba regularmente que f es diferenciable?
10. Si $z = f(x, y)$, ¿cuáles son las diferenciales dx, dy y dz?
11. Establezca la regla de la cadena para el caso en el que $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una variable. ¿Y si x y y son funciones de dos variables?
12. Si z está definida en forma implícita como una función de x y y mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$, ¿cómo determina $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?
13. (a) Escriba una expresión como un límite para la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. ¿Cómo la interpreta como razón? ¿Cómo la interpreta geométricamente?
    (b) Si f es diferenciable, escriba una expresión para $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$ en términos de f_x y f_y.
14. (a) Defina el vector gradiente ∇f para una función f de dos o tres variables.
    (b) Exprese $D_{\mathbf{u}} f$ en términos de ∇f.
    (c) Explique la importancia geométrica del gradiente.
15. ¿Qué significan los enunciados siguientes?
    (a) f tiene un máximo relativo en (a, b).
    (b) f tiene un máximo absoluto en (a, b).
    (c) f tiene un mínimo relativo en (a, b).
    (d) f tiene un mínimo absoluto en (a, b).
    (e) f tiene un punto silla en (a, b)
16. (a) Si f tiene un máximo relativo en (a, b), ¿qué puede decir acerca de sus derivadas parciales en (a, b)?
    (b) ¿Cuál es el punto crítico de f?
17. Diga qué es la prueba de la segunda derivada.
18. (a) ¿Qué es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué es un conjunto acotado?
    (b) Enuncie el teorema del valor extremo para funciones de dos variables.
    (c) ¿Cómo determina los valores que garantiza el teorema del valor extremo?
19. Explique cómo funciona el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = k$. ¿Y si hay una segunda restricción $h(x, y, z) = c$?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. $f_y(a, b) = \lim_{y \to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$
2. Existe una función f con derivadas parciales continuas de segundo orden tal que $f_x(x, y) = x + y^2$ y $f_y(x, y) = x - y^2$.
3. $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$
4. $D_{\mathbf{k}} f(x, y, z) = f_z(x, y, z)$
5. Si $f(x, y) \to L$ cuando $(x, y) \to (a, b)$ a lo largo de toda recta que pasa por (a, b), entonces $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$.
6. Si $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ existen, entonces f es diferenciable en (a, b).

7. Si f tiene un mínimo relativo en (a, b) y f es diferenciable en (a, b), entonces $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

8. Si f es una función, entonces

$$\lim_{(x, y) \to (2, 5)} f(x, y) = f(2, 5) .$$

9. Si $f(x, y) = \ln y$, entonces $\nabla f(x, y) = 1/y$.

10. Si $(2, 1)$ es un punto crítico de f y

$$f_{xx}(2, 1) f_{yy}(2, 1) < [f_{xy}(2, 1)]^2$$

entonces f tiene un punto silla en $(2, 1)$.

11. Si $f(x, y) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y$, entonces $-\sqrt{2} \leqslant D_{\mathbf{u}} f(x, y) \leqslant \sqrt{2}$.

12. Si $f(x, y)$ tiene dos máximos relativos, entonces f debe tener un mínimo local.

EJERCICIOS

1–2 Encuentre las primeras derivadas parciales.

1. $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$

2. $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$

3–4 Trace la gráfica de la función.

3. $f(x, y) = 1 - y^2$

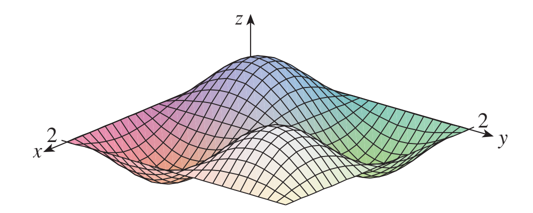
4. $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2$

5–6 Grafique varias curvas de nivel de la función.

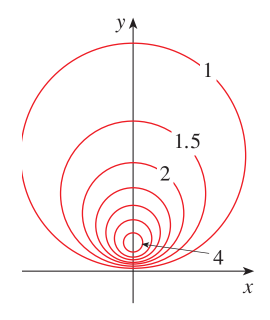
5. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

6. $f(x, y) = e^x + y$

7. Elabore un croquis de un mapa de curvas de nivel para la función cuya gráfica se proporciona.



8. Se ilustra un mapa de curvas de nivel de una función f. Utilícelo para hacer un croquis de la gráfica de f.



9–10 Evalúe el límite, o demuestre que no existe.

9. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 1)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

10. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

11. Una plancha de metal está situada en el plano xy y ocupa el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant 10$, $0 \leqslant y \leqslant 8$, donde x y y están en metros. La temperatura en el punto (x, y) en la plancha es $T(x, y)$, donde T se mide en grados Celsius. Se midieron las temperaturas en puntos con separaciones iguales y se registraron en la tabla.
(a) Estime los valores de las derivadas parciales $T_x(6, 4)$ y $T_y(6, 4)$. ¿Cuáles son las unidades?
(b) Estime el valor de $D_{\mathbf{u}}T(6, 4)$, donde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$. Interprete el resultado.
(c) Estime el valor de $T_{xy}(6, 4)$.

x \ y	0	2	4	6	8
0	30	38	45	51	55
2	52	56	60	62	61
4	78	74	72	68	66
6	98	87	80	75	71
8	96	90	86	80	75
10	92	92	91	87	78

12. Determine una aproximación lineal para la función de la temperatura $T(x, y)$ del ejercicio 11 cerca del punto $(6, 4)$. Luego úselo para estimar la temperatura en el punto $(5, 3.8)$.

13–17 Encuentre las primeras derivadas parciales.

13. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^2}$

14. $u = e^{-r}\, \text{sen}\, 2\theta$

15. $g(u, v) = u \tan^{-1} v$

16. $w = \dfrac{x}{y - z}$

17. $T(p, q, r) = p \ln(q + e^r)$

18. La velocidad del sonido que viaja por el mar es una función de la temperatura, salinidad y presión. Está modelada por la función

$$C = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016D$$

donde C es la velocidad del sonido (en metros por segundo), T es la temperatura (en grados Celsius), S es la salinidad, es decir (la concentración de sales en partes por mil, lo cual quiere decir gramos de sólidos disueltos por cada 1000 gramos de agua), y D es la profundidad por abajo de la superficie del mar, en metros. Calcule $\partial C/\partial T$, $\partial C/\partial S$ y $\partial C/\partial D$ cuando $T = 10°C$, $S = 35$ partes por mil y $D = 100$ m. Explique el significado físico de estas derivadas parciales.

19–22 Determine las segundas derivadas parciales de f.

19. $f(x, y) = 4x^3 - xy^2$

20. $z = xe^{-2y}$

21. $f(x, y, z) = x^k y^l z^m$

22. $v = r\cos(s + 2t)$

---

23. Si $z = xy + xe^{y/x}$, demuestre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

24. Si z sen$(x + \text{sen } t)$, demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

25–29 Encuentre las ecuaciones de (a) el plano tangente y (b) de la recta normal a la superficie dada en el punto especificado.

25. $z = 3x^2 - y^2 + 2x$, $(1, -2, 1)$

26. $z = e^x \cos y$, $(0, 0, 1)$

27. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 3$, $(2, -1, 1)$

28. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

29. $\text{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$

---

30. Mediante una computadora, grafique la superficie $z = x^2 + y^4$ y su plano tangente y recta normal en $(1, 1, 2)$ en la misma pantalla. Elija el dominio y el lugar de modo que obtenga una buena vista de los tres objetos.

31. Determine los puntos de la hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

32. Encuentre du si $u = \ln(1 + se^{2t})$.

33. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = x^3\sqrt{y^2 + z^2}$ en el punto $(2, 3, 4)$ y con ella estime la cantidad $(1.98)^3\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$.

34. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 5 m y 12 m, y el error posible en la medición es de cuanto mucho 0.2 cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de (a) el área del triángulo y (b) la longitud de la hipotenusa.

35. Si $u = x^2y^3 + z^4$, donde $x = p + 3p^2$, $y = pe^p$, y $z = p$ sen p, use la regla de la cadena para hallar du/dp.

36. Si $v = x^2$ sen $y + ye^{xy}$, donde $x = s + 2t$ y $y = st$, use la regla de la cadena para hallar $\partial v/\partial s$ y $\partial v/\partial t$ cuando $s = 0$ y $t = 1$.

37. Suponga $z = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_s(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$ y $f_x(3, 6) = 8$. Calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$ cuando $s = 1$ y $t = 2$.

38. Utilice un diagrama de árbol para expresar la regla de la cadena para el caso donde $w = f(t, u, v)$, $t = t(p, q, r, s)$, $u = u(p, q, r, s)$ y $v = v(p, q, r, s)$ son funciones diferenciables.

39. Si $z = y + f(x^2 - y^2)$, donde f es diferenciable, demuestre que

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

40. La distancia x de un lado de un triángulo se incrementa a razón de 3 pulg/s, el largo y de otro de los lados decrece a razón de 2 pulg/s, y el ángulo θ que subtienden se incrementa a razón de 0.05 radianes/s. ¿Qué tan rápido cambia el área del triángulo cuando $x = 40$ pulg, $y = 50$ pulg y $\theta = \pi/6$?

41. Si $z = f(u, v)$, donde $u = xy$, $v = y/x$, y f tiene segundas derivadas parciales continuas.

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}$$

42. Si $yz^4 + x^2z^3 = e^{xyz}$, encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

43. Determine el gradiente de la función $f(x, y, z) = z^2e^{x\sqrt{y}}$.

44. (a) ¿Cuándo es un máximo la derivada direccional de f?
(b) ¿Cuándo es un mínimo?
(c) ¿Cuándo es 0?
(d) ¿Cuándo es la mitad del valor máximo?

45–46 Determine la derivada direccional de f en el punto dado en la dirección indicada.

45. $f(x, y) = 2\sqrt{x} - y^2$, $(1, 5)$, en la dirección hacia el punto $(4, 1)$.

46. $f(x, y, z) = x^2y + x\sqrt{1 + z}$, $(1, 2, 3)$, en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

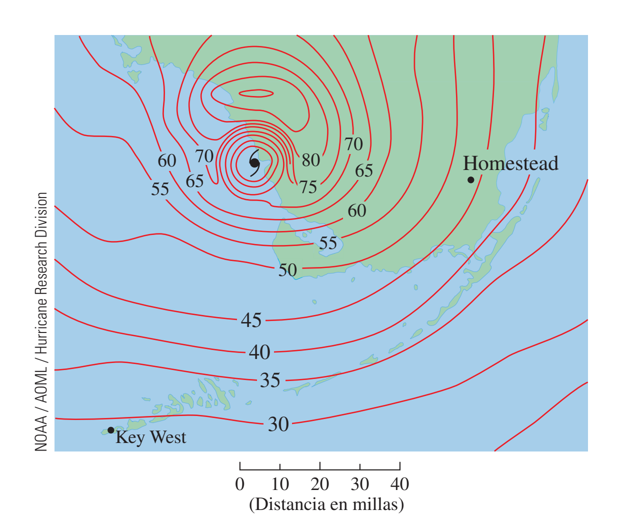
---

47. Determine la razón de cambio máxima de $f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ en el punto $(2, 1)$. ¿Cuál es su dirección?

48. Encuentre la dirección en la cual $f(x, y, z) = ze^{xy}$ se incrementa con mayor rapidez en el punto $(0, 1, 2)$. ¿Cuál es la razón de incremento máxima?

49. El mapa de curvas de nivel muestra la velocidad del viento en nudos durante el huracán Andrews del 24 de agosto de

1992. Con él, estime el valor de la derivada direccional de la rapidez del viento en Homestead, Florida, en la dirección del ojo del huracán.



50. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente en el punto $(-2, 2, 4)$ a la curva de intersección de la superficie $z = 2x^2 - y^2$ y el plano $z = 4$.

51–54 Calcule los valores máximo y mínimo relativos y el punto silla de la función. Si tiene un programa de cómputo para elaborar gráficas tridimensionales, trace la función con un dominio y desde una perspectiva que revele todos los aspectos importantes de la función.

51. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

52. $f(x, y) = x^3 - 6xy + 8y^3$

53. $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

54. $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

55–56 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de f en el conjunto D.

55. $f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$; D es la región triangular cerrada en el plano xy con vértices $(0, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, 0)$

56. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$; D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

---

57. Use una gráfica, unas curvas de nivel, o ambas, para estimar los valores máximos y mínimos relativos y los puntos silla de $f(x, y) = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$. Luego mediante el cálculo determine exactamente los valores.

58. Utilice una calculadora o una computadora para dibujar, o bien (el método de Newton o un sistema algebraico computacional), para determinar los puntos críticos de $f(x, y) = 12 + 10y - 2x^2 - 8xy - y^4$ aproximados a tres cifras decimales. Luego clasifique los puntos críticos y determine el punto más alto en la gráfica.

59–62 Con los multiplicadores de Lagrange, determine los valores máximos y mínimos de f sujeta a las restricciones dadas.

59. $f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + y^2 = 1$

60. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}; \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1$

61. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2;$

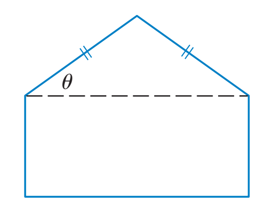
$x + y + z = 1, \quad x - y + 2z = 2$

---

63. Encuentre los puntos sobre la superficie $xy^2z^3 = 2$ que son los más cercanos al origen.

64. Un paquete en forma de una caja rectangular se puede enviar a través de U.S. Postal Service si la suma de su largo y el perímetro de una sección transversal perpendicular al largo es 108 pulg como máximo. Calcule las dimensiones del paquete con el volumen más grande que se puede enviar por paquete postal.

65. Se forma un pentágono con un triángulo isósceles y un rectángulo, como se ilustra en la figura. Si el pentágono tiene un perímetro fijo P, determine las longitudes de los lados del pentágono que maximice el área de la figura.



66. Una partícula de masa m se desplaza sobre la superficie $z = f(x, y)$. Sean $x = x(t)$, $y = y(t)$ las coordenadas x y y de la partícula en el tiempo t.
(a) Calcule el vector de la velocidad $\mathbf{v}$ y la energía cinética $K = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2$ de la partícula
(b) Determine el vector de la aceleración $\mathbf{a}$.
(c) Sea $z = x^2 + y^2$ y $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\operatorname{sen} t$. Determine el vector de la velocidad, la energía cinética y el vector de la aceleración.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Un rectángulo de largo L y anchura W se corta en cuatro pequeños rectángulos por medio de dos rectas paralelas a los lados. Encuentre los valores máximo y mínimo de la suma de los cuadrados de las áreas de los rectángulos más pequeños.

2. Los biólogos marinos han determinado que cuando un tiburón detecta la presencia de sangre en el agua, nada en la dirección en la cual la concentración de ella se incrementa con mayor rapidez. Con base en ciertas pruebas, la concentración de sangre (en partes por millón), en el punto $P(x, y)$ sobre la superficie del agua de mar es de aproximadamente

$$C(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4}$$

donde x y y se miden en metros en un sistema de coordenadas rectangulares con la fuente de sangre en el origen.

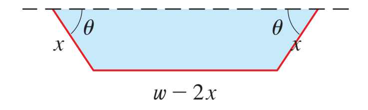
(a) Identifique las curvas de nivel de la función de concentración y grafique varios miembros de esta familia junto con una trayectoria que un tiburón sigue hasta donde se encuentra el origen de la sangre.

(b) Suponga que un tiburón está en el punto (x_0, y_0) cuando detecta por primera vez la presencia de sangre en el agua. Dé una ecuación de la trayectoria del tiburón planteando y resolviendo una ecuación diferencial.

3. Una pieza larga de acero galvanizado de w pulgadas de ancho se tiene que doblar en forma simétrica de tal manera que queden tres lados rectos y se forme un canalón que desaloje el agua de lluvia. Se muestra una sección transversal en la figura.

(a) Determine las dimensiones que permiten un flujo máximo posible; es decir, calcule las dimensiones que dan el área máxima posible de la sección transversal.

(b) ¿Sería mejor doblar el metal de tal manera que quede un canalón de sección transversal semicircular que una sección transversal de tres lados?



4. ¿Para qué valores del número r es continua la función

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{(x + y + z)^r}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = 0 \end{cases}$$

en $\mathbb{R}^3$?

5. Suponga que f es una función diferenciable de una variable. Demuestre que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf(y/x)$ se cortan en un punto común.

6. (a) El método de Newton para aproximar una raíz de una ecuación $f(x) = 0$ (véase sección 4.8) se puede adaptar para aproximar una solución de un sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$. Las superficies $z = f(x, y)$ y $z = g(x, y)$ se cortan formando una curva que in-

terseca al plano xy en el punto (r, s), que es la solución del sistema. Si una aproximación inicial (x_1, y_1) está cerca de este punto, entonces los planos tangentes a las superficies en (x_1, y_1) se cortan formando una recta que corta al plano xy en el punto (x_2, y_2), el cual debe ser más cercano a (r, s). (Compare con la figura 2 de la sección 4.8.) Demuestre que

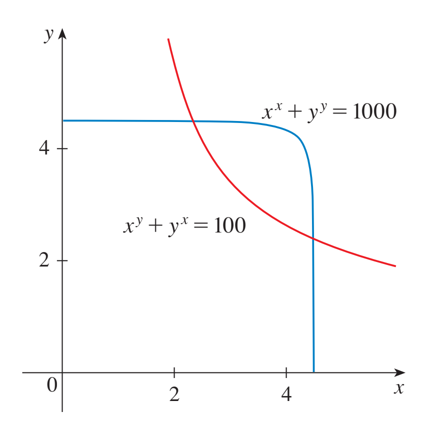
$$x_2 = x_1 - \frac{fg_y - f_y g}{f_x g_y - f_y g_x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = y_1 - \frac{f_x g - fg_x}{f_x g_y - f_y g_x}$$

donde f, g y sus derivadas parciales se evalúan en (x_1, y_1). Si continúa con este procedimiento se obtienen aproximaciones sucesivas (x_n, y_n).

(b) Thomas Simpson (1710-1761) fue quien formuló el método de Newton como se conoce ahora y quien lo generalizó a funciones de dos variables como en el inciso (a). (Véase la biografía de Simpson en la página 502.) El ejemplo que dio para ilustrar el método fue la resolución del sistema de ecuaciones

$$x^x + y^y = 1000 \qquad x^y + y^x = 100$$

En otras palabras, encontró los puntos de intersección de las curvas de la figura. Aplique el método del inciso (a) para calcular las coordenadas de los puntos de intersección aproximados a seis cifras decimales.

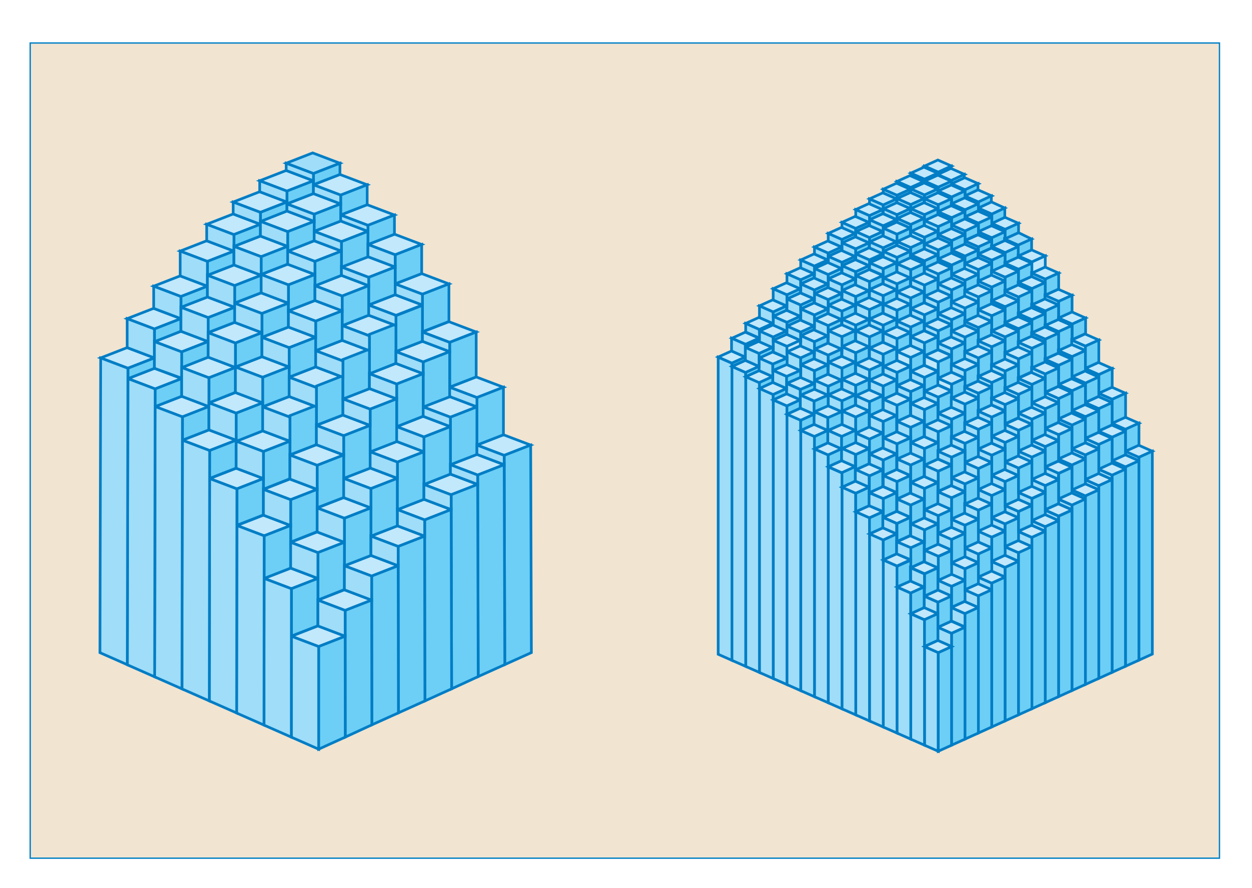


7. Si la elipse $x^2/a^2 + y^2b^2 = 1$ está incluída en el círculo $x^2 + y^2 = 2y$, ¿que valores de a y b minimizan el área de la elipse?

8. Entre todos los planos que son tangentes a la superficie $xy^2z^2 = 1$, encuentre los más alejados desde el origen.

15

INTEGRALES MÚLTIPLES



La integral doble de una función positiva es un volumen, que es el límite de la suma de volúmenes de las columnas rectangulares

En este capítulo se amplía la idea de una integral definida para integrales dobles y triples de funciones de dos o tres variables. Estas ideas se emplean entonces para calcular volúmenes, masas y centroides de regiones más generales, las consideradas en los capítulos 6 y 8. Se emplean también integrales dobles para calcular probabilidades cuando hay dos variables aleatorias.

También se verá que las coordenadas polares son útiles para calcular integrales dobles sobre algunos tipos de regiones. Del mismo modo, se introducen dos nuevos sistemas de coordenadas en espacio tridimensional, coordenadas cilíndricas y coordenadas esférica, que simplifican el cálculo de integrales triples sobre ciertas regiones sólidas que se presentan con frecuencia.

Casi de la misma manera que el intento para resolver el problema de área condujo a la definición de una integral definida, ahora se busca determinar el volumen de un sólido, y en el proceso se llega a la definición de integral doble.

REVISIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Primero se recordarán los hechos básicos relacionados con integrales definidas de una sola variable. Si $f(x)$ se define para $a \leqslant x \leqslant b$, se empieza por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual amplitud $\Delta x = (b - a)/n$ y se eligen puntos de muestra x_i^* en estos subintervalos. Entonces se forma la suma de Riemann

1 $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

Si se toma el límite de las sumas cuando $n \to \infty$ para obtener la integral definida de f de a a b:

2 $$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x$$

En el caso especial donde $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann se puede interpretar como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación en la figura 1, y $\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b.

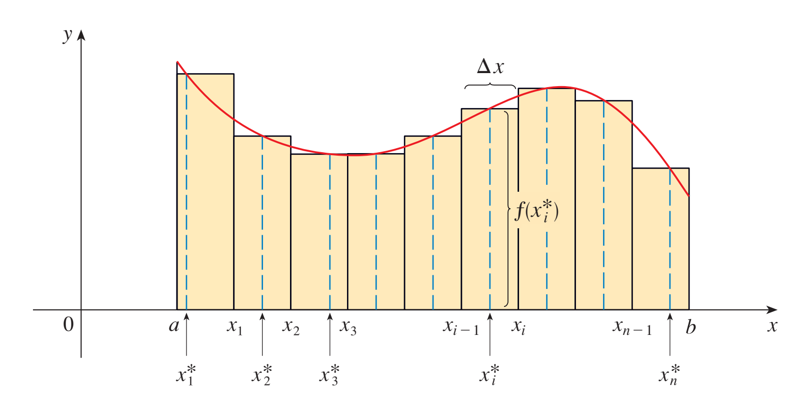


FIGURA 1

VOLÚMENES E INTEGRALES DOBLES

De una manera similar se considera una función f de dos variables definidas en un rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$$

y se supone primero que $f(x, y) \geqslant 0$. La gráfica de f es una superficie con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que yace arriba de R y debajo de la gráfica de f, es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant f(x, y),\ (x, y) \in R\}$$

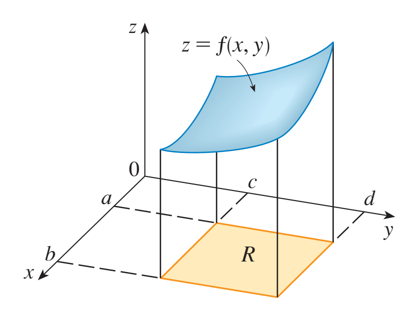


FIGURA 2

(Véase la figura 2.) El objetivo es hallar el volumen de S.

El primer paso es dividir el rectángulo R en subrectángulos. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual amplitud $\Delta x = (b - a)/m$ y dividiendo $[c, d]$ en n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ de igual amplitud $\Delta y = (d - c)/n$. Al dibujar líneas

paralelas a los ejes coordenados por los puntos finales de estos subintervalos como en la figura 3, se forman los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

cada uno con área $\Delta A = \Delta x \Delta y$.

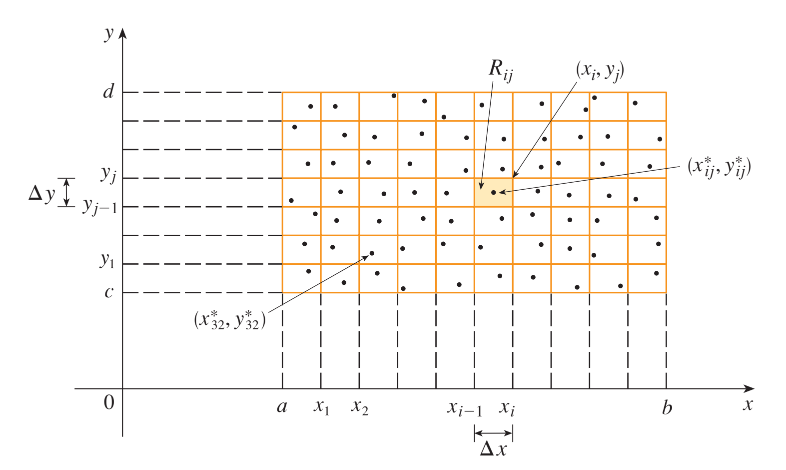


FIGURA 3
División de R en subrectángulos

Si se elige el **punto muestral** (x^*_{ij}, y^*_{ij}) en cada R_{ij}, entonces se puede aproximar la parte de S que yace arriba de cada R_{ij} mediante una caja rectangular (o "columna") con base R_{ij} y altura $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$ como se muestra en la figura 4. (Compare con la figura 1.) El volumen de esta caja es la altura de la caja multiplicada por el área de la base del rectángulo:

$$f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\, \Delta A$$

Si se sigue este procedimiento para los rectángulos y se suman los volúmenes de las cajas correspondientes, se obtiene una aproximación del volumen total de S:

3
$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\, \Delta A$$

(Véase fig. 5.) Esta suma doble significa que para cada subrectángulo se evalúa f en el punto elegido y se multiplica por el área del subrectángulo, y luego se suman los resultados.

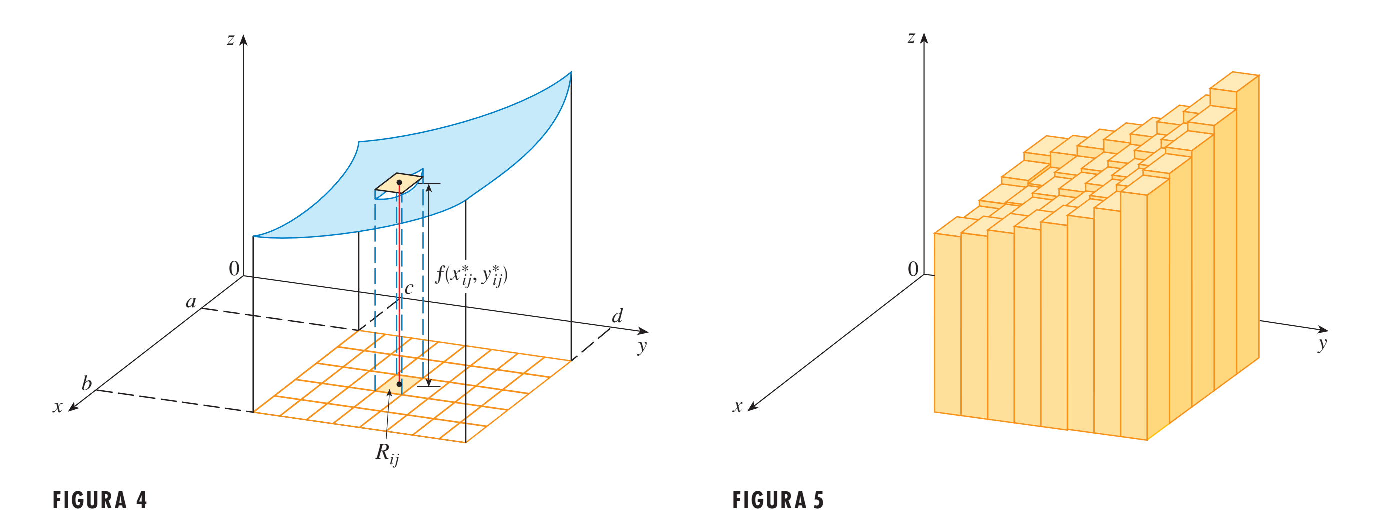


FIGURA 4

FIGURA 5

La intuición dice que la aproximación dada en (3) es mejor cuando m y n crecen y, por lo tanto, se esperaría que

■ El significado del límite doble en la ecuación 4 es que la suma doble se puede hacer tan cercana como se desee al número V [para cualquier elección de (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}] al tomar m y n suficientemente grandes.

4
$$V = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

Se usa la expresión de la ecuación 4 para definir el **volumen** del sólido S que yace debajo de la gráfica de f y arriba del rectángulo R. (Se puede demostrar que esta definición es congruente con la fórmula para el volumen de la sección 6.2.)

Los límites del tipo que aparece en la ecuación 4 ocurren con frecuencia, no sólo para hallar volúmenes, sino también en diversas situaciones, como se verá en la sección 15.5, incluso cuando f no es una función positiva. Así, se hace la siguiente definición.

■ Observe la similitud entre la definición 5 y la definición de una integral simple en la ecuación 2.

5 DEFINICIÓN La **integral doble** de f sobre el rectángulo R es

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A$$

si existe el límite.

■ Aun cuando ha definido la integral doble al dividir R en subrectángulos de igual tamaño, podría haber empleado subrectángulos R_{ij} de tamaño desigual. Pero entonces hubiéra tenido que asegurar que todas sus dimensiones se aproximaran a 0 en el proceso de establecer límites.

El significado preciso del límite en la definición 5 es que para todo número $\varepsilon > 0$ hay un entero N tal que

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dA - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \, \Delta A \right| < \varepsilon$$

para los enteros m y n mayores que N y para cualquier elección de puntos muestrales (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}.

Una función f se denomina **integrable** si existe el límite en la definición 5. En cursos de cálculo avanzado se demuestra que todas las funciones continuas son integrables. De hecho, la integral doble de f existe siempre que f "no sea demasiado discontinua". En particular, si f está acotada [esto es, hay una constante M tal que $|f(x, y)| \leq M$ para toda (x, y) en R], y f es continua ahí, excepto en un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable sobre R.

Se puede elegir que el punto muestral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) sea cualquier punto en el subrectángulo R_{ij}, pero si se elige que sea la esquina superior derecha de R_{ij} [a saber, (x_i, y_j), véase figura 3], entonces la expresión para la integral doble se simplifica:

6
$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j) \, \Delta A$$

Al comparar las definiciones 4 y 5, es obvio que un volumen puede expresarse como una integral doble:

Si $f(x, y) \geq 0$, entonces el volumen V del sólido que yace arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

La suma de la definición 5,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

se llama **suma de Riemann doble** y se emplea como una aproximación del valor de la integral doble. [Observe la similitud con la suma de Riemann en (1) para una función de una sola variable.] Si sucede que f es una función *positiva*, entonces la suma de Riemann doble representa la suma de volúmenes de columnas, como en la figura 5, y es una aproximación del volumen bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo R.

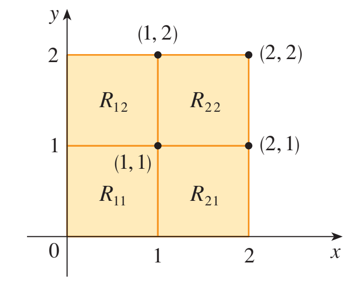


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que yace arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y debajo del paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija el punto muestral como la esquina superior derecha de cada cuadrado R_{ij}. Bosqueje el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

SOLUCIÓN Los cuadrados se muestran en la figura 6. El paraboloide es la gráfica de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ y el área de cada cuadrado es 1. Al aproximar el volumen mediante la suma de Riemann con $m = n = 2$, se tiene

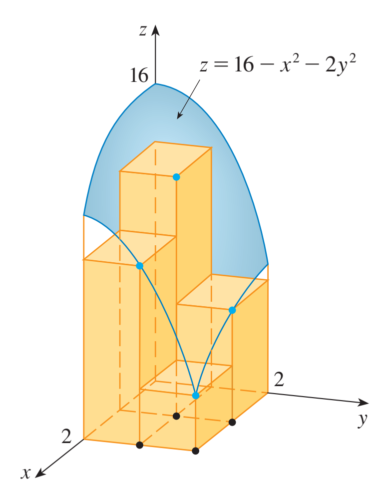


FIGURA 7

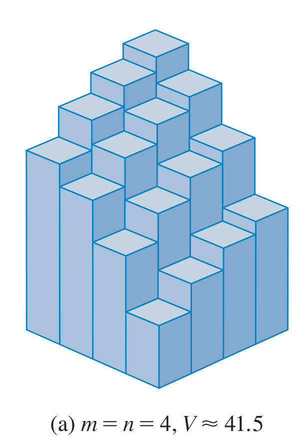
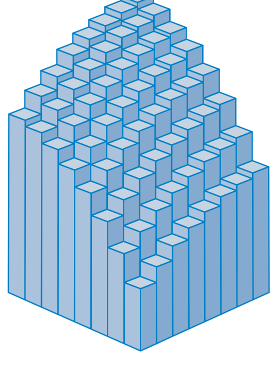
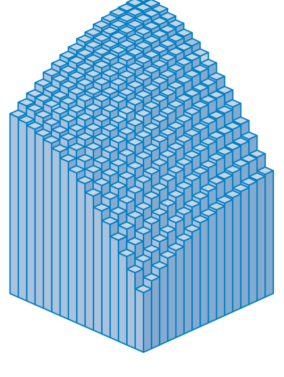
$$V \approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$= f(1, 1)\, \Delta A + f(1, 2)\, \Delta A + f(2, 1)\, \Delta A + f(2, 2)\, \Delta A$$

$$= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$$

Éste es el volumen de las cajas rectangulares de aproximación mostradas en la figura 7. □

Se obtienen mejores aproximaciones para el volumen del ejemplo 1 si se incrementa el número de cuadrados. En la figura 8 se muestra cómo las columnas comienzan a verse más como sólidos reales y las aproximaciones correspondientes se vuelven más exactas cuando se usan 16, 64 y 256 cuadrados. En la siguiente sección se podrá mostrar que el volumen exacto es 48.

(a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

FIGURA 8
Las aproximaciones de suma de Riemann al volumen debajo de $z = 16 - x^2 - 2y^2$ se vuelven más exactas cuando se incrementan m y n.

EJEMPLO 2 Si $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -2 \leqslant y \leqslant 2\}$, evalúe la integral

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

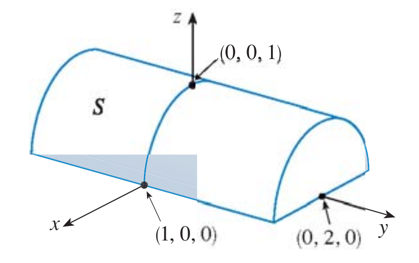


FIGURA 9

SOLUCIÓN Sería difícil evaluar esta integral de manera directa a partir de la definición 5 pero, debido a que $\sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, se puede calcular la integral interpretándola como un volumen. Si $z = \sqrt{1 - x^2}$, entonces $x^2 + z^2 = 1$ y $z \geqslant 0$, así que la integral doble dada representa el volumen del sólido S que yace debajo del cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ y arriba del rectángulo R. (Véase figura 9.) El volumen de S es el área de un semicírculo con radio 1 multiplicada por la longitud del cilindro. Por consiguiente

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA = \tfrac{1}{2}\pi(1)^2 \times 4 = 2\pi$$ □

REGLA DEL PUNTO MEDIO

Los métodos que se emplearon para aproximar integrales simples (regla del punto medio, regla del trapecio, regla de Simpson) tienen contrapartes para integrales dobles. Aquí se considera sólo la regla del punto medio para integrales dobles. Esto significa que se usa una suma de Riemann doble para aproximar la integral doble, donde el punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij} se elige como el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ de R_{ij}. En otras palabras, $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

REGLA DEL PUNTO MEDIO PARA INTEGRALES DOBLES

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A$$

donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$ y $\bar{y}_j$ es el punto medio de $[y_{j-1}, y_j]$.

V EJEMPLO 3 Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de la integral $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

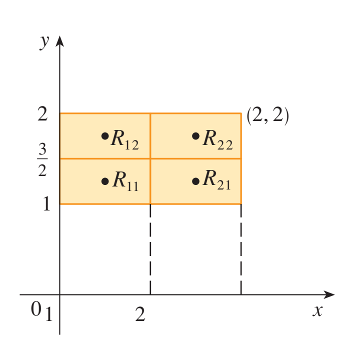


FIGURA 10

SOLUCIÓN Al usar la regla del punto medio con $m = n = 2$, se evalúa $f(x, y) = x - 3y^2$ en los centros de los cuatro subrectángulos mostrados en la figura 10. Por lo tanto, $\bar{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\bar{x}_2 = \frac{3}{2}$, $\bar{y}_1 = \frac{5}{4}$ y $\bar{y}_2 = \frac{7}{4}$. El área de cada subrectángulo es $\Delta A = \frac{1}{2}$. Así que

$$\begin{aligned}
\iint_R (x - 3y^2)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\
&= f(\bar{x}_1, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_1, \bar{y}_2)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_1)\, \Delta A + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\, \Delta A \\
&= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}\right) \Delta A + f\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{4}\right) \Delta A \\
&= \left(-\tfrac{67}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{139}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{51}{16}\right)\tfrac{1}{2} + \left(-\tfrac{123}{16}\right)\tfrac{1}{2} \\
&= -\tfrac{95}{8} = -11.875
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11.875$$ □

NOTA En la siguiente sección se desarrollará un método eficaz para calcular integrales dobles, y luego se verá que el valor exacto de la integral doble del ejemplo 3 es -12. (Recuerde que la interpretación de una integral doble como un volumen es válida sólo cuando el integrando f es una función *positiva*. El integrando del ejemplo 3 no es una función positiva, así que su integral no es un volumen. En los ejemplos 2 y 3 de la sección 15.2, se explica cómo interpretar las integrales de funciones que no siempre son positivas en términos de volúmenes.) Si se sigue dividiendo cada subrectángulo de la figura 10 en

Número de subrectángulos	Aproximaciones de la regla del punto medio
1	−11.5000
4	−11.8750
16	−11.9687
64	−11.9922
256	−11.9980
1024	−11.9995

cuatro más pequeños con forma similar, se obtienen las aproximaciones de la regla del punto medio mostradas en la gráfica del margen. Observe cómo estas aproximaciones tienden al valor exacto de la integral doble, −12.

VALOR PROMEDIO

Recuerde de la sección 6.5 que el valor promedio de una función f de una variable definida en el intervalo $[a, b]$ es

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

De una manera similar se define el **valor promedio** de una función f de dos variables definidas en un rectángulo R como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x, y)\,dA$$

donde $A(R)$ es el área de R.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la ecuación

$$A(R) \times f_{\text{prom}} = \iint_R f(x, y)\,dA$$

dice que la caja con base R y altura f_{prom} tiene el mismo volumen que el sólido que yace debajo de la gráfica de f. [Si $z = f(x, y)$ describe una región montañosa y se cortan las cimas de las montañas a una altura f_{prom}, entonces se pueden usar para llenar los valles de modo que la región se vuelva completamente plana. Véase figura 11.]

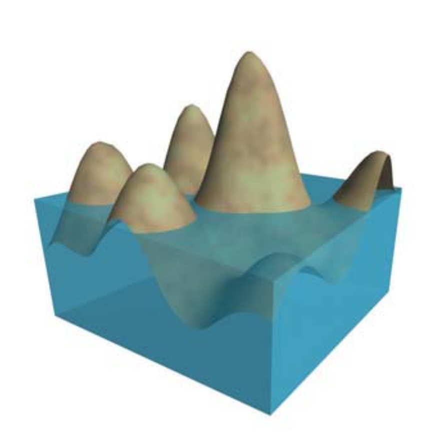


FIGURA 11

EJEMPLO 4 El mapa de contornos de la figura 12 muestra la nieve, en pulgadas, que cayó en el estado de Colorado el 20 y 21 de diciembre de 2006. (El estado tiene la forma de un rectángulo que mide 388 millas de oeste a este y 276 millas de sur a norte.) Use el mapa de contornos para estimar la nieve promedio para Colorado en esos días.

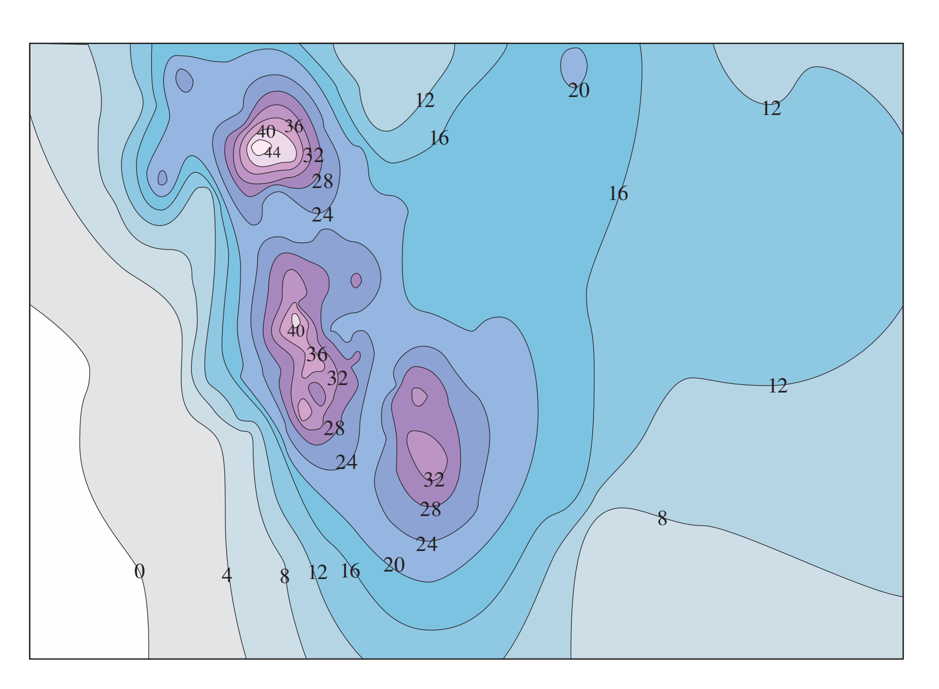


FIGURA 12

SOLUCIÓN Colóquese el origen en la esquina suroeste del estado. Entonces $0 \leqslant x \leqslant 388$, $0 \leqslant y \leqslant 276$, y $f(x, y)$ es la nieve, en pulgadas, en un lugar a x millas al este y y millas al norte del origen. Si R es el rectángulo que representa a Colorado, entonces la nieve promedio para el estado el 20-21 de diciembre fue

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R f(x, y)\, dA$$

donde $A(R) = 388 \cdot 276$. Para estimar el valor de esta integral doble, se empleará la regla del punto medio con $m = n = 4$. En otras palabras, se divide R en 16 subrectángulos de igual tamaño, como en la figura 13. El área de cada subrectángulo es

$$\Delta A = \tfrac{1}{16}(388)(276) = 6693 \text{ mi}^2$$

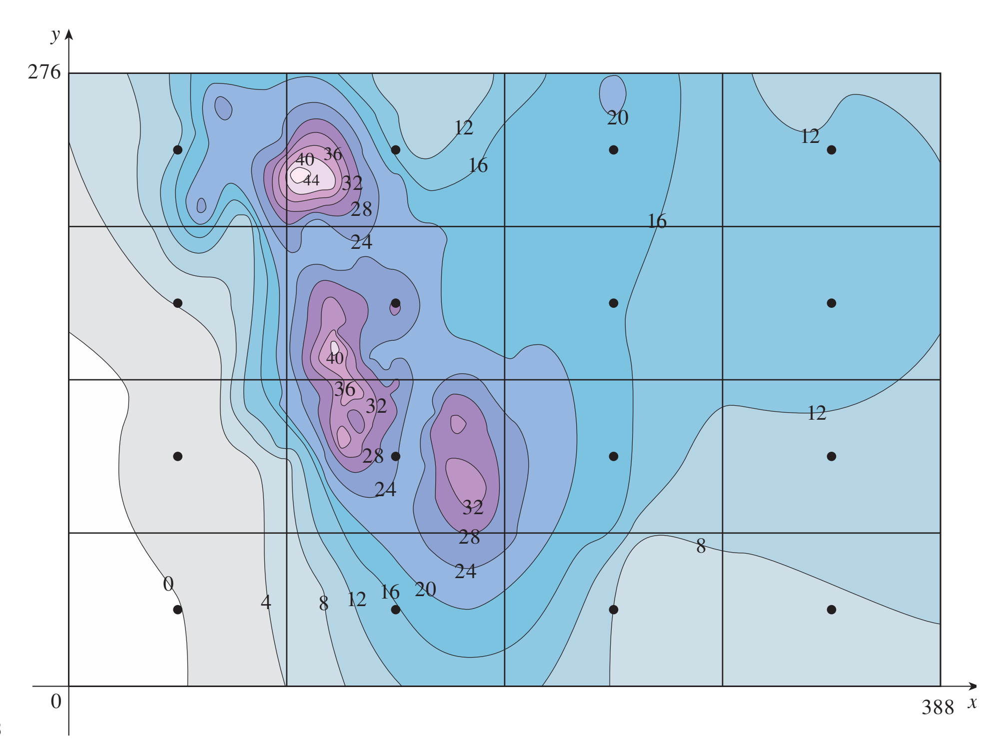


FIGURA 13

Al usar el mapa de contornos para estimar el valor de f en el centro de cada subrectángulo, se obtiene

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\, dA &\approx \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\, \Delta A \\ &\approx \Delta A[0 + 15 + 8 + 7 + 2 + 25 + 18.5 + 11 \\ &\qquad + 4.5 + 28 + 17 + 13.5 + 12 + 15 + 17.5 + 13] \\ &= (6693)(207)\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$f_{\text{prom}} \approx \frac{(6693)(207)}{(388)(276)} \approx 12.9$$

El 20-21 de diciembre de 2006, Colorado recibió un promedio de aproximadamente 13 pulgadas de nieve. □

PROPIEDADES DE INTEGRALES DOBLES

Se listan aquí tres propiedades de integrales dobles que se pueden probar de la misma manera que en la sección 5.2. Se supone que todas las integrales existen. Las propiedades 7 y 8 se conocen como *linealidad* de la integral.

■ Las integrales dobles se comportan de esta manera debido a que las sumas dobles que las originan se comportan de esa forma.

7 $$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA$$

8 $$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA \qquad \text{donde } c \text{ es una constante}$$

Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para toda (x, y) en R, entonces

9 $$\iint_R f(x, y)\, dA \geqslant \iint_R g(x, y)\, dA$$

15.1 EJERCICIOS

1. (a) Estime el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del rectángulo

$R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 6, 0 \leqslant y \leqslant 4\}$

Use una suma de Riemann con $m = 3$, $n = 2$ y tome el punto muestral como la esquina superior derecha de cada cuadrado.

(b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del sólido del inciso (a).

2. Si $R = [-1, 3] \times [0, 2]$, use una suma de Riemann con $m = 4$, $n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R (y^2 - 2x^2)\, dA$. Tome las esquinas superiores izquierdas de los cuadrados como los puntos muestrales.

3. (a) Use una suma de Riemman con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R \operatorname{sen}(x + y)\, dA$, donde $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Tome las esquinas inferiores izquierdas como los puntos muestrales.

(b) Use la regla del punto medio para estimar la integral del inciso (a).

4. (a) Estime el volumen del sólido que yace debajo de la superficie $z = x + 2y^2$ y arriba del rectángulo $R = [0, 2] \times [0, 4]$. Use una suma de Riemann con $m = n = 2$ y elija a las esquinas inferiores derechas como los puntos muestrales.

(b) Use la regla del punto medio para estimar el volumen del inciso (a).

5. Se da una tabla de valores para una función $f(x, y)$ definida en $R = [1, 3] \times [0, 4]$.

(a) Estime $\iint_R f(x, y)\, dA$ por medio de la regla del punto medio con $m = n = 2$.

(b) Estime la integral doble con $m = n = 4$ y elija los puntos más alejados del origen como los puntos muestrales.

x \ y	0	1	2	3	4
1.0	2	0	−3	−6	−5
1.5	3	1	−4	−8	−6
2.0	4	3	0	−5	−8
2.5	5	5	3	−1	−4
3.0	7	8	6	3	0

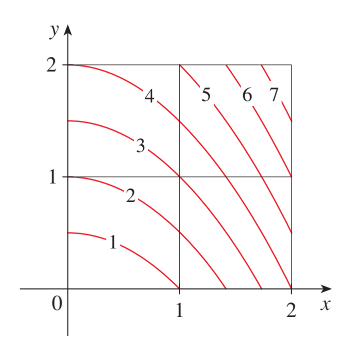
6. Una alberca de 20 pies por 30 pies se llena con agua. La profundidad se mide a intervalos de 5 pies, empezando en una esquina de la alberca, y se registran los valores en una tabla. Estime el volumen de agua en la alberca.

	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

7. Sea V el volumen del sólido que yace debajo de la gráfica de $f(x, y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ y arriba del rectángulo dado por $2 \leqslant x \leqslant 4$, $2 \leqslant y \leqslant 6$. Use las líneas $x = 3$ y $y = 4$ para dividir

a R en subrectángulos. Sean L y U las sumas de Riemann calculadas por medio de las esquinas inferiores izquierdas y las esquinas superiores derechas, respectivamente. Sin calcular los números V, L y U, dispóngalos en orden creciente y explique su razonamiento.

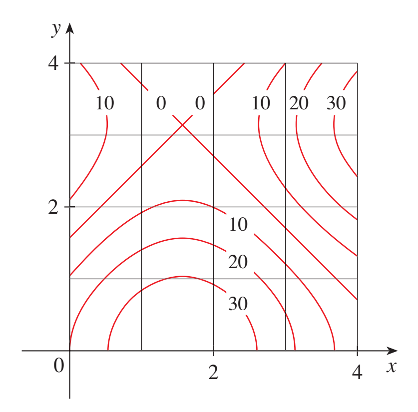
8. En la figura se muestran las curvas de nivel de una función f en el cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar $\iint_R f(x, y)\, dA$ ¿Cómo podría mejorar su estimación?



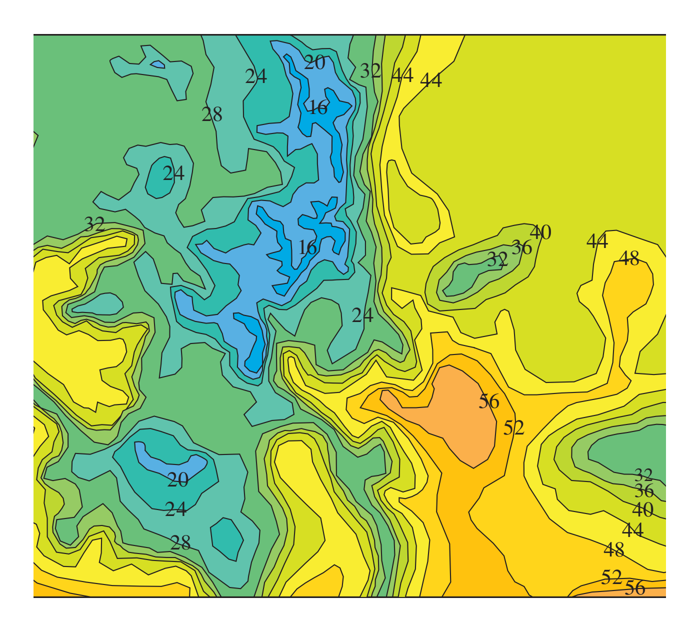
9. Se muestra un mapa de contornos para una función f en el cuadrado $R = [0, 4] \times [0, 4]$.

(a) Use la regla del punto medio con $m = n = 2$ para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$.

(b) Estime el valor promedio de f.



10. En el mapa de contornos se muestra la temperatura, en grados Fahrenheit, a las 4:00 P.M. del 26 de febrero de 2007, en Colorado. (El estado mide 388 millas de este a oeste y 276 millas de norte a sur.) Use la regla del punto medio con $m = n = 4$ para estimar la temperatura promedio en Colorado a esa hora.



11–13 Evalúe la integral doble identificándola primero como el volumen de un sólido.

11. $\iint_R 3\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 6\}$

12. $\iint_R (5 - x)\, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

13. $\iint_R (4 - 2y)\, dA, \quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

14. La integral $\iint_R \sqrt{9 - y^2}\, dA$, donde $R = [0, 4] \times [0, 2]$, representa el volumen de un sólido. Bosqueje el sólido.

15. Use una calculadora programable o computadora (o el comando sum en un CAS) para estimar

$$\iint_R \sqrt{1 + xe^{-y}}\, dA$$

donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Use la regla del punto medio con los siguientes números de cuadrados de igual tamaño: 1, 4, 16, 64, 256 y 1 024.

16. Repita el ejercicio 15 para la integral $\iint_R \operatorname{sen}(x + \sqrt{y})\, dA$.

17. Si f es una función constante, $f(x, y) = k$, y $R = [a, b] \times [c, d]$, demuestre que $\iint_R k\, dA = k(b - a)(d - c)$.

18. Utilice el resultado del ejercicio 17 para demostrar que

$$0 \leqslant \iint_R \operatorname{sen} \pi x \cos \pi y\, dA \leqslant \frac{1}{32}$$

donde $R = [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

15.2 INTEGRALES ITERADAS

Recuerde que por lo común es difícil evaluar integrales simples directamente de la definición de una integral, pero el teorema fundamental del cálculo provee un método mucho más fácil. La evaluación de integrales dobles a partir de primeros principios es incluso más

difícil, pero en esta sección se ve cómo expresar una integral doble como una integral iterada, que se puede evaluar entonces calculando dos integrales simples.

Suponga que f es una función de dos variables que es integrable en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y)\, dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Este procedimiento se llama *integración parcial con respecto a y*. (Observe su similitud con la derivación parcial.) Ahora $\int_c^d f(x, y)\, dy$ es un número que depende del valor de x, así que define una función de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Si ahora se integra la función A con respecto a x de $x = a$ a $x = b$, se obtiene

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

La integral del lado derecho de la ecuación 1 se llama **integral iterada**. Por lo común, se omiten los corchetes. Así,

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

indica que primero se integra con respecto a y de c a d, y luego con respecto a x de a a b.

De manera similar, la integral iterada

$$\boxed{3} \qquad \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

significa que primero se integra con respecto a x (manteniendo fija a y) de $x = a$ a $x = b$ y después se integra la función resultante de y con respecto a y de $y = c$ a $y = d$. Observe que en las ecuaciones 2 y 3 se trabaja *de dentro hacia fuera*.

EJEMPLO 1 Evalúe las integrales iteradas.

(a) $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx$ (b) $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy$

SOLUCIÓN

(a) Si se considera a x constante, se obtiene

$$\int_1^2 x^2 y\, dy = \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \tfrac{3}{2}x^2$$

Así, la función A en la explicación anterior está dada por $A(x) = \frac{3}{2}x^2$ en este ejemplo. Ahora integrará esta función de x de 0 a 3:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\, dy\, dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^3 \tfrac{3}{2}x^2\, dx = \frac{x^3}{2}\bigg]_0^3 = \frac{27}{2}$$

(b) Aquí se integra primero con respecto a x:

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\, dx \right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y\, dy = 9 \frac{y^2}{2} \Bigg]_1^2 = \frac{27}{2}$$ □

Observe que en el ejemplo 1 se obtiene la misma respuesta si se integra primero con respecto a y o x. En general, resulta (véase teorema 4) que las dos integrales iteradas de las ecuaciones 2 y 3 son siempre iguales; es decir, no importa el orden de integración. (Esto es similar al teorema de Clairaut en la igualdad de las derivadas parciales mixtas.)

En el siguiente teorema se da un método práctico para evaluar una integral doble expresándola como una integral iterada (en cualquier orden).

■ El nombre del teorema 4 es en honor al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), quien demostró una versión muy general de este teorema en 1907. Pero casi un siglo antes, el matemático francés Augustin-Louis Cauchy tenía conocimiento de la versión para funciones continuas.

4 TEOREMA DE FUBINI Si f es continua en el rectángulo $R = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

En términos generales, esto es cierto si se supone que f está acotada en R, f es discontinua sólo en un número finito de curvas uniformes y existen integrales iteradas.

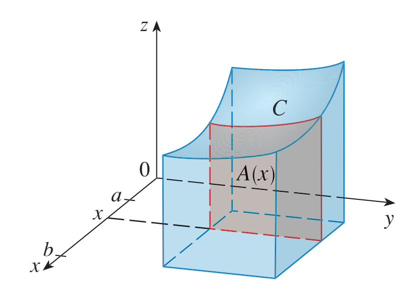


FIGURA 1

TEC Visual 15.2 ilustra el teorema de Fubini mostrando una animación de las figuras 1 y 2.

La demostración del teorema de Fubini es muy difícil para incluirla en este libro, pero al menos se puede dar una indicación intuitiva de por qué se cumple para el caso donde $f(x, y) \geqslant 0$. Recuerde que f es positiva, entonces se puede interpretar la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ como el volumen V del sólido S que yace arriba de R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$. Pero se tiene otra fórmula que se usó para el volumen en el capítulo 6, a saber,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

donde $A(x)$ es el área de una sección transversal de S en el plano que pasa por x y es perpendicular al eje x. De la figura 1 se puede ver que $A(x)$ es el área bajo la curva C cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde x se mantiene constante y $c \leqslant y \leqslant d$. Por lo tanto

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

y tiene

$$\iint_R f(x, y)\, dA = V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

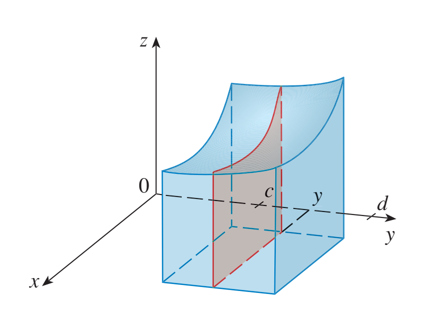


FIGURA 2

Un argumento similar, con secciones transversales perpendiculares al eje y como en la figura 2, muestra que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

V EJEMPLO 2 Evalúe la integral doble $\iint_R (x - 3y^2)\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$. (Compare con el ejemplo 3 de la sección 15.1.)

■ Observe la respuesta negativa del ejemplo 2; no hay nada malo con eso. La función f en ese ejemplo no es una función positiva, así que su integral no representa un volumen. De la figura 3 se ve que f es siempre negativa en R, así que el volumen de la integral es el negativo del volumen que yace arriba de la gráfica de f y abajo de R.

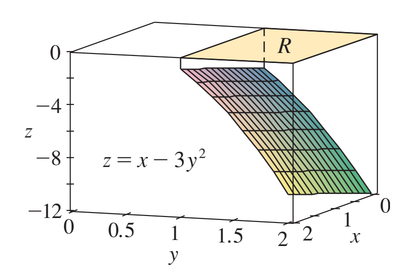


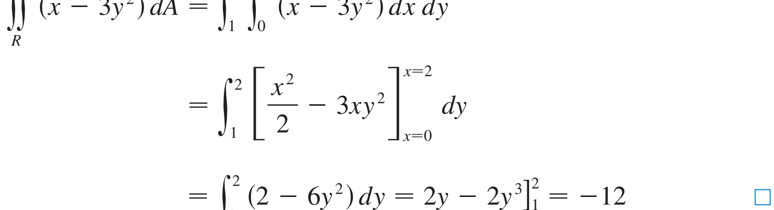
FIGURA 3

SOLUCIÓN 1 El teorema de Fubini da

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 7)\, dx = \frac{x^2}{2} - 7x \Big]_0^2 = -12$$

SOLUCIÓN 2 Al aplicar de nuevo el teorema de Fubini, pero esta vez integrando primero con respecto a x, se obtiene



$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\, dy = 2y - 2y^3\Big]_1^2 = -12$$

□

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_R y\,\text{sen}(xy)\, dA$, donde $R = [1, 2] \times [0, \pi]$.

SOLUCIÓN 1 Si se integra primero con respecto a x, se obtiene

$$\iint_R y\,\text{sen}(xy)\, dA = \int_0^{\pi} \int_1^2 y\,\text{sen}(xy)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \left[-\cos(xy)\right]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^{\pi} (-\cos 2y + \cos y)\, dy$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, 2y + \text{sen}\, y\Big]_0^{\pi} = 0$$

SOLUCIÓN 2 Si se invierte el orden de integración, se obtiene

■ Para una función f que toma valores positivos y negativos, $\iint_R f(x, y)\, dA$ es una diferencia de volúmenes: $V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen arriba de R y abajo de la gráfica de f, y V_2 es el volumen debajo de R y arriba de la gráfica. El hecho de que la integral del ejemplo 3 sea 0 significa que estos dos volúmenes son iguales (véase figura 4).

$$\iint_R y\,\text{sen}(xy)\, dA = \int_1^2 \int_0^{\pi} y\,\text{sen}(xy)\, dy\, dx$$

Para evaluar la integral interna se emplea la integración por partes con

$$u = y \qquad dv = \text{sen}(xy)\, dy$$

$$du = dy \qquad v = -\frac{\cos(xy)}{x}$$

y, por lo tanto,

$$\int_0^{\pi} y\,\text{sen}(xy)\, dy = -\frac{y\cos(xy)}{x}\Big]_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi} \cos(xy)\, dy$$

$$= -\frac{\pi\cos \pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\text{sen}(xy)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi\cos \pi x}{x} + \frac{\text{sen}\,\pi x}{x^2}$$

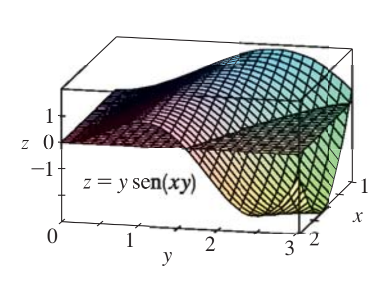


FIGURA 4

Si ahora se integra el primer término por partes con $u = -1/x$ y $dv = \pi \cos \pi x\, dx$, se obtiene $du = dx/x^2$, $v = \operatorname{sen} \pi x$, y

$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x}\right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x} - \int \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2}\, dx$$

Por lo tanto,
$$\int \left(-\frac{\pi \cos \pi x}{x} + \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x^2}\right) dx = -\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$$

■ En el ejemplo 2, las soluciones 1 y 2 son igualmente directas, pero en el ejemplo 3, la primera solución es mucho más fácil que la segunda. Por lo tanto, cuando se evalúan integrales dobles, es sabio elegir el orden de integración que da integrales más simples.

y entonces
$$\int_1^2 \int_0^\pi y \operatorname{sen}(xy)\, dy\, dx = \left[-\frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}\right]_1^2$$
$$= -\frac{\operatorname{sen} 2\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi = 0$$ □

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

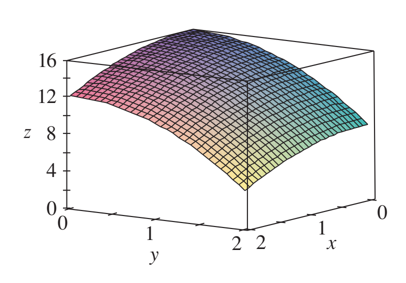


FIGURA 5

SOLUCIÓN Primero se observa que S es el sólido que yace debajo de la superficie $z = 16 - x^2 - 2y^2$ y arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Véase figura 5.) Este sólido se consideró en el ejemplo 1 de la sección 15.1, pero ahora se está en posición de evaluar la integral doble por medio del teorema de Fubini. Por lo tanto

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$$
$$= \int_0^2 \left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$
$$= \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$ □

En el caso especial donde $f(x, y)$ se puede factorizar como el producto de una función de x y una función de y, la integral doble de f se puede escribir en una forma particularmente simple. Para ser específicos, suponga que $f(x, y) = g(x)h(y)$ y $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces el teorema de Fubini da

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b g(x)h(y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx\right] dy$$

En la integral interna y es una constante, así que $h(y)$ es una constante y se puede escribir

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x)h(y)\, dx\right] dy = \int_c^d \left[h(y)\left(\int_a^b g(x)\, dx\right)\right] dy$$
$$= \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy$$

puesto que $\int_a^b g(x)\, dx$ es una constante. Por lo tanto, en este caso, la integral doble de f se puede escribir como el producto de dos integrales simples:

5 $$\iint_R g(x)h(y)\, dA = \int_a^b g(x)\, dx \int_c^d h(y)\, dy \qquad \text{donde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EJEMPLO 5 Si $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, entonces. mediante la ecuación 5

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy$$

$$= \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} \left[\operatorname{sen} y\right]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$ □

■ La función $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ en el ejemplo 5 es positiva en R, así que la integral representa el volumen del sólido que yace arriba de R y abajo de la gráfica de f mostrada en la figura 6.

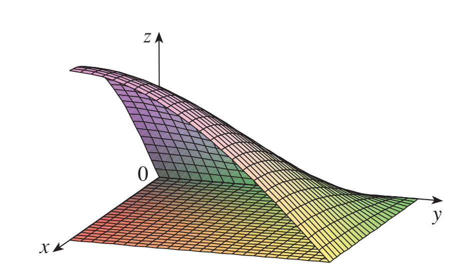


FIGURA 6

15.2 EJERCICIOS

1–2 Determine $\int_0^5 f(x, y)\, dx$ y $\int_0^1 f(x, y)\, dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$

2. $f(x,y) = y + xe^y$

3–14 Calcule la integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\, dy\, dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\, dy\, dx$

7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8\, dx\, dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\, dy\, dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$

10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\, dx\, dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 (u - v)^5\, du\, dv$

12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

13. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta\, dr$

14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\, ds\, dt$

15–22 Calcule la integral doble.

15. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

16. $\iint_R \cos(x + 2y)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

17. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

18. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

19. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\, dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \frac{x}{1 + xy}\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R xye^{x^2y}\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 2]$

22. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dA$, $R = [1, 2] \times [0, 1]$

23–24 Bosqueje el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\, dx\, dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

25. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del plano $3x + 2y + z = 12$ y arriba del rectángulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 3\}$.

26. Determine el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide hiperbólico $z = 4 + x^2 - y^2$ y arriba del cuadrado $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.

27. Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ y arriba del rectángulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

28. Encuentre el volumen del sólido encerrado por la superficie $z = 1 + e^x$ sen y y los planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ y $z = 0$.

29. Determine el volumen del sólido acotado por la superficie $z = x \sec^2 y$ y los planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.

30. Encuentre el volumen del sólido del primer octante limitado por el cilindro $z = 16 - x^2$ y el plano $y = 5$.

31. Encuentre el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ y los planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$, y $y = 4$.

32. Grafique el sólido que se encuentra entre la superficie $z = 2xy/(x^2 + 1)$ y el plano $z = x + 2y$ y está acotado por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, y $y = 4$. A continuación encuentre su volumen.

CAS **33.** Use un sistema algebraico computacional para hallar el valor exacto de la integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Después use el CAS para dibujar el sólido cuyo volumen está dado por la integral.

CAS **34.** Dibuje el sólido que yace entre las superficies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ y $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Use un sistema algebraico computacional para aproximar el volumen de este sólido correcto hasta cuatro decimales.

35–36 Encuentre el valor promedio de f sobre el rectángulo dado.

35. $f(x, y) = x^2 y$, R tiene vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

36. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$, $\quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

CAS **37.** Use un CAS para calcular las integrales iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

¿Las respuestas contradicen al teorema de Fubini? Explique lo que sucede.

38. (a) ¿En qué forma los teoremas de Fubini y Clairaut son similares?

(b) Si $f(x, y)$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$ y

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, demuestre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

Para integrales simples, la región sobre la que se integra es siempre un intervalo. Pero para integrales dobles, se desea poder integrar una función f no sólo sobre rectángulos, sino también sobre regiones D de forma más general, como la que se ilustra en la figura 1. Se supone que D es una región acotada, lo que significa que D puede ser encerrada en una región rectangular R como en la figura 2. Entonces se define una nueva función F con dominio R mediante

1
$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

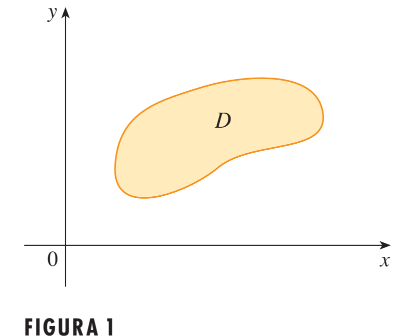


FIGURA 1

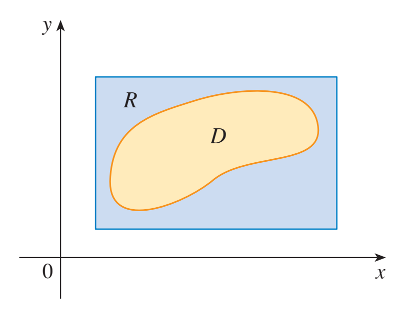


FIGURA 2

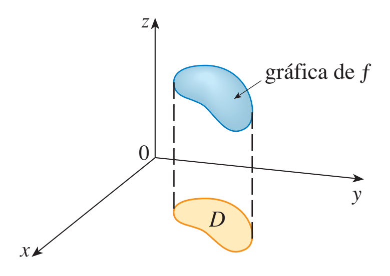


FIGURA 3

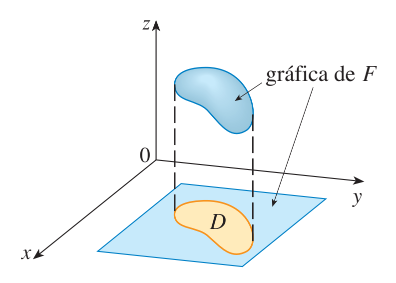


FIGURA 4

Si la integral doble de F existe sobre R, entonces se define la **integral doble de f sobre D** mediante

$$\boxed{2} \qquad \iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{donde } F \text{ está dada por la ecuación 1}$$

La definición 2 tiene sentido porque R es un rectángulo y, por lo tanto, $\iint_R F(x, y)\, dA$ ha sido definida previamente en la sección 15.1. El procedimiento que se usó es razonable, porque los valores de $F(x, y)$ son 0 cuando (x, y) está fuera de D y, por consiguiente, no contribuyen con la integral. Esto significa que no importa qué rectángulo R se use, siempre y cuando contenga a D.

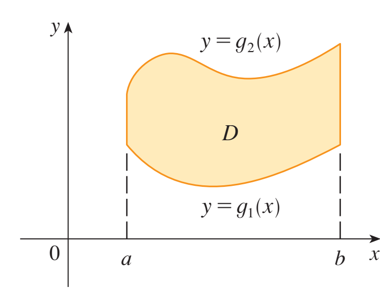
En el caso que $f(x, y) \geqslant 0$ aún se puede interpretar a $\iint_D f(x, y)\, dA$ como el volumen del sólido que yace arriba de D y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ (la gráfica de f). Se puede ver que esto es razonable si se comparan las gráficas de f y F en las figuras 3 y 4 y se recuerda que $\iint_R F(x, y)\, dA$ es el volumen debajo de la gráfica de F.

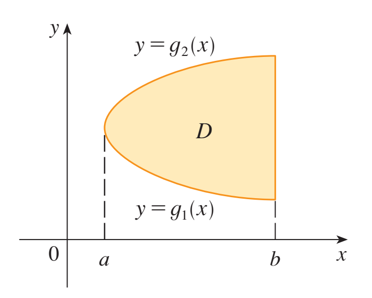
En la figura 4 se muestra también que es probable que F tenga discontinuidades en los puntos límite de D. Sin embargo, si f es continua en D y la curva límite de D tiene un "buen comportamiento" (en un sentido fuera del alcance de este libro), entonces se puede demostrar que $\iint_R F(x, y)\, dA$ existe y, por lo tanto, $\iint_D f(x, y)\, dA$ existe. En particular, éste es el caso para los siguientes tipos de regiones.

Se dice que una región plana es de **tipo I** si yace entre las gráficas de dos funciones continuas de x, es decir,

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$. Algunos ejemplos de regiones tipo I se muestran en la figura 5.





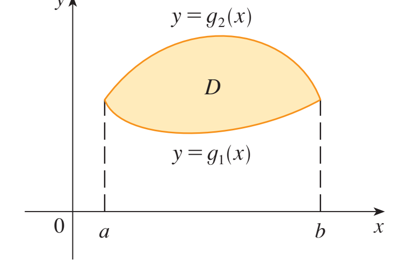


FIGURA 5 Algunas regiones tipo I

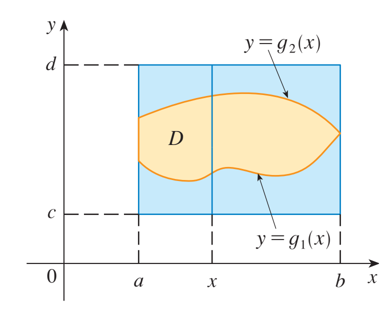


FIGURA 6

A fin de evaluar $\iint_D f(x, y)\, dA$ cuando D es una región de tipo I, se elige un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ que contiene a D, como en la figura 6, y sea F la función dada por la ecuación 1; es decir, F concuerda con f en D y F es 0 fuera de D. Entonces, por el teorema de Fubini,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y)\, dy\, dx$$

Observe que $F(x, y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o $y > g_2(x)$ porque entonces (x, y) está fuera de D. Por lo tanto

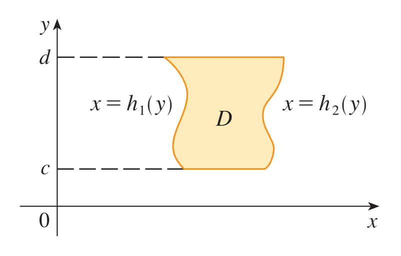
$$\int_c^d F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y)\, dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

porque $F(x, y) = f(x, y)$ cuando $g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)$. Así, se tiene la siguiente fórmula que permite evaluar la integral doble como una integral iterada.

3 Si f es continua en una región D tipo I tal que

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

entonces
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$



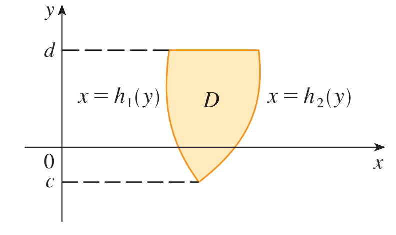


FIGURA 7
Algunas regiones de tipo II

La integral del lado derecho de (3) es una integral iterada que es similar a las consideradas en la sección anterior, excepto que en la integral interna se considera a x como una constante no sólo en $f(x, y)$ sino también en los límites de integración, $g_1(x)$ y $g_2(x)$.

Se consideran también las regiones planas de **tipo II**, que se pueden expresar como

4
$$D = \{(x, y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

donde h_1 y h_2 son continuas. En la figura 7 se ilustran dos regiones de este tipo.

Si se usan los métodos que se emplearon para establecer (3), se puede demostrar que

5
$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

donde D es una región de tipo II dada por la ecuación 4.



V EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_D (x + 2y)\, dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

SOLUCIÓN Las parábolas se cortan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir, $x^2 = 1$, por lo tanto $x = \pm 1$. Se nota que la región D, bosquejada en la figura 8, es una región de tipo I, pero no una región de tipo II y se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

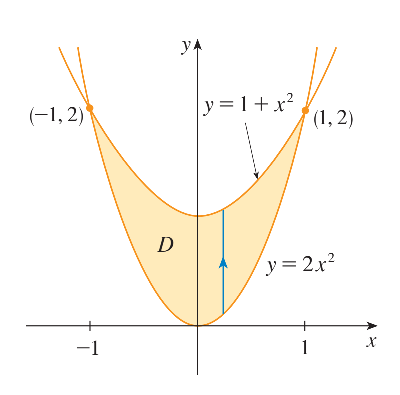


FIGURA 8

Puesto que el límite inferior es $y = 2x^2$ y el límite superior es $y = 1 + x^2$, la ecuación 3 da

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big[xy + y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\
&= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}
\end{aligned}$$

□

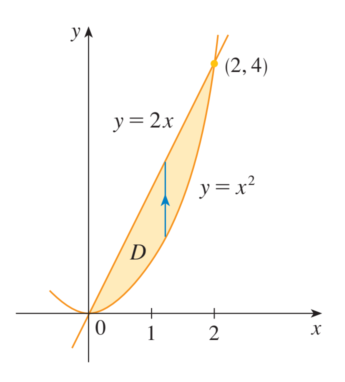


FIGURA 9
D es una región de tipo I

NOTA Cuando se establece una integral doble como en el ejemplo 1, es esencial dibujar un diagrama. A menudo es útil dibujar una flecha vertical como en la figura 8. Entonces los límites de integración de la integral *interna* se leen del diagrama como sigue: la flecha comienza en el límite inferior $y = g_1(x)$, que da el límite inferior en la integral, y la flecha termina en el límite superior $y = g_2(x)$, que da el límite superior de integración. Para una región tipo II, la flecha se traza horizontalmente del límite izquierdo al derecho.

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región D en el plano xy acotado por la línea $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN 1 En la figura 9 se ve que D es una región de tipo I y

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

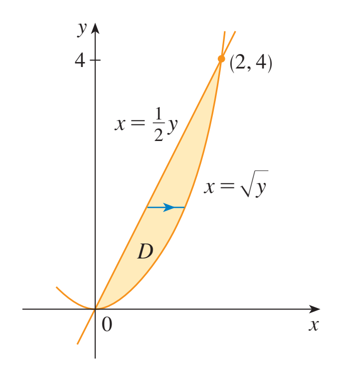


FIGURA 10
D como una región tipo II

Por lo tanto, el volumen debajo de $z = x^2 + y^2$ y arriba de D es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Bigg]_0^2 = \frac{216}{35}$$

SOLUCIÓN 2 De la figura 10 se ve que D se puede escribir también como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\right\}$$

■ En la figura 11 se muestra el sólido cuyo volumen se calculó en el ejemplo 2. Yace arriba del plano xy, debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, y entre el plano $y = 2x$ y el cilindro parabólico $y = x^2$.

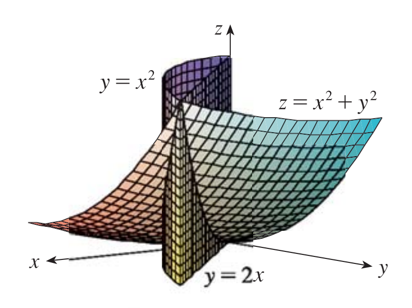


FIGURA 11

Por lo tanto, otra expresión para V es

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy$$

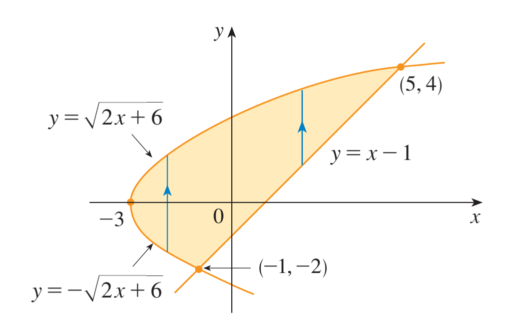
$$= \tfrac{2}{15} y^{5/2} + \tfrac{2}{7} y^{7/2} - \tfrac{13}{96} y^4 \Big]_0^4 = \tfrac{216}{35}$$

□

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_D xy\, dA$, donde D es la región acotada por la línea $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN La región D se muestra en la figura 12. De nuevo D es tipo I y tipo II, pero la descripción de D como una región de tipo I es más complicada porque el límite inferior consta de dos partes. Por lo tanto, se prefiere expresar a D como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \leqslant x \leqslant y + 1\right\}$$



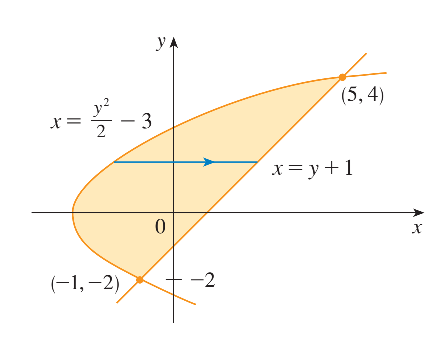


FIGURA 12 (a) D como una región de tipo I (b) D como una región de tipo II

Entonces (5) da

$$\iint_D xy\, dA = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\, dx\, dy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)^2\right] dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right]_{-2}^{4} = 36$$

Si se hubiera expresado a D como una región de tipo I por medio de la figura 12(a), entonces se habría obtenido

$$\iint_D xy\, dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\, dy\, dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\, dy\, dx$$

pero esto habría requerido más trabajo que el otro método. □

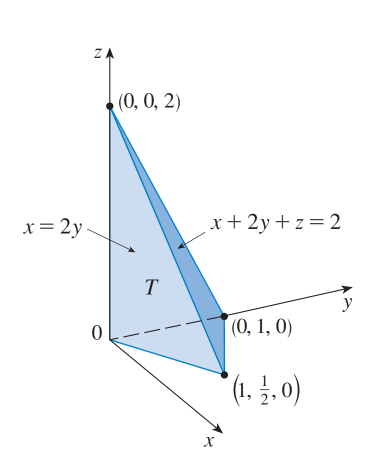


FIGURA 13

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$.

SOLUCIÓN En una pregunta tal como ésta, es aconsejable dibujar dos diagramas: una del sólido tridimensional y otra de la región plana D sobre la cual yace. En la figura 13 se muestra el tetraedro T acotado por los planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, el plano vertical $x = 2y$ y el plano $x + 2y + z = 2$. Puesto que el plano $x + 2y + z = 2$ corta al plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la línea $x + 2y = 2$, se ve que T está arriba de la región triangular D en el plano xy acotado por las líneas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. (Véase figura 14.)

El plano $x + 2y + z = 2$ se puede escribir como $z = 2 - x - 2y$, así que el volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = 2 - x - 2y$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x/2 \leq y \leq 1 - x/2\}$$

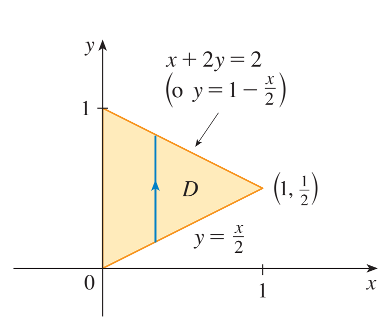


FIGURA 14

Por consiguiente,

$$V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Bigg]_0^1 = \frac{1}{3}$$ □

V EJEMPLO 5 Evalúe la integral iterada $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$.

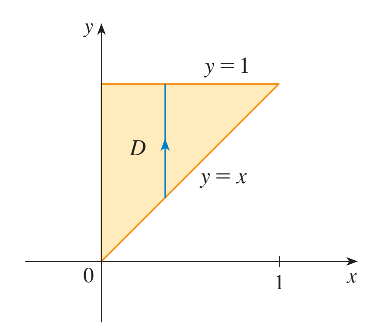


FIGURA 15
D como una región de tipo I

SOLUCIÓN Si se intenta evaluar la integral como está, se enfrenta la tarea de evaluar primero $\int \operatorname{sen}(y^2)\, dy$. Pero es imposible hacerlo en términos finitos, puesto que $\int \operatorname{sen}(y^2)\, dy$ no es una función elemental. (Véase el fin de la sección 7.5.) Así que se debe cambiar el orden de integración. Esto se lleva a cabo al expresar primero la integral iterada dada como una integral doble. Si se usa (3) hacia atrás, se tiene

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

donde $$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x \leqslant y \leqslant 1\}$$

Se bosqueja esta región D en la figura 15. Después, de la figura 16 se ve que una descripción alternativa de D es

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$$

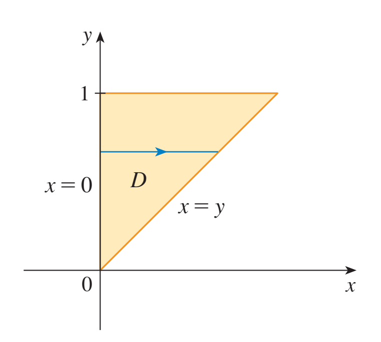


FIGURA 16
D como una región de tipo II

Esto permite usar (5) para expresar la integral doble como una integral iterada en el orden inverso:

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

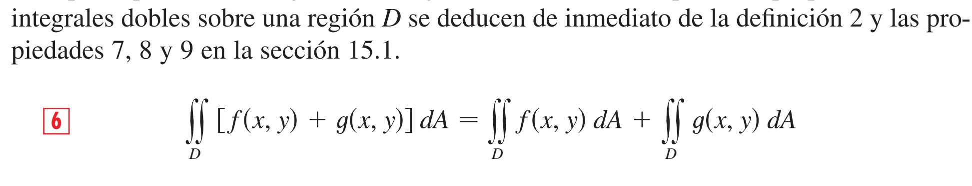
$$= \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[x \operatorname{sen}(y^2)\right]_{x=0}^{x=y} dy$$

$$= \int_0^1 y \operatorname{sen}(y^2)\, dy = -\tfrac{1}{2}\cos(y^2)\Big]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 - \cos 1)$$ □

PROPIEDADES DE INTEGRALES DOBLES

Se supone que todas las siguientes integrales existen. Las tres primeras propiedades de las integrales dobles sobre una región D se deducen de inmediato de la definición 2 y las propiedades 7, 8 y 9 en la sección 15.1.



6 $$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_D f(x, y)\, dA + \iint_D g(x, y)\, dA$$

7 $$\iint_D c f(x, y)\, dA = c \iint_D f(x, y)\, dA$$

Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para toda (x, y) en D, entonces

8 $$\iint_D f(x, y)\, dA \geqslant \iint_D g(x, y)\, dA$$

La siguiente propiedad de las integrales dobles es similar a la propiedad de las integrales simples dada por la ecuación $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.

Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se traslapan excepto quizá en sus límites (véase figura 17), entonces

FIGURA 17

9 $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA$$

La propiedad 9 se puede usar para evaluar las integrales dobles en las regiones D que no son ni tipo I ni II, pero se pueden expresar como una unión de regiones de tipo I o tipo II. En la figura 18 se ilustra este procedimiento. (Véase los ejercicios 51 y 52.)

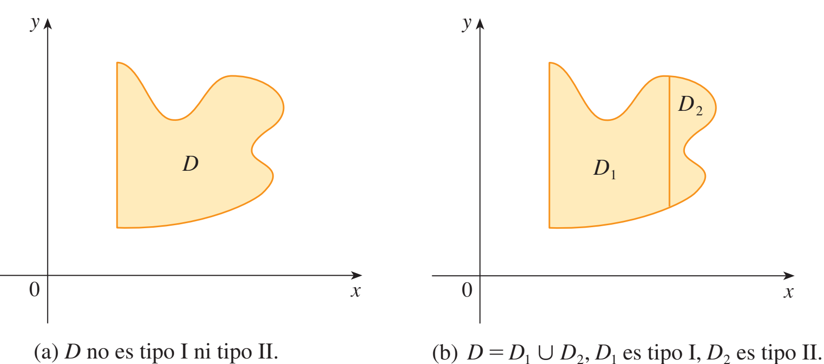


FIGURA 18 (a) D no es tipo I ni tipo II. (b) $D = D_1 \cup D_2$, D_1 es tipo I, D_2 es tipo II.

La siguiente propiedad de las integrales establece que si se integra la función constante $f(x, y) = 1$ sobre una región D, se obtiene el área de D:

10 $$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

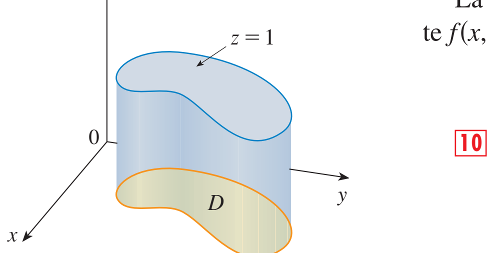


FIGURA 19
Cilindro con base D y altura 1

En la figura 19 se ilustra por qué es cierta la ecuación 10: un cilindro sólido cuya base es D y cuya altura es 1 tiene un volumen $A(D) \cdot 1 = A(D)$, pero se sabe que su volumen se puede escribir también como $\iint_D 1\, dA$.

Por último, se pueden combinar las propiedades 7, 8 y 10 para probar la siguiente propiedad. (Véase el ejercicio 57.)

11 Si $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para toda (x, y) en D, entonces

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EJEMPLO 6 Use la propiedad 11 para estimar la integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, donde D es el disco con centro en el origen y radio 2.

SOLUCIÓN Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ y $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Así, con $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ y $A(D) = \pi(2)^2$ en la propiedad 11, se obtiene

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$ □

15.3 EJERCICIOS

1–6 Evalúe la integral iterada.

1. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xy^2\, dx\, dy$

2. $\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y)\, dy\, dx$

3. $\int_0^1 \int_{x^2}^x (1 + 2y)\, dy\, dx$

4. $\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} e^{\operatorname{sen}\theta}\, dr\, d\theta$

6. $\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7–18 Evalúe la integral doble.

7. $\iint_D y^2\, dA$, $D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ -y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$

8. $\iint_D \frac{y}{x^5 + 1}\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$

9. $\iint_D x\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}$

10. $\iint_D x^3\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. $\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, 0 \leqslant x \leqslant y\}$

12. $\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$

13. $\iint_D x \cos y\, dA$, D está acotada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

14. $\iint_D (x + y)\, dA$, D está acotada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$

15. $\iint_D y^3\, dA$,
D es la región triangular con vértices (0, 2), (1, 1) y (3, 2).

16. $\iint_D xy^2\, dA$, D está encerrada por $x = 0$ y $x = \sqrt{1 - y^2}$

17. $\iint_D (2x - y)\, dA$,
D está acotada por el círculo con centro en el origen y radio 2.

18. $\iint_D 2xy\, dA$, D es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 2) y (0, 3).

19–28 Encuentre el volumen del sólido dado.

19. Debajo del plano $x + 2y - z = 0$ y arriba de la región acotada por $y = x$ y $y = x^4$.

20. Debajo de la superficie $z = 2x + y^2$ y arriba de la región acotada por $x = y^2$ y $x = y^3$.

21. Debajo de la superficie $z = xy$ y arriba del triángulo con vértices (1, 1), (4, 1) y (1, 2).

22. Encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$.

23. Acotado por los planos coordenados y el plano $3x + 2y + z = 6$.

24. Acotado por los planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ y $z = 0$.

25. Acotado por los cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 4$.

26. Acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y los planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante.

27. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ en el primer octante.

28. Acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$.

29. Use una calculadora o computadora para estimar las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = x^4$ y $y = 3x - x^2$. Si D es la región acotada por estas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

30. Encuentre el volumen aproximado del sólido en el primer octante que está acotado por los planos $y = x$, $z = 0$ y $z = x$ y el cilindro $y = \cos x$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección.)

31–32 Encuentre el volumen del sólido restando dos volúmenes.

31. El sólido encerrado por los cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ y los planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$.

32. El sólido encerrado por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $z = 3y$, $z = 2 + y$.

33–34 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

33. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$ **34.** $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

CAS **35–38** Use un sistema algebraico computacional para hallar el volumen exacto del sólido.

35. Debajo de la superficie $z = x^3y^4 + xy^2$ y arriba de la región acotada por las curvas $y = x^3 - x$ y $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$.

36. Entre los paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - 2y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

37. Encerrado por $z = 1 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

38. Encerrado por $z = x^2 + y^2$ y $z = 2y$.

39–44 Bosqueje la región de integración y cambie el orden de integración.

39. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy\, dx$ **40.** $\int_0^1 \int_{4x}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

41. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$ **42.** $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x, y)\, dx\, dy$

43. $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$ **44.** $\int_0^1 \int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

45–50 Evalúe la integral invirtiendo el orden de integración.

45. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ **46.** $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy$

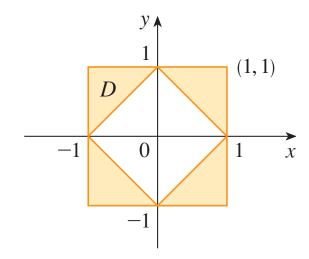
47. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \dfrac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$ **48.** $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

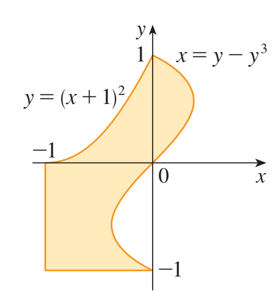
49. $\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

50. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

51–52 Exprese a D como una unión de regiones del tipo I o tipo II y evalúe la integral.

51. $\iint_D x^2\, dA$ **52.** $\iint_D xy\, dA$





53–54 Use la propiedad 11 para estimar el valor de la integral.

53. $\iint_D e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q es el cuarto de círculo con centro en el origen y radio $\frac{1}{2}$ en el primer cuadrante.

54. $\iint_D \operatorname{sen}^4(x + y)\, dA$, T es el triángulo encerrado por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, y $x = 1$

55–56 Encuentre el valor promedio de f sobre la región D.

55. $f(x, y) = xy$, D es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, y $(1, 3)$

56. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, D está encerrado por las curvas $y = 0$, $y = x^2$ y $x = 1$

57. Demuestre la Propiedad 11.

58. Al evaluar una integral doble sobre una región D, se obtuvo una suma de integrales iteradas como sigue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Bosqueje la región D y exprese la integral doble como una integral iterada con orden inverso de integración.

59. Evalúe $\iint_D (x^2 \tan x + y^3 + 4)\, dA$, donde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\}$.
[*Sugerencia*: explote el hecho de que D es simétrica con respecto a ambos ejes.]

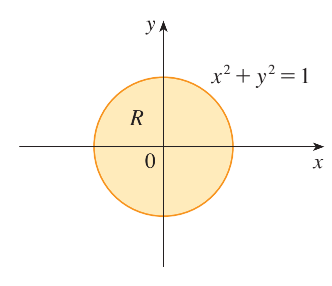
60. Use simetría para evaluar $\iint_D (2 - 3x + 4y)\, dA$, donde D es la región acotada por el cuadrado con vértices $(\pm 5, 0)$ y $(0, \pm 5)$.

61. Calcule $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, identificando primero la integral como el volumen del sólido.

CAS **62.** Dibuje el sólido acotado por el plano $x + y + z = 1$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y encuentre su volumen exacto. (Use su CAS para construir la gráfica, hallar las ecuaciones de las curvas límite de la región de integración y evaluar la integral doble.)

15.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

Suponga que se desea evaluar una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es una de las regiones mostradas en la figura 1. En cualquier caso, la descripción de R en términos de coordenadas rectangulares es bastante complicada, pero R se describe fácilmente por medio de coordenadas polares.



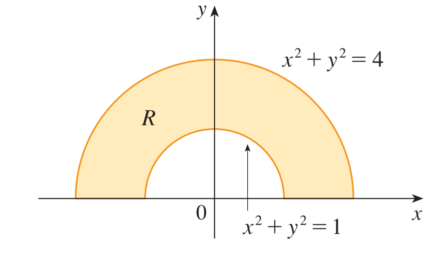


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

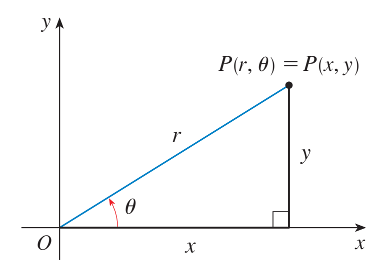


FIGURA 2

Recuerde de la figura 2 que las coordenadas polares (r, θ) de un punto se relacionan con las coordenadas rectangulares (x, y) mediante las ecuaciones

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

(Véase la sección 10.3.)

Las regiones de la figura 1 son casos especiales de un **rectángulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

que se muestra en la figura 3. A fin de calcular la integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, donde R es un rectángulo polar, se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de igual amplitud $\Delta r = (b - a)/m$ y se divide el intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de igual amplitud $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Entonces los círculos $r = r_i$ y los rayos $\theta = \theta_j$ dividen al rectángulo polar R en pequeños rectángulos polares mostrados en la figura 4.

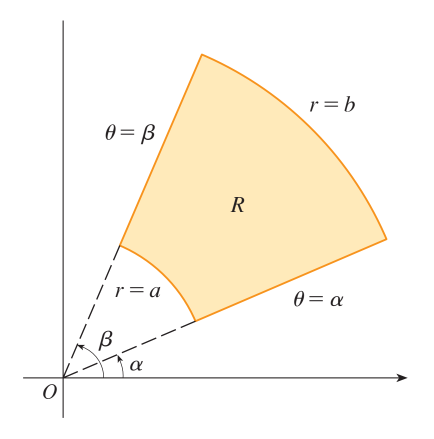


FIGURA 3 Rectángulo polar

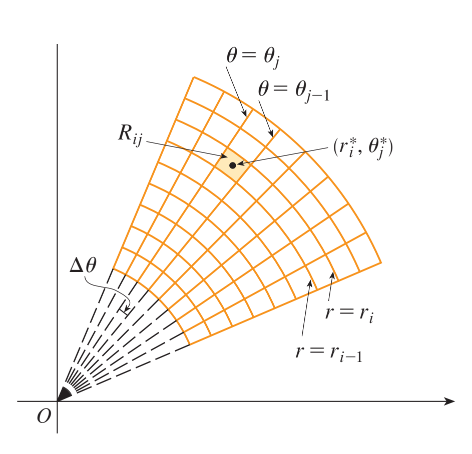


FIGURA 4 División de R en subrectángulos

El "centro" del subrectángulo polar

$$R_{ij} = \{(r, \theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

tiene coordenadas polares

$$r_i^* = \tfrac{1}{2}(r_{i-1} + r_i) \qquad \theta_j^* = \tfrac{1}{2}(\theta_{j-1} + \theta_j)$$

Se calcula el área de R_{ij} usando el hecho de que el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ es $\frac{1}{2}r^2\theta$. Al restar las áreas de dos sectores de esta clase, cada uno de los cuales tiene ángulo central $\Delta\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, se encuentra que el área de R_{ij} es

$$\begin{aligned}\Delta A_i &= \tfrac{1}{2}r_i^2\Delta\theta - \tfrac{2}{2}r_{i-1}^1\Delta\theta = \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\,\Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\,\Delta\theta = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta\end{aligned}$$

Aunque se ha definido la integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ en términos de rectángulos ordinarios, se puede demostrar que, para funciones continuas f, se obtiene siempre la misma respuesta por medio de rectángulos polares. Las coordenadas rectangulares del centro de R_{ij} son $(r_i^* \cos \theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen} \theta_j^*)$, de modo que una suma de Riemann representativa es

$$\boxed{1} \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\, r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

Si se escribe $g(r, \theta) = rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, entonces la suma de Riemann en la ecuación 1 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta$$

que es una suma de Riemann para la integral doble

$$\int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y)\,dA &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \operatorname{sen}\theta_j^*)\,\Delta A_i \\ &= \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(r_i^*, \theta_j^*)\,\Delta r\,\Delta\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b g(r, \theta)\,dr\,d\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

2 CAMBIO A COORDENADAS POLARES EN UNA INTEGRAL DOBLE Si f es continua en un rectángulo polar R dado por $0 \leqslant a \leqslant r \leqslant b$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, donde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

La fórmula en (2) dice que se convierte de coordenadas rectangulares a polares en una integral doble si se escribe $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$, al usar los límites de integración apropiados para r y θ, y remplazar dA por $r\,dr\,d\theta$. Tenga cuidado de no olvidar el factor adicional r en el lado derecho de la fórmula 2. Un método clásico para recordar esto se muestra en la figura 5, donde el rectángulo polar "infinitesimal" se puede considerar como un rectángulo ordinario con dimensiones $r\,d\theta$ y dr y, por lo tanto, tiene "área" $dA = r\,dr\,d\theta$.

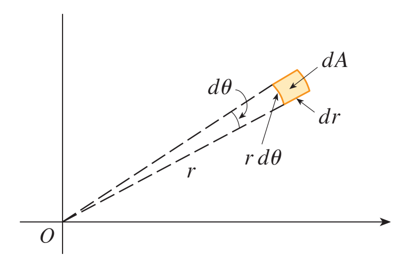


FIGURA 5

EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_R (3x + 4y^2)\,dA$, donde R es la región en el semiplano superior acotado por los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN La región R se puede describir como

$$R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

Es la mitad de anillo mostrada en la figura 1(b), y en coordenadas polares está dada por $1 \leqslant r \leqslant 2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Por lo tanto, por la fórmula 2,

$$\iint_R (3x + 4y^2)\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\operatorname{sen}^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\operatorname{sen}^2\theta)\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[r^3\cos\theta + r^4\operatorname{sen}^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta$$

■ Aquí se usa la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Véase en la sección 7.2 una recomendación acerca de la integración de funciones trigonométricas.

$$= \int_0^{\pi}\left[7\cos\theta + \tfrac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= 7\operatorname{sen}\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\operatorname{sen}2\theta\Bigg]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}$$ □

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

SOLUCIÓN Si $z = 0$ en la ecuación del paraboloide, se obtiene $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que el plano corta al paraboloide en el círculo $x^2 + y^2 = 1$, así que el sólido está debajo del paraboloide y arriba del disco circular D dado por $x^2 + y^2 \leqslant 1$ [véase las figuras 6 y 1(a)]. En coordenadas polares D está dada por $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Puesto que $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$, el volumen es

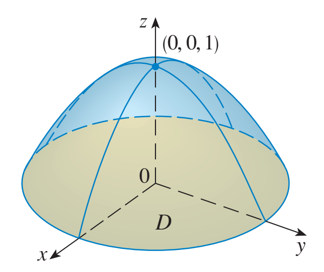


FIGURA 6

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\,dr = 2\pi\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Si se hubieran empleado coordenadas rectangulares en lugar de coordenadas polares, entonces se habría obtenido

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

que no es fácil evaluar, porque se requiere hallar la siguiente integral:

$$\int (1 - x^2)^{3/2}\, dx$$ □

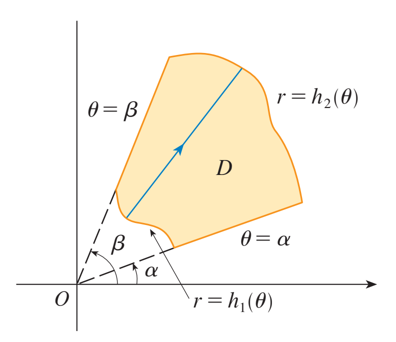


FIGURA 7
$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$

Lo que se ha hecho hasta aquí se puede extender al tipo de región más complicada de la figura 7. Es similar a las regiones rectangulares tipo II consideradas en la sección 15.3. De hecho, al combinar la fórmula 2 de esta sección con la fórmula 15.3.5, se obtiene la siguiente fórmula.

3 Si f es continua en una región polar de la forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

entonces $$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

En particular, si se toma $f(x, y) = 1$, $h_1(\theta) = 0$ y $h_2(\theta) = h(\theta)$ en esta fórmula, se ve que el área de la región D acotada por $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y $r = h(\theta)$ es

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}[h(\theta)]^2\, d\theta$$

y esto concuerda con la fórmula 10.4.3.

V EJEMPLO 3 Use la integral doble para hallar el área encerrada por un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN Del bosquejo de la curva en la figura 8 se ve que el pétalo está dado por la región

$$D = \left\{(r, \theta) \mid -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant r \leqslant \cos 2\theta\right\}$$

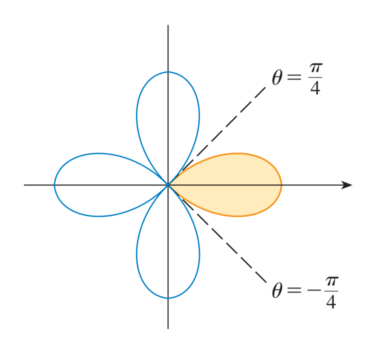


FIGURA 8

Así que el área es

$$A(D) = \iint_D dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_{0}^{\cos 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{\cos 2\theta} d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta)\, d\theta = \tfrac{1}{4}\left[\theta + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ □

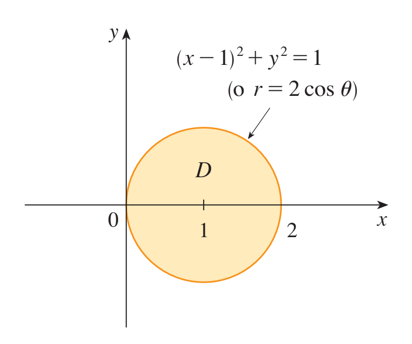


FIGURA 9

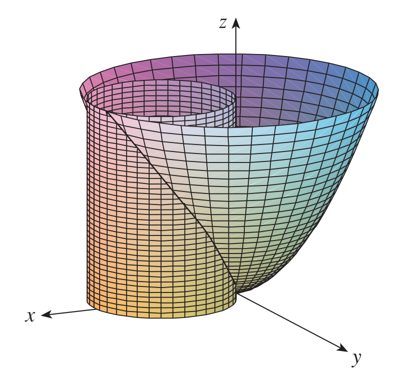


FIGURA 10

V EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUCIÓN El sólido yace arriba del disco D cuyo círculo límite tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ o bien, después de completar el cuadrado,

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

(véanse las figuras 9 y 10). En coordenadas polares se tiene $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r\cos\theta$, por lo tanto el círculo límite se convierte en $r^2 = 2r\cos\theta$, o $r = 2\cos\theta$. Así, el disco D está dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

y, por la fórmula 3, se tiene

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

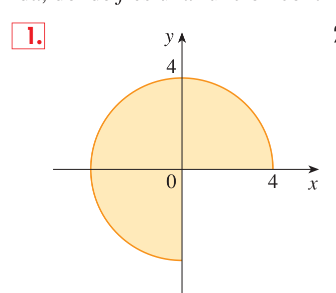
$$= 2\int_0^{\pi/2}\left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right]d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$ □

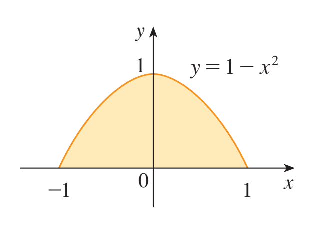
15.4 EJERCICIOS

1–4 Se muestra una región R. Decida si emplea coordenadas polares o rectangulares y escriba $\iint_R f(x, y)\,dA$ como una integral iterada, donde f es una función continua arbitraria en R.

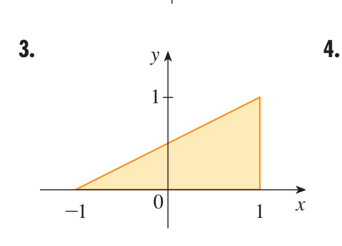
1.



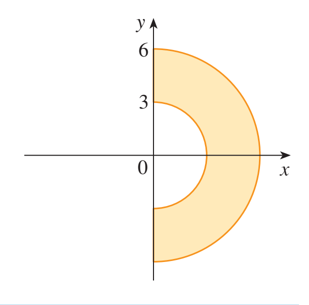
2.



3.



4.



5–6 Bosqueje la región cuya área está dada por la integral y evalúe la integral.

5. $\int_{\pi}^{2\pi}\int_4^7 r\,dr\,d\theta$

6. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

7–14 Evalúe la integral dada cambiando a coordenadas polares.

7. $\iint_D xy\,dA$,
donde D es el disco con centro en el origen y radio 3.

8. $\iint_R (x + y)\,dA$, donde R es la región que yace a la izquierda del eje y entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

9. $\iint_R \cos(x^2 + y^2)\,dA$, donde R es la región localizada arriba del eje x dentro del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

10. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dA$,
donde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, donde D es la región acotada por el semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ y el eje y.

12. $\iint_R ye^x\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante encerrado por el círculo $x^2 + y^2 = 25$.

13. $\iint_R \arctan(y/x)\, dA$,
donde $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq x\}$

14. $\iint_D x\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante localizada entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 2x$.

15–18 Use una integral doble para hallar el área de la región.

15. Un pétalo de la rosa $r = \cos 3\theta$.

16. La región encerrada por la curva $r = 4 + 3 \cos \theta$.

17. La región dentro de los círculos $r = \cos \theta$ y $r = \operatorname{sen} \theta$.

18. La región dentro del cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$

19–27 Use coordenadas polares para hallar el volumen del sólido.

19. Debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba del disco $x^2 + y^2 \leq 4$.

20. Abajo del paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ y arriba del plano xy

21. Encerrada por el hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = 2$

22. Dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

23. Una esfera de radio a.

24. Acotado por el paraboloide $z = 1 + 2x^2 + 2y^2$ y el plano $z = 7$ en el primer octante.

25. Arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

26. Acotado por los paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$.

27. Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.

---

28. (a) Se usa una broca cilíndrica con radio r_1 para hacer una perforación por el centro de una esfera de radio r_2. Encuentre el volumen del sólido en forma de anillo que queda.
(b) Exprese el volumen del inciso (a) en términos de la altura h del anillo. Observe que el volumen depende sólo de h, no de r_1 o r_2.

29–32 Evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

29. $\int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dy\, dx$

30. $\int_{0}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2 y\, dx\, dy$

31. $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\, dx\, dy$

32. $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

---

33. Una alberca es circular con un diámetro de 40 pies. La profundidad es constante a lo largo de las líneas este-oeste y se incrementa de forma lineal desde 2 pies en el extremo sur hasta 7 pies en el extremo norte. Determine el volumen del agua en la alberca.

34. Un aspersor agrícola distribuye agua en un patrón circular de radio 100 pies. Suministra agua a una profundidad de e^{-r} pies por hora a una distancia de r pies desde el aspersor.
(a) $0 < R \leq 100$ ¿Cuál es la cantidad total de agua suministrada por hora a la región dentro del círculo de radio R centrado en el rociador?
(b) Determine una expresión para la cantidad promedio de agua por hora por pie cuadrado suministrada a la región dentro del círculo de radio R.

35. Use las coordenadas polares para combinar la suma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dy\, dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy\, dy\, dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\, dy\, dx$$

en una integral doble. Después evalúe la integral doble.

36. (a) Se define la integral impropia (sobre el plano $\mathbb{R}^2$ completo)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$
$$= \lim_{a \to \infty} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde D_a es el disco con radio a y centro en el origen. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \pi$$

(b) Una definición equivalente de la integral impropia del inciso (a) es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dA = \lim_{a \to \infty} \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

donde S_a es el cuadrado con vértices $(\pm a, \pm a)$. Use esto para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \pi$$

(c) Deduzca que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Mediante el cambio de variable $t = \sqrt{2}\, x$, demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

(Éste es un resultado fundamental para probabilidad y estadística.)

37. Use el resultado del ejercicio 36 inciso (c) para evaluar las siguientes integrales.

(a) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx$ (b) $\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx$

15.5 APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Ya se ha visto una aplicación de las integrales dobles: cálculo de volúmenes. Otra aplicación geométrica es hallar áreas de superficies y esto se hará en la sección 16.6. En esta sección se exploran aplicaciones físicas como calcular la masa, carga eléctrica, centro de masa y momento de inercia. Se verá que estas ideas son importantes también cuando se aplican a funciones de densidad de probabilidad de dos variables aleatorias.

DENSIDAD Y MASA

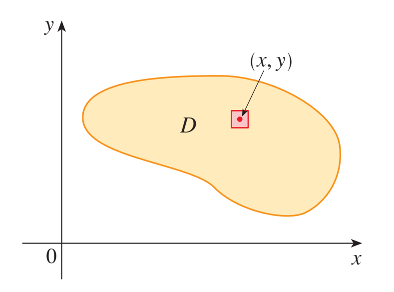


FIGURA 1

En la sección 8.3 fue posible usar las integrales simples para calcular momentos y el centro de masa de una delgada placa o lámina con densidad constante. Pero ahora equipado con la integral doble, puede considerar una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa una región D del plano xy y su **densidad** (en unidades de masa por unidad de área) en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x, y)$, donde ρ es una función continua en D. Esto significa que

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

donde Δm y ΔA son la masa y el área de un rectángulo pequeño que contiene a (x, y) y el límite se toma cuando las dimensiones del rectángulo se aproximan a 0. (Véase figura 1.)

Para hallar la masa total m de la lámina, se divide un rectángulo R que contiene a D en subrectángulos R_{ij} del mismo tamaño (como en la figura 2) y se considera que $\rho(x, y)$ es 0 fuera de D. Si se elige un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en R_{ij}, entonces la masa de la parte de la lámina que ocupa R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, donde ΔA es el área de R_{ij}. Si se suman todas las masas, se obtiene una aproximación de la masa total:

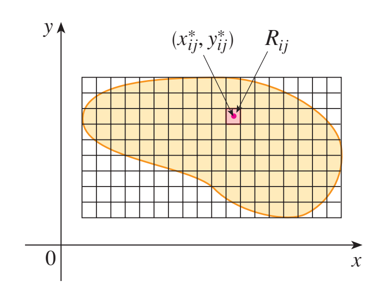


FIGURA 2

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

Si ahora se incrementa el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor límite de las aproximaciones:

1 $$m = \lim_{k,\,l \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$

Los físicos consideran también otros tipos de densidad que se pueden tratar de la misma manera. Por ejemplo, si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por área unitaria) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D, entonces la carga total Q está dada por

2 $$Q = \iint_D \sigma(x, y)\,dA$$

EJEMPLO 1 La carga está distribuida sobre la región triangular D en la figura 3 de modo que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m^2). Determine la carga total.

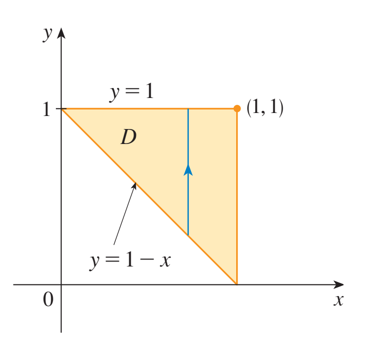


FIGURA 3

SOLUCIÓN De la ecuación 2 y la figura 3 se tiene

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2 - (1-x)^2]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{24}$$

Así, la carga total es $\frac{5}{24}$ C. □

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA

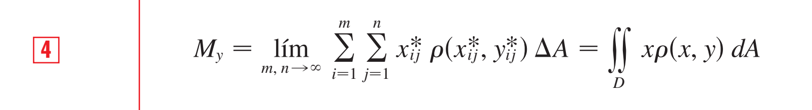
En la sección 8.3 se encuentra el centro de masa de una lámina con densidad constante; aquí se considera una lámina con densidad variable. Suponga que la lámina ocupa una región D y tiene la función de densidad $\rho(x, y)$. Recuerde del capítulo 8 que el momento de una partícula se define respecto a un eje como el producto de su masa y su distancia dirigida desde el eje. Se divide a D en rectángulos pequeños como en la figura 2. Entonces la masa de R_{ij} es aproximadamente $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$, así que el momento de R_{ij} con respecto al eje x se puede aproximar mediante

$$[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A]\, y_{ij}^*$$

Si ahora se suman estas cantidades y se toma el límite cuando el número de subrectángulos se vuelve grande, se obtiene el **momento** de toda la lámina **respecto al eje** x:

3
$$M_x = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y\rho(x, y)\, dA$$

De manera similar, el **momento respecto al eje** y es



4
$$M_y = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\, \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x\rho(x, y)\, dA$$

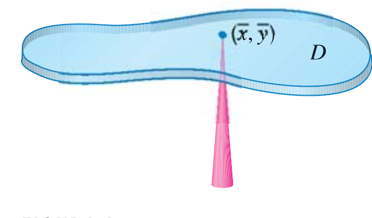


FIGURA 4

Como antes, se define el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ tal que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. El significado físico es que la lámina se comporta como si toda su masa se concentrara en su centro de masa. Así, la lámina se equilibra horizontalmente cuando se apoya en su centro de masa (véase figura 4).

5 Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa de una lámina que ocupa la región D y que tiene función de densidad $\rho(x, y)$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x, y)\, dA \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x, y)\, dA$$

donde la masa m está dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA$$

V EJEMPLO 2 Encuentre la masa y el centro de masa de una lámina triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 2) si la función de densidad es $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

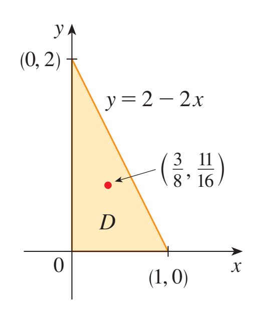


FIGURA 5

SOLUCIÓN El triángulo se muestra en la figura 5. (Note que la ecuación de la cota superior es $y = 2 - 2x$.) La masa de la lámina es

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 4\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}$$

Entonces las fórmulas en (5) dan

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[xy + 3x^2 y + x\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3)\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA = \tfrac{3}{8} \int_0^1 \int_0^{2-2x} (y + 3xy + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx = \tfrac{1}{4} \int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[7x - 9\frac{x^2}{2} - x^3 + 5\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{11}{16}$$

El centro de masa está en el punto $\left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{11}{16}\right)$. □

V EJEMPLO 3 La densidad en cualquier punto sobre una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Encuentre el centro de masa de la lámina.

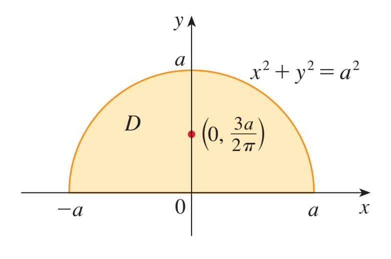


FIGURA 6

SOLUCIÓN Coloque la lámina como la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ (véase figura 6). Entonces la distancia de un punto (x, y) al centro del círculo (el origen) es $\sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto, la función de densidad es

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

donde K es alguna constante. Tanto la función de densidad como la forma de la lámina hacen pensar que se convierta a coordenadas polares. Entonces $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ y la región D está dada por $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Así, la masa de la lámina es

$$m = \iint_D \rho(x, y)\, dA = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \int_0^\pi \int_0^a (Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= K \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^2\, dr = K\pi \frac{r^3}{3}\bigg]_0^a = \frac{K\pi a^3}{3}$$

Tanto la lámina como la función de densidad son simétricas con respecto al eje y, así que el centro de masa debe estar sobre el eje y, es decir, $\bar{x} = 0$. La coordenada y está dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x, y)\, dA = \frac{3}{K\pi a^3} \int_0^{\pi} \int_0^a r \operatorname{sen} \theta\, (Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta\, d\theta \int_0^a r^3\, dr = \frac{3}{\pi a^3} \left[-\cos \theta\right]_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \frac{3}{\pi a^3} \frac{2a^4}{4} = \frac{3a}{2\pi}$$

■ Compare la ubicación del centro de masa del ejemplo 3 con el ejemplo 4 de la sección 8.3 donde se encontró que el centro de masa de una lámina con la misma forma pero densidad uniforme se localiza en el punto $(0, 4a/(3\pi))$.

Por lo tanto, el centro de masa se localiza en el punto $(0, 3a/(2\pi))$. □

MOMENTO DE INERCIA

El **momento de inercia** (conocido también como **segundo momento**) de una partícula de masa m respecto a un eje se define como mr^2, donde r es la distancia desde la partícula al eje. A fin de ampliar este concepto a una lámina que tiene función de densidad $\rho(x, y)$ y ocupa una región D se procede como se hizo para momentos ordinarios. Se divide a D en rectángulos pequeños, se aproxima el momento de inercia de cada subrectángulo respecto al eje x, y se toma el límite de la suma cuando el número de subrectángulos se vuelve grande. El resultado es el **momento de inercia** de la lámina **respecto al eje x**:

6 $$I_x = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA$$

De manera similar, el **momento de inercia respecto al eje y** es

7 $$I_y = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2 \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

También es de interés considerar el **momento de inercia respecto al origen**, conocido también como **momento polar de inercia**:

8 $$I_0 = \lim_{m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right] \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y)\, dA$$

Note que $I_0 = I_x + I_y$.

V EJEMPLO 4 Encuentre los momentos de inercia I_x, I_y e I_0 de un disco homogéneo D con densidad $\rho(x, y) = \rho$, centro en el origen y radio a.

SOLUCIÓN El límite de D es el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y en coordenadas polares D se describe mediante $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant a$. Primero se calculará I_0:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = 2\pi\rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

En lugar de calcular I_x e I_y de manera directa, se usan los hechos de que $I_x + I_y = I_0$ e $I_x = I_y$ (de la simetría del problema). Así,

$$I_x = I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi\rho a^4}{4}$$ □

En el ejemplo 4 observe que la masa del disco es

$$m = \text{densidad} \times \text{área} = \rho(\pi a^2)$$

de modo que el momento de inercia del disco respecto al origen (como una rueda respecto a su eje) se puede escribir como

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{4}\, \tfrac{1}{2}(\pi\rho a^2)a^2 = \tfrac{1}{2}ma^2$$

Así, si se incrementa la masa o el radio del disco, se incrementa entonces el momento de inercia. En general, el momento de inercia juega el mismo papel en el movimiento rotacional que la masa juega en el movimiento lineal. El momento de inercia de una rueda es lo que hace difícil empezar o detener la rotación de la rueda, del mismo modo que la masa de un automóvil dificulta iniciar o detener el movimiento de un automóvil.

El **radio de giro de una lámina respecto a un eje** es el número R tal que

9 $$mR^2 = I$$

donde m es la masa de la lámina, e I es el momento de inercia respecto al eje dado. La ecuación 9 dice que si la masa de la lámina se concentrara a una distancia R del eje, entonces el momento de inercia de esta "masa puntual" sería la misma que el momento de inercia de la lámina.

En particular, el radio de giro $\bar{\bar{y}}$ con respecto al eje x y el radio de giro $\bar{\bar{x}}$ con respecto al eje y están dados por las ecuaciones

10 $$m\bar{\bar{y}}^2 = I_x \qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y$$

Así, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ es el punto en que la masa de la lámina se puede concentrar sin cambiar los momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados. (Note la analogía con el centro de masa.)

V EJEMPLO 5 Encuentre el radio de giro respecto al eje x del disco del ejemplo 4.

SOLUCIÓN Como se observó, la masa del disco es $m = \rho\pi a^2$, así que de las ecuaciones 10 se tiene

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

Por lo tanto, el radio de giro respecto al eje x es $\bar{\bar{y}} = \frac{1}{2}a$ que es la mitad del radio del disco. □

PROBABILIDAD

En la sección 8.5 se consideró la *función de densidad de probabilidad* f de una variable continua aleatoria X. Esto significa que $f(x) \geqslant 0$ para toda x, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, y la probabilidad de que X esté entre a y b se encuentra al integrar f de a a b:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Ahora se considera un par de variables aleatorias continuas X y Y, como los tiempos de vida de dos componentes de una máquina o la altura y peso de una mujer adulta elegida al azar. La **función de densidad conjunta** de X y Y es una función f de dos variables tal que la probabilidad de que (X, Y) esté en una región D es

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dA$$

En particular, si una región es un rectángulo, la probabilidad de que X esté entre a y b y que Y esté entre c y d es

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

(Véase figura 7.)

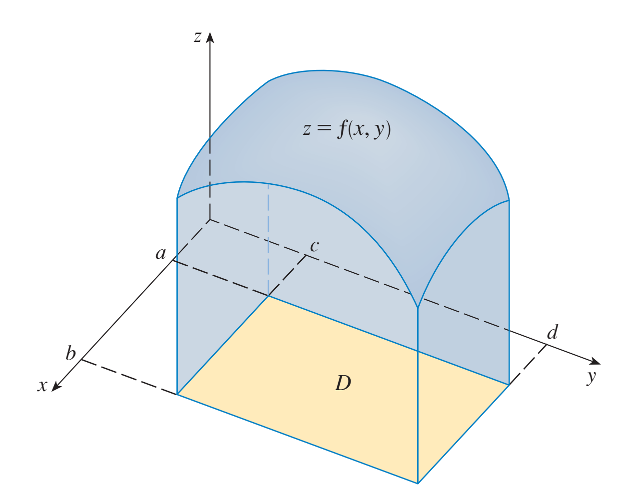


FIGURA 7

La probabilidad de que X esté entre a y b, y que Y esté entre c y d es el volumen localizado arriba del rectángulo $D = [a, b] \times [c, d]$ y debajo de la función de densidad conjunta.

Debido a que las probabilidades no son negativas y se miden en una escala de 0 a 1, la función de densidad conjunta tiene las siguientes propiedades:

$$f(x, y) \geqslant 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = 1$$

Como en el ejercicio 36 de la sección 15.4, la integral doble sobre $\mathbb{R}^2$ es una integral impropia definida como el límite de integrales dobles sobre círculos o cuadrados que se expanden y se puede escribir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

EJEMPLO 6 Si la función de densidad conjunta para X y Y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + 2y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10,\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

encuentre el valor de la constante C. Después determine $P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2)$.

SOLUCIÓN Se encuentra el valor de C al asegurar que la integral doble de f es igual a 1. Debido a que $f(x, y) = 0$ fuera del rectángulo $[0, 10] \times [0, 10]$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\,dx = \int_0^{10}\int_0^{10} C(x + 2y)\,dy\,dx = C\int_0^{10} \Big[xy + y^2\Big]_{y=0}^{y=10} dx$$

$$= C\int_0^{10} (10x + 100)\,dx = 1500C$$

Por lo tanto, $1500C = 1$ y, entonces, $C = \frac{1}{1500}$.

Ahora se puede calcular la probabilidad de que X sea a lo sumo 7 y Y sea por lo menos 2:

$$P(X \leqslant 7, Y \geqslant 2) = \int_{-\infty}^{7}\int_{2}^{\infty} f(x, y)\,dy\,dx = \int_0^7\int_2^{10} \tfrac{1}{1500}(x + 2y)\,dy\,dx$$

$$= \tfrac{1}{1500}\int_0^7 \Big[xy + y^2\Big]_{y=2}^{y=10} dx = \tfrac{1}{1500}\int_0^7 (8x + 96)\,dx$$

$$= \tfrac{868}{1500} \approx 0.5787$$ □

Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_1(x)$ y Y es una variable aleatoria con función de densidad $f_2(y)$. Entonces X y Y se llaman **variables aleatorias independientes** si su función de densidad conjunta es el producto de sus funciones de densidad individuales:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

En la sección 8.5, se modelaron tiempos de espera por medio de funciones de densidad exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donde μ es el tiempo de espera promedio. En el ejemplo siguiente se considera una situación con dos tiempos de espera independientes.

EJEMPLO 7 El administrador de un cine determina que el tiempo promedio que los asistentes esperan en la fila para comprar un boleto para la película de esta semana es 10 minutos y el tiempo promedio que esperan para comprar palomitas es 5 minutos. Si se supone que los tiempos de espera son independientes, encuentre la probabilidad de que una persona espere un total de menos de 20 minutos antes de tomar su lugar.

SOLUCIÓN Si se supone que tanto el tiempo de espera X para la compra del boleto como el tiempo de espera Y en la fila para comprar golosinas se modelan mediante funciones de densidad de probabilidad exponenciales, se pueden escribir cada una de las funciones de densidad como

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{5}e^{-y/5} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}$$

Puesto que X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5} & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

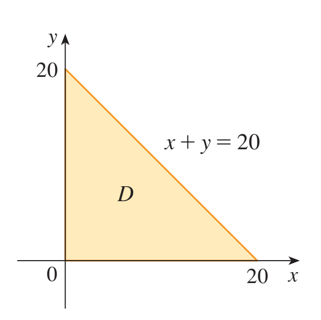


FIGURA 8

Se pide la probabilidad de que $X + Y < 20$:

$$P(X + Y < 20) = P((X, Y) \in D)$$

donde D es la región triangular mostrada en la figura 8. Así que

$$P(X + Y < 20) = \iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^{20} \int_0^{20-x} \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{50} \int_0^{20} \left[e^{-x/10}(-5)e^{-y/5}\right]_{y=0}^{y=20-x} dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^{20} e^{-x/10}(1 - e^{(x-20)/5})\, dx$$

$$= \frac{1}{10} \int_0^{20} (e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10})\, dx$$

$$= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476$$

Esto significa que cerca de 75% de los asistentes al cine esperan menos de 20 minutos antes de tomar sus lugares. □

VALORES ESPERADOS

Recuerde de la sección 8.5 que si X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f, entonces su *media* es

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Ahora si X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta f, se define la ***X* media** y la ***Y* media**, denominados también valores esperados de X y Y, como

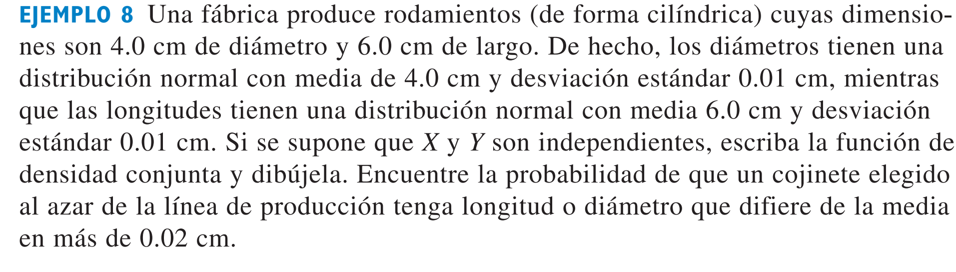
11 $$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x f(x, y)\, dA \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y f(x, y)\, dA$$

Observe cuán parecidas son las expresiones para μ_1 y μ_2 en (11) con las de los momentos M_x y M_y de una lámina con función de densidad r en las ecuaciones 3 y 4. De hecho, se puede considerar que la probabilidad es como una masa distribuida de manera continua. Se calcula la probabilidad de la manera como se calcula la masa, integrando una función de densidad. Y debido a que la "masa de probabilidad total" es 1, las expresiones para $\bar{x}$ y $\bar{y}$ en (5) muestran que los valores esperados de X y Y, μ_1 y μ_2, pueden ser consideradas como las coordenadas del "centro de masa" de la distribución de probabilidad.

En el siguiente ejemplo se trata con distribuciones normales. Como en la sección 8.5, una sola variable aleatoria tiene una *distribución normal* si su función de densidad de probabilidad es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

donde μ es la media y σ es la desviación estándar.



EJEMPLO 8 Una fábrica produce rodamientos (de forma cilíndrica) cuyas dimensiones son 4.0 cm de diámetro y 6.0 cm de largo. De hecho, los diámetros tienen una distribución normal con media de 4.0 cm y desviación estándar 0.01 cm, mientras que las longitudes tienen una distribución normal con media 6.0 cm y desviación estándar 0.01 cm. Si se supone que X y Y son independientes, escriba la función de densidad conjunta y dibújela. Encuentre la probabilidad de que un cojinete elegido al azar de la línea de producción tenga longitud o diámetro que difiere de la media en más de 0.02 cm.

SOLUCIÓN Se sabe que X y Y tienen una distribución normal con $\mu_1 = 4.0$, $\mu_2 = 6.0$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.01$. Así, cada una de las funciones de densidad para X y Y son

$$f_1(x) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-4)^2/0.0002} \qquad f_2(y) = \frac{1}{0.01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(y-6)^2/0.0002}$$

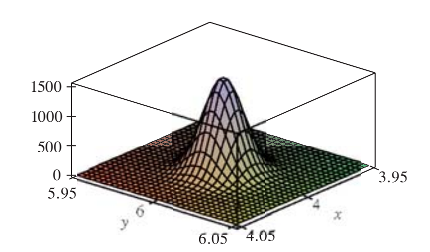


FIGURA 9
Gráfica de la función de densidad conjunta normal del ejemplo 8

Puesto que X y Y son independientes, la función de densidad conjunta es el producto:

$$\begin{aligned} f(x, y) = f_1(x)f_2(y) &= \frac{1}{0.0002\pi}\, e^{-(x-4)^2/0.0002} e^{-(y-6)^2/0.0002} \\ &= \frac{5000}{\pi}\, e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

En la figura 9 se muestra una gráfica de esta función.

Se calculará primero la probabilidad de que X y Y difieran de sus medias en menos de 0.02 cm. Si se emplea una calculadora o computadora para estimar la integral, se tiene

$$\begin{aligned} P(3.98 < X < 4.02,\ 5.98 < Y < 6.02) &= \int_{3.98}^{4.02}\int_{5.98}^{6.02} f(x, y)\, dy\, dx \\ &= \frac{5000}{\pi}\int_{3.98}^{4.02}\int_{5.98}^{6.02} e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}\, dy\, dx \\ &\approx 0.91 \end{aligned}$$

Entonces la probabilidad de que X o Y difieran de su media en más de 0.02 cm es aproximadamente

$$1 - 0.91 = 0.09$$ □

15.5 EJERCICIOS

1. La carga eléctrica está distribuida sobre el rectángulo $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$, así que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 2xy + y^2$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Determine la densidad de carga en el rectángulo.

2. La carga eléctrica se distribuye sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 4$, de modo que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = x + y + x^2 + y^2$ (medida en coulombs por metro cuadrado). Calcule la carga total sobre el disco.

3–10 Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región D y tiene la función de densidad dada ρ.

3. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1\}$; $\rho(x, y) = xy^2$

4. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\}$; $\rho(x, y) = cxy$

5. D es la región triangular con vértices (0, 0), (2, 1), (0, 3); $\rho(x, y) = x + y$

6. D es la región triangular con vértices $x = 0$, $y = x$, y $2x + y = 6$; $\rho(x, y) = x^2$.

7. D está acotada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$; $\rho(x, y) = y$.

8. D está acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 1$; $\rho(x, y) = x$.

9. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \operatorname{sen}(\pi x/L),\ 0 \leq x \leq L\}$;; $\rho(x, y) = x$

10. D está acotada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$; $\rho(x, y) = \sqrt{x}$

11. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el primer cuadrante. Encuentre su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje x.

12. Encuentre el centro de masa de la lámina del ejercicio 11 si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de su distancia desde el origen.

13. La frontera de una lámina está formada por los semicírculos $y = \sqrt{1-x^2}$ y $y = \sqrt{4-x^2}$ junto con las porciones del eje x que las une. Encuentre el centro de masa de la lámina si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el origen.

14. Encuentre el centro de masa de la lámina del Ejercicio 13 si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia desde el origen.

15. Halle el centro de masa de una lámina en la forma de un triángulo isósceles recto con lados iguales de longitud a si la densidad en cualquier punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el vértice opuesto a la hipotenusa.

16. Una lámina ocupa la región dentro del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ pero fuera del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Encuentre el centro de masa si la densidad en cualquier punto es inversamente proporcional a su distancia desde el origen.

17. Encuentre los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 7.

18. Calcule los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 12.

19. Obtenga los momentos de inercia I_x, I_y, I_0 para la lámina del ejercicio 15.

20. Considere un aspa cuadrada con lados de longitud 2 y la esquina inferior izquierda colocada en el origen. Si la densidad del aspa es $\rho(x, y) = 1 + 0.1x$, ¿es más difícil girar el aspa respecto al eje x o el eje y?

CAS **21–22** Use un sistema algebraico computacional para hallar la masa, el centro de masa y el momento de inercia de la lámina que ocupa la región D y la función de densidad dada.

21. $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\}$; $\rho(x, y) = xy$

22. D está encerrada por la cardioide $r = 1 + \cos\theta$; $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

CAS **23–26** Una lámina con densidad constante $\rho(x, y) = r$ ocupa la región dada. Encuentre los momentos de inercia I_x e I_y y los radios de giro $\bar{\bar{x}}$ y $\bar{\bar{y}}$.

23. El rectángulo $0 \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant h$

24. El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$, y $(0, h)$

25. La parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ en el primer cuadrante

26. La región bajo la curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ a $x = \pi$

27. La función de densidad conjunta para un par de variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} Cx(1 + y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Halle $P(X + Y \leqslant 1)$.

28. (a) Compruebe que

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es una función de densidad conjunta.

(b) Si X y Y son variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es la función f del inciso (a), encuentre
(i) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right)$ (ii) $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}, Y \leqslant \frac{1}{2}\right)$

(c) Determine los valores esperados de X y Y.

29. Suponga que X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-(0.5x+0.2y)} & \text{si } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Compruebe que f es en realidad una función de densidad conjunta.
(b) Encuentre las siguientes probabilidades.
(i) $P(Y \geqslant 1)$ (ii) $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 4)$
(c) Halle los valores esperados de X y Y.

30. (a) Una lámpara tiene dos bombillas de un tipo con una duración promedio de 1000 horas. Si se supone que la probabilidad de falla de estas bombillas se puede modelar mediante una función de densidad exponencial con

media $\mu = 1000$, encuentre la probabilidad de que ambas bombillas fallen en 1000 horas.

(b) Otra lámpara tiene sólo una bombilla del mismo tipo que en el inciso (a). Si se quema una bombilla y se remplaza por una del mismo tipo, estime la probabilidad de que las dos bombillas fallen en un total de 1000 horas.

CAS **31.** Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes, donde X tiene una distribución normal con media 45 y desviación estándar 0.5 y Y tiene una distribución normal con media 20 y desviación estándar 0.1.
(a) Encuentre $P(40 \leqslant X \leqslant 50, 20 \leqslant Y \leqslant 25)$.
(b) Determine $P(4(X - 45)^2 + 100(Y - 20)^2 \leqslant 2)$.

32. Xavier y Yolanda tienen clases que terminan a medio día y acuerdan reunirse todos los días después de clase. Llegan a la cafetería de manera independiente. El tiempo de llegada de Xavier es X y el tiempo de llegada de Yolanda es Y, donde X y Y se miden en minutos después del medio día. Las funciones de densidad individuales son

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{50}y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 10 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(Xavier llega un poco después de medio día y tiene más probabilidades de llegar puntual que tarde. Yolanda siempre llega alrededor de las 12:10 P.M. y tiene más probabilidades de llegar tarde que a tiempo.) Después que llega Yolanda, espera a Xavier hasta media hora, pero él nunca la espera. Calcula las probabilidades de su encuentro.

33. Al estudiar la diseminación de una epidemia, se supone que la probabilidad de que un individuo infectado contagie la enfermedad a un individuo no infectado, es una función de la distancia entre ellos. Considere una ciudad circular de radio 10 millas en la que la población está distribuida normalmente. Para un individuo infectado en un punto fijo $A(x_0, y_0)$, suponga que la función de probabilidad está dada por

$$f(P) = \tfrac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

donde $d(P, A)$ denota la distancia entre P y A.

(a) Suponga que la exposición de una persona a la enfermedad es la suma de las probabilidades de adquirir la enfermedad de todos los miembros de la población. Suponga que las personas infectadas están distribuidas de manera uniforme por toda la ciudad, con k individuos infectados por milla cuadrada. Encuentre una integral doble que representa la exposición de una persona que reside en A.

(b) Evalúe la integral para el caso en el que A es el centro de la ciudad y para el caso en el que A se localiza en el borde de la ciudad. ¿Dónde preferiría vivir?

15.6 INTEGRALES TRIPLES

Así como se definen las integrales triples para funciones de una variable y las integrales dobles para funciones de dos variables, se definen las integrales triples para funciones de tres variables. Se tratará primero con el caso más simple donde f se define sobre una caja rectangular:

1 $$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$

El primer paso es dividir B en subcajas. Esto se hace dividiendo el intervalo $[a, b]$ en l subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual amplitud Δx, dividiendo $[c, d]$ en m subintervalos de amplitud Δy y dividiendo $[r, s]$ en n subintervalos de amplitud Δz. Los planos que pasan por los puntos finales de estos subintervalos paralelos a los planos coordenados dividen a la caja B en lmn subcajas

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

que se muestran en la figura 1. Cada subcaja tiene volumen $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$.

Entonces se forma la **suma de Riemann triple**

2 $$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

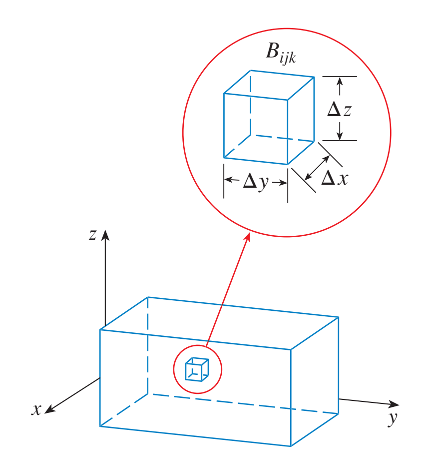


FIGURA 1

donde el punto muestral $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ está en B_{ijk}. Por analogía con la definición de una integral doble (15.1.5), se define la integral triple como el límite de las sumas de Riemann triples en (2).

3 DEFINICIÓN La **integral triple** de f sobre la caja B es

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\, \Delta V$$

si este límite existe.

De nuevo, la integral triple existe siempre si f es continua. Se puede elegir que el punto muestral sea cualquier punto en la subcaja, pero si se elige que sea el punto (x_i, y_j, z_k), se obtiene una expresión de aspecto más simple para la integral triple:

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l, m, n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta V$$

Al igual que para las integrales dobles, el método práctico para evaluar integrales triples es expresarlas como integrales iteradas de la siguiente manera.

4 TEOREMA DE FUBINI PARA INTEGRALES TRIPLES Si f es continua en el cuadro rectangular $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, entonces

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

La integral iterada en el lado derecho del Teorema de Fubini significa que se integra primero con respecto a x (manteniendo a y y z constantes), luego se integra con respecto a y (manteniendo a z constante) y, por último, se integra con respecto a z. Hay otros cinco posibles órdenes en los que se puede integrar, los cuales dan el mismo valor. Por ejemplo, si se integra con respecto a y, después z y luego x, se tiene

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

V EJEMPLO 1 Evalúe la integral triple $\iiint_B xyz^2\, dV$, donde B es la caja rectangular dada por

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$$

SOLUCIÓN Se podría usar cualquiera de los seis órdenes posibles de integración. Si se elige integrar con respecto a x, luego y y después z, se obtiene

$$\iiint_B xyz^2\, dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} dy\, dz$$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\, dy\, dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dz$$

$$= \int_0^3 \frac{3z^2}{4}\, dz = \frac{z^3}{4}\bigg]_0^3 = \frac{27}{4}$$ □

Ahora se define la **integral triple sobre una región acotada general *E*** en el espacio tridimensional (un sólido) en gran medida por el mismo procedimiento que se empleó para integrales dobles (15.3.2). Se encierra E en una caja B del tipo dado por la ecuación 1. Entonces se define una función F de modo que concuerda con f sobre E pero es cero para puntos en B que están fuera de E. Por definición,

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iiint_B F(x, y, z)\, dV$$

Esta integral existe si f es continua y el límite de E es "razonablemente uniforme". La integral triple tiene en esencia las mismas propiedades que la integral doble (Propiedades 6 a 9 en la sección 15.3).

Se restringe la atención a funciones continuas f y a ciertos tipos de regiones simples. Se dice que una región sólida E es de **tipo 1** si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x y y, es decir,

5 $$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

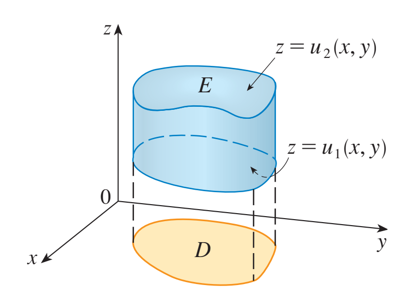


FIGURA 2
Una región sólida de tipo I

donde D es la proyección de E sobre el plano xy como se muestra en la figura 2. Observe que el límite superior del sólido E es la superficie con ecuación $z = u_2(x, y)$, mientras que el límite inferior es la superficie $z = u_1(x, y)$.

Por la misma clase de argumento que condujo a la formula (15.3.3), se puede demostrar que si E es una región de tipo I dada por la ecuación 5, entonces

6
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

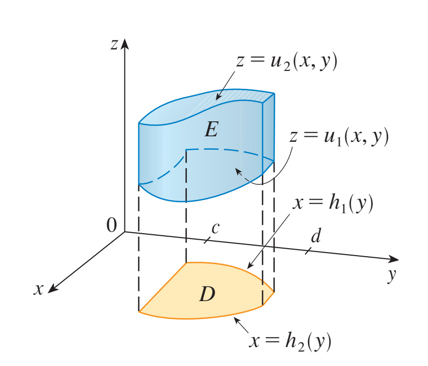


FIGURA 3
Una región sólida tipo I, donde la proyección D es una región plana tipo I

El significado de la integral interna en el lado derecho de la ecuación 6 es que x y y se mantienen fijas y, por lo tanto, $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ son consideradas como constantes, mientras que $f(x, y, z)$ se integra con respecto a z.

En particular, si la proyección D de E sobre el plano xy es una región plana tipo I (como en la figura 3), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se convierte en

7
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

FIGURA 4
Otra región sólida tipo I, con una proyección tipo II

Si, por otro lado, D es una región plana tipo II (como en la figura 4), entonces

$$E = \{(x, y, z) \mid c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y),\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

y la ecuación 6 se transforma en

8
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

EJEMPLO 2 Evalúe $\iiint_E z\, dV$, donde E es el tetraedro sólido acotado por los cuatro planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y + z = 1$.

SOLUCIÓN Cuando se establece una integral triple es aconsejable dibujar *dos* diagramas: uno de la región sólida E (véase fig. 5) y una de su proyección D sobre el plano xy (véase fig. 6). La cota inferior del tetraedro es el plano $z = 0$ y la cota superior es el plano $x + y + z = 1$

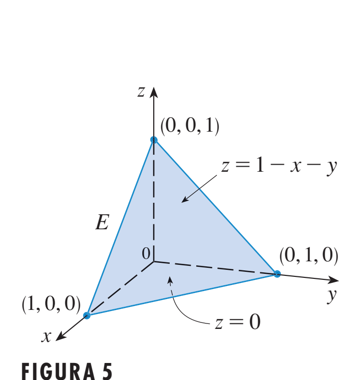


FIGURA 5

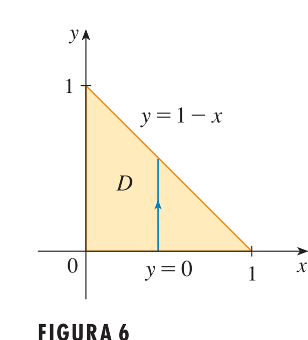


FIGURA 6

(o $z = 1 - x - y$), así que se usa $u_1(x, y) = 0$ y $u_2(x, y) = 1 - x - y$ en la fórmula 7. Observe que los planos $x + y + z = 1$ y $z = 0$ se cortan en la línea $x + y = 1$ (o $y = 1 - x$) en el plano xy. Por consiguiente, la proyección de E es la región triangular mostrada en la figura 6, y se tiene

9 $$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$$

Esta descripción de E como una región tipo 1 permite evaluar la integral como sigue:

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1 - x)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$ □

Una región sólida E es de **tipo 2** si es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D,\ u_1(y, z) \leqslant x \leqslant u_2(y, z)\}$$

donde, esta vez, D es la proyección de E sobre el plano yz (véase fig. 7). La superficie posterior es $x = u_1(y, z)$, la superficie del frente es $x = u_2(y, z)$, y se tiene

10 $$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y, z)}^{u_2(y, z)} f(x, y, z)\,dx\right] dA$$

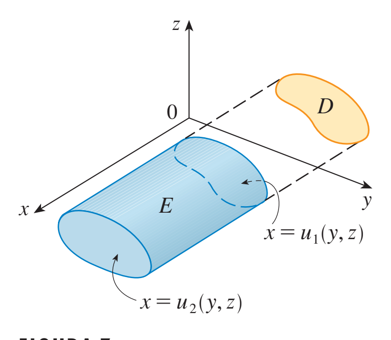


FIGURA 7
Una región tipo 2

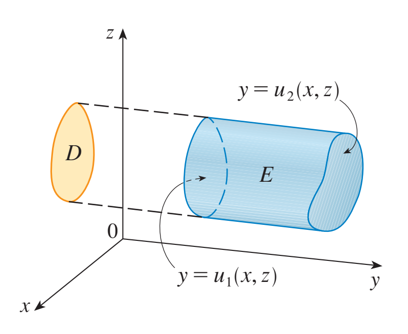


FIGURA 8
Una región tipo 3

Por último, una región **tipo 3** es de la forma

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D,\ u_1(x, z) \leqslant y \leqslant u_2(x, z)\}$$

donde D es la proyección de E sobre el plano xz, $y = u_1(x, z)$ es la superficie izquierda y $y = u_2(x, z)$ es la superficie derecha (véase fig. 8). Para este tipo de región se tiene

11 $$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z)\,dy\right] dA$$

En cada una de las ecuaciones 10 y 11 puede haber dos expresiones posibles para la integral, dependiendo de si D es una región plana de tipo I o tipo II (y en correspondencia con las ecuaciones 7 y 8).

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV$, donde E es la región acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$.

SOLUCIÓN El sólido E se muestra en la figura 9. Si se le considera como una región tipo 1, entonces se necesita considerar su proyección D_1 sobre el plano xy, que es la región parabólica en la figura 10. (La traza de $y = x^2 + z^2$ en el plano $z = 0$ es la parábola $y = x^2$.)

TEC Visual 15.6 ilustra cómo las regiones sólidas (incluso la de la figura 9) se proyectan sobre planos coordenados.

FIGURA 9
Región de integración

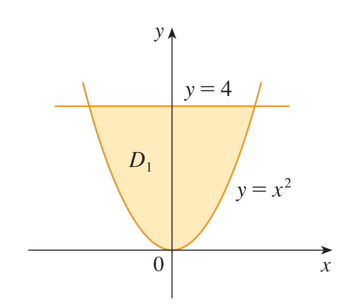


FIGURA 10
Proyección en el plano xy

De $y = x^2 + z^2$ se obtiene $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, de modo que la superficie límite inferior de E es $z = -\sqrt{y - x^2}$ y la superficie superior es $z = \sqrt{y - x^2}$. Por lo tanto, la descripción de E como una región tipo 1 es

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 4,\ -\sqrt{y - x^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{y - x^2}\right\}$$

y se obtiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

Aunque esta expresión es correcta, es muy difícil evaluarla. Así, en cambio, se considerará a E como una región tipo 3. Como tal, su proyección D_3 sobre el plano xz es el disco $x^2 + z^2 \leqslant 4$ mostrada en la figura 11.

Entonces, el límite izquierdo de E es el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el límite derecho es el plano $y = 4$, de manera que si se toma $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ y $u_2(x, z) = 4$ en la ecuación 11, se tiene

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy\right] dA = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

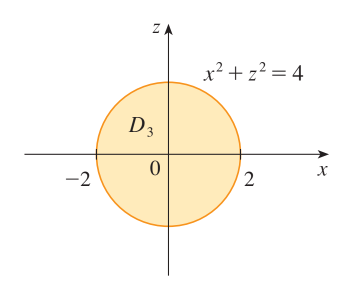


FIGURA 11
Proyección sobre el plano xz

Aunque esta integral se podría escribir como

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

es más fácil convertir a coordenadas polares en el plano xz: $x = r \cos \theta$, $z = r \operatorname{sen} \theta$. Esto da

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\, dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 = \frac{128\pi}{15}$$

□

El paso más difícil para evaluar una integral triple es establecer una expresión para la región de integración (como la ecuación 9 del ejemplo 2). Recuerde que los límites de integración en la integral interna contienen a lo sumo dos variables, los límites de integración en la integral de enmedio contienen a lo sumo una variable y los límites de integración en la integral externa deben ser constantes.

APLICACIONES DE INTEGRALES TRIPLES

Recuerde que si $f(x) \geqslant 0$, entonces la integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$ representa al área bajo la curva $y = f(x)$ de a a b, y si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dA$ representa al volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ y arriba de D. La interpretación correspondiente de una integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$, donde $f(x, y, z) \geqslant 0$, no es muy útil porque sería el "hipervolumen" de un objeto tetradimensional y, por supuesto, es muy difícil representar. (Recuerde que E es sólo el *dominio* de la función f; la gráfica de f se localiza en el espacio tetradimensional.) No obstante, la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\,dV$ se puede interpretar de varias maneras en diferentes situaciones físicas, lo que depende de las interpretaciones físicas de x, y, z y $f(x, y, z)$.

Se comenzará con el caso especial donde $f(x, y, z) = 1$ para los puntos en E. Entonces la integral triple representa al volumen de E:

12
$$V(E) = \iiint_E dV$$

Por ejemplo, se puede ver que éste es el caso de una región tipo 1 si se escribe $f(x, y, z) = 1$ en la fórmula 6:

$$\iiint_E 1\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz\right] dA = \iint_D [u_2(x, y) - u_1(x, y)]\,dA$$

y de la sección 15.3 se sabe que esto representa al volumen localizado entre las superficies $z = u_1(x, y)$ y $z = u_2(x, y)$.

EJEMPLO 4 Use una integral triple para hallar el volumen del tetraedro T acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$.

SOLUCIÓN El tetraedro T y su proyección D sobre el plano xy se muestran en las figuras 12 y 13. El límite inferior de T es el plano $z = 0$ y el límite superior es el plano $x + 2y + z = 2$, es decir, $z = 2 - x - 2y$.

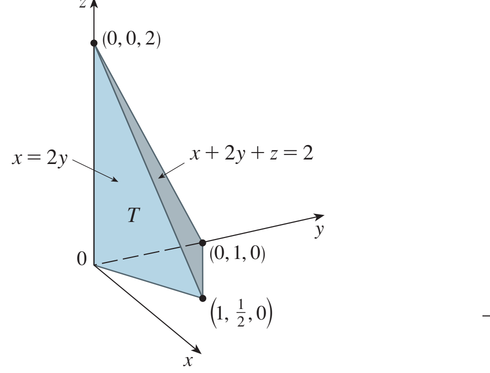


FIGURA 12

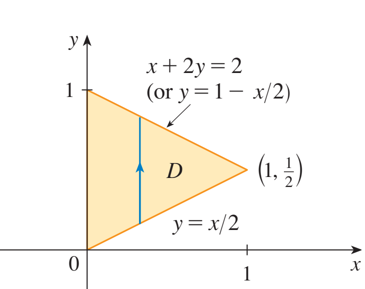


FIGURA 13

Por lo tanto, se tiene

$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx = \tfrac{1}{3}$$

por el mismo cálculo del ejemplo 4 de la sección 15.3.

(Observe que no es necesario usar integrales triples para calcular volúmenes. Simplemente dan otro método para establecer el cálculo.) □

Las aplicaciones de las integrales dobles de la sección 15.5 se pueden extender de inmediato a las integrales triples. Por ejemplo, si la función de densidad de un objeto sólido que ocupa la región E es $\rho(x, y, z)$, en unidades de masa por unidad de volumen, en cualquier punto dado (x, y, z), entonces su **masa** es

13
$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

y sus **momentos** respecto a los tres planos coordenados son

14
$$M_{yz} = \iiint_E x\rho(x, y, z)\, dV \qquad M_{xz} = \iiint_E y\rho(x, y, z)\, dV$$
$$M_{xy} = \iiint_E z\rho(x, y, z)\, dV$$

El **centro de masa** se localiza en el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

15
$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Si la densidad es constante, el centro de masa del sólido se llama **centroide** de E. Los momentos de inercia respecto a los tres ejes coordenados son

16
$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV$$
$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV$$

Como en la sección 15.5, la **carga eléctrica** total sobre un objeto sólido que ocupa una región E y que tiene densidad de carga $\sigma(x, y, z)$ es

$$Q = \iiint_E \sigma(x, y, z)\, dV$$

Si se tienen tres variables aleatorias continuas X, Y y Z, su **función de densidad conjunta** es una función de tres variables tal que la probabilidad de que (X, Y, Z) esté en E es

$$P((X, Y, Z) \in E) = \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

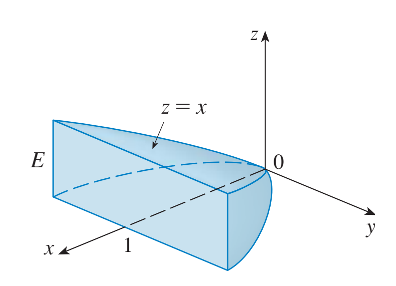
En particular,

$$P(a \leqslant X \leqslant b,\ c \leqslant Y \leqslant d,\ r \leqslant Z \leqslant s) = \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

La función de densidad conjunta satisface

$$f(x, y, z) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = 1$$

V EJEMPLO 5 Encuentre el centro de masa de un sólido de densidad constante que está acotado por el cilindro parabólico $x = y^2$ y los planos $x = z$, $z = 0$ y $x = 1$.



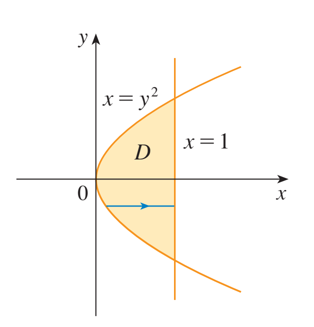
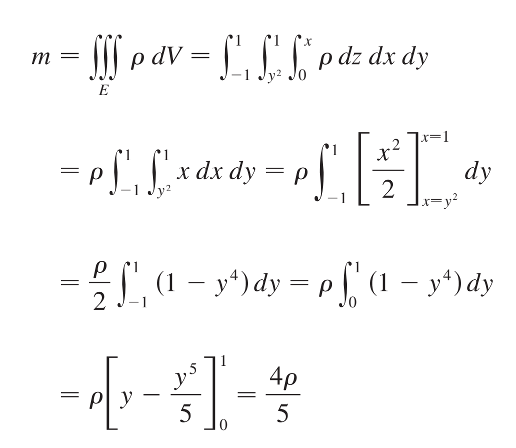


FIGURA 14

SOLUCIÓN El sólido E y su proyección sobre el plano xy se muestran en la figura 14. Las superficies inferior y superior de E son los planos $z = 0$ y $z = x$, así que describa E como una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x\}$$

Entonces, si la densidad es $\rho(x, y, z) = \rho$, la masa es



$$m = \iiint_E \rho\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} \rho\, dz\, dx\, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x\, dx\, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1} (1 - y^4)\, dy = \rho \int_{0}^{1} (1 - y^4)\, dy$$

$$= \rho\left[y - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{5}$$

Debido a la simetría de E y ρ respecto al plano xz, se puede decir de inmediato que $M_{xz} = 0$ y, por lo tanto, $\bar{y} = 0$. Los otros momentos son

$$M_{yz} = \iiint_E x\rho\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} x\rho\, dz\, dx\, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy = \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy$$

$$= \frac{2\rho}{3}\int_{0}^{1} (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{3}\left[y - \frac{y^7}{7}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{7}$$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z\rho\, dz\, dx\, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x} dx\, dy = \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy$$

$$= \frac{\rho}{3}\int_{0}^{1} (1 - y^6)\, dy = \frac{2\rho}{7}$$

Por lo tanto, el centro de masa es

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14}\right)$$ □

15.6 EJERCICIOS

1. Evalúe la integral del ejemplo 1, integrando primero con respecto a y después z, y luego x.

2. Evalúe la integral $\iiint_E (xz - y^3)\, dV$, donde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

usando tres órdenes diferentes de integración.

3–8 Evalúe la integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\, dy\, dx\, dz$

4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\, dx\, dz\, dy$

6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\, dx\, dy\, dz$

7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$

8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx$

9–18 Evalúe la integral triple.

9. $\iiint_E 2x\, dV$, donde
$E = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\right\}$

10. $\iiint_E yz \cos(x^5)\, dV$, donde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x \leqslant z \leqslant 2x\}$

11. $\iiint_E 6xy\, dV$, donde E yace bajo el plano $z = 1 + x + y$ y arriba de la región en el plano xy acotado por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 1$.

12. $\iiint_E y\, dV$, donde E está acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + 2y + z = 4$.

13. $\iiint_E xy\, dV$, donde E es el tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).

14. $\iiint_E xz\, dV$, donde E es el tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0) y (0, 1, 1).

15. $\iiint_E x^2 e^y\, dV$, donde E está acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

16. $\iiint_E (x + 2y)\, dV$, donde E está acotada por el cilindro parabólico $y = x^2$ y los planos $x = z$, $x = y$ y $z = 0$.

17. $\iiint_E x\, dV$, donde E está acotada por el paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ y el plano $x = 4$.

18. $\iiint_E z\, dV$, donde E está acotada por el cilindro $y^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 3x$ y $z = 0$ en el primer octante.

19–22 Use una integral triple para hallar el volumen del sólido dado.

19. El tetraedro encerrado por los planos coordenados y el plano $2x + y + z = 4$.

20. El sólido acotado por el cilindro $y = x^2$ y los planos $z = 0$, $z = 4$ y $y = 9$.

21. El sólido encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $y + z = 5$ y $z = 1$.

22. El sólido encerrado por el paraboloide $x = y^2 + z^2$ y el plano $x = 16$.

23. (a) Exprese el volumen de la cuña en el primer octante que es cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 1$ por los planos $y = x$ y $x = 1$ como una integral triple.
CAS (b) Use la tabla de integrales (en las páginas de referencia al final del libro) o un sistema algebraico computacional para hallar el valor exacto de la integral triple del inciso (a).

24. (a) En la **regla del punto medio para integrales triples** se usa una suma de Riemann triple para aproximar una integral triple sobre una caja B, donde $f(x, y, z)$ se evalúa en el centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ de la caja B_{ijk}. Use la Regla del Punto Medio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, donde B es el cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 4$. Divida a B en ocho cubos de igual tamaño.
CAS (b) Use un sistema algebraico computacional para aproximar la integral del inciso (a) correcta hasta dos decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

25–26 Use la regla del punto medio para integrales triples (ejercicio 22) para estimar el valor de la integral. Divida a B en ocho subcajas de igual tamaño.

25. $\iiint_B \dfrac{1}{\ln(1 + x + y + z)}\, dV$, donde
$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 8,\ 0 \leqslant z \leqslant 4\}$

26. $\iiint_B \operatorname{sen}(xy^2z^3)\, dV$, donde
$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$

27–28 Bosqueje el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$

29–32 Exprese la integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como una integral iterada en seis formas distintas, donde E es el sólido acotado por las superficies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - z^2$, $y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9$, $x = -2$, $x = 2$

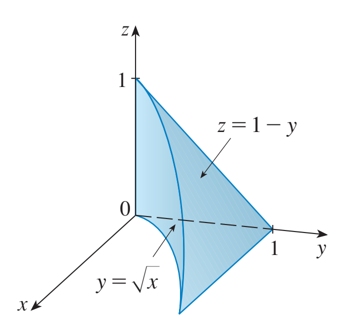
31. $y = x^2$, $z = 0$, $y + 2z = 4$

32. $x = 2$, $y = 2$, $z = 0$, $x + y - 2z = 2$

33. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

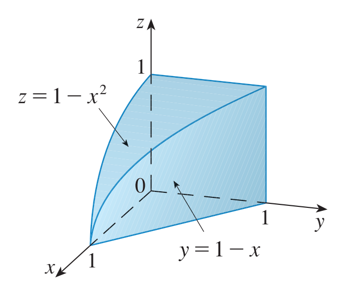
Reescriba está integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



34. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescriba esta integral como una integral iterada equivalente en los otros cinco órdenes.



35–36 Escriba otras cinco integrales iteradas que son iguales a la integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

36. $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

37–40 Encuentre la masa y el centro de masa del sólido E con la función de densidad dada ρ.

37. E es el sólido del ejercicio 11; $\rho(x, y, z) = 2$.

38. E está acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $x + z = 1$, $x = 0$ y $z = 0$; $\rho(x, y, z) = 4$.

39. E es el cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

40. E es el tetraedro acotado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$; $\rho(x, y, z) = y$

41–44 Suponga que el sólido tiene densidad constante k.

41. Encuentre los momentos de inercia para un cubo con longitud L de lado si un vértices está situado en el origen y tres aristas están a lo largo de los ejes de coordenadas.

42. Encuentre los mementos de inercia para un ladrillo rectangular con dimensiones a, b y c y masa M, si el centro del ladrillo está situado en el origen y las aristas son paralelas a los ejes de coordenadas.

43. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje z del cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

44. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje z del cono sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$.

45–46 Establezca, pero no evalúe, expresiones integrales para (a) la masa, (b) el centro de masa y (c) el momento de inercia respecto al eje z.

45. El sólido del ejercicio 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

46. La semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

CAS **47.** Sea E el sólido en el primer octante acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$, $x = 0$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use un sistema algebraico computacional para hallar los valores exactos de las siguientes cantidades para E.
(a) La masa.
(b) El centro de masa.
(c) El momento de inercia respecto al eje z.

CAS **48.** Si E es el sólido del ejercicio 18 con función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, encuentre las siguientes cantidades, correctas hasta tres decimales.
(a) La masa.
(b) El centro de masa.
(c) El momento de inercia respecto al eje z.

49. La función de densidad conjunta para variables aleatorias X, Y y Z es $f(x, y, z) = Cxyz$ si $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$ y $f(x, y, z) = 0$ en caso contrario.
(a) Encuentre el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

50. Suponga que X, Y y Z son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0.5x+0.2y+0.1z)}$ si $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, y $f(x, y, z) = 0$ en caso contrario.
(a) Encuentre el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Obtenga $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

51–52 El **valor promedio** de una función $f(x, y, z)$ sobre una región sólida E se define como

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

donde $V(E)$ es el volumen de E. Por ejemplo, si r es una función de densidad, entonces ρ_{prom} es la densidad promedio de E.

51. Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo con longitud lateral L que yace en el primer octante con un vértice en el origen y aristas paralelas a los ejes coordenados.

52. Encuentre el valor promedio de la función $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ sobre la región encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

53. Determine la región E para la cual la integral triple

$$\iiint_E (1 - x^2 - 2y^2 - 3z^2)\, dV$$

es un máximo.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

VOLÚMENES DE HIPERESFERAS

En este proyecto se encuentran fórmulas para el volumen encerrado por una hiperesfera en el espacio n-dimensional.

1. Use una integral doble y sustitución trigonométrica, junto con la fórmula 64 en la tabla de integrales, para hallar el área de un círculo con radio r.
2. Use una integral triple y sustitución trigonométrica para hallar el volumen de una esfera con radio r.
3. Use una integral cuádruple para hallar el hipervolumen encerrado por la hiperesfera $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ en $\mathbb{R}^2$. (Use sólo la sustitución trigonométrica y las fórmulas de reducción para $\int \text{sen}^n x\, dx$ o $\int \cos^n x\, dx$.)
4. Use una integral de orden n para hallar el volumen encerrado por una hiperesfera de radio r en el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$. [*Sugerencia*: las fórmulas son diferentes para n par y n impar.]

15.7 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

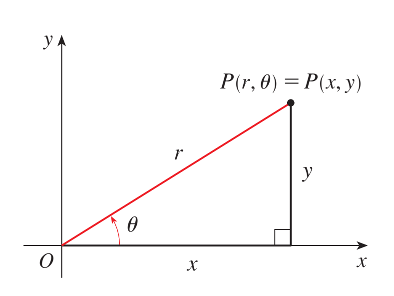


FIGURA 1

En geometría plana, el sistema de coordenadas polares se usa para dar una descripción cómoda de ciertas curvas y regiones. (Vea Sección 10.3.) La Figura 1 hace posible que recordemos la conexión entre coordenadas polares y cartesianas. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), entonces, de la figura,

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

En tres dimensiones hay un sistema de coordenadas, llamadas *coordenadas cilíndricas,* que es semejante a las coordenadas polares y da descripciones cómodas de algunas superficies y sólidos que por lo general se presentan. Como veremos, algunas integrales triples son mucho más fáciles de evaluar en coordenadas cilíndricas.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

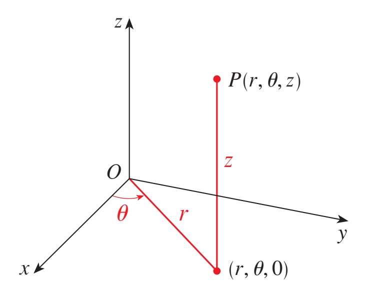


FIGURA 2
Coordenadas cilíndricas de un punto

En el **sistema de coordenadas cilíndricas,** un punto P en espacio tridimensional está representado por el triple ordenado (r, θ, z), donde r y q son coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy y z es la distancia dirigida desde el plano xy a P. (Vea Figura 2.)

Para convertir de coordenadas cilíndricas a rectangulares, usamos las ecuaciones

1 $$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

mientras que para convertir de coordenadas rectangulares a cilíndricas, usamos

2 $$r^2 = x^2 + y^2 \qquad z = z$$

EJEMPLO 1
(a)Localice el punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ y encuentre sus coordinas rectangulares.
(b) Encuentre coordenadas cilíndricas del punto con coordenadas rectangulares $(3, -3, -7)$.

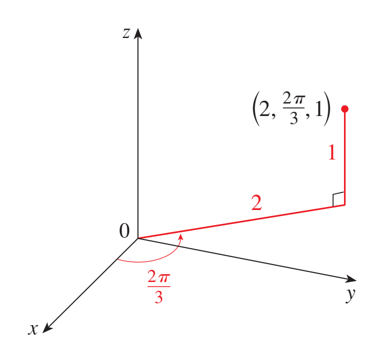


FIGURA 3

SOLUCIÓN
(a) El punto con coordenadas cilíndricas $(2, 2\pi/3, 1)$ está localizado en la Figura 3. De las Ecuaciones 1, sus coordenadas rectangulares son

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

Entonces el punto es $(-1, \sqrt{3}, 1)$ en coordenadas rectangulares.
(b) De las Ecuaciones 2 tenemos

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{-3}{3} = -1 \text{ y } \theta = \frac{7\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = -7$$

Por tanto, un conjunto de coordenadas cilíndricas es $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$. Otro es $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Al igual que con las coordenadas polares, hay un número infinito de opciones. □

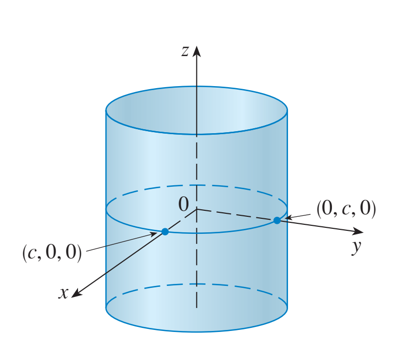


FIGURA 4
$r = c$, un cilindro

Las coordenadas cilíndricas son útiles en problemas que comprenden simetría alrededor de un eje, y el eje z se selecciona para que coincida con su eje de simetría. Por ejemplo, el eje del cilindro circular con ecuación cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$ es el eje z. En coordenadas cilíndricas, este cilindro tiene la muy sencilla ecuación $r = c$. (Vea la Figura 4.) Ésta es la razón del nombre de coordenadas "cilíndricas."

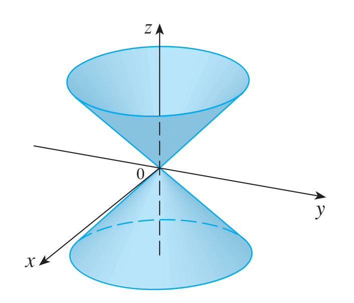


FIGURA 5
$z = r$, un cono

V EJEMPLO 2 Describa la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $z = r$

SOLUCIÓN La ecuación dice que el valor z, o altura, de cada punto sobre la superficie es igual a r, la distancia del punto al eje z. Como q no aparece, puede variar. Entonces cualquier trazo horizontal del plano $z = k (k > 0)$ es un círculo de radio k. Estos trazos sugieren que la superficie es un cono. Esta predicción puede confirmarse si se convierte la ecuación en coordenadas rectangulares. De la primera ecuación en (2) tenemos

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

Reconocemos la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ (por comparación con la Tabla 1 de la Sección 12.6) como un cono circular cuyo eje es el eje z. (Vea la Figura 5.) □

EVALUACIÓN DE INTEGRALES TRIPLES CON COORDENADAS CILÍNDRICAS

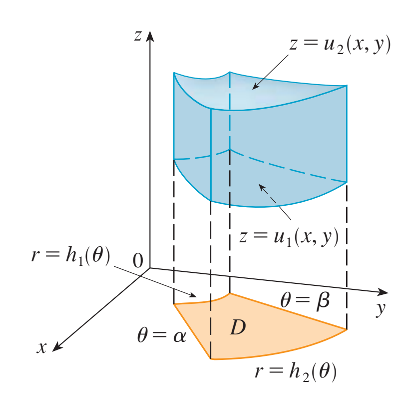


FIGURA 6

Suponga que E es una región tipo 1 cuya proyección D en el plano xy se describe convenientemente en coordenadas polares (véase fig. 6. En particular, suponga que f es continua y

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D está dada en coordenadas polares por

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ h_1(\theta) \leqslant r \leqslant h_2(\theta)\}$$

Se sabe de la ecuación 15.6.6 que

3
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

Pero se sabe cómo evaluar integrales dobles en coordenadas polares. De hecho, al combinar la ecuación 3 con la ecuación 15.4.3, se obtiene

4
$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

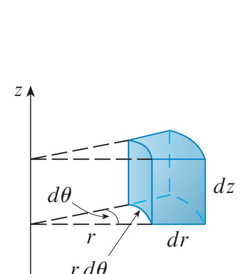


FIGURA 7
Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas: $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$

La fórmula 4 es la **fórmula para integración triple en coordenadas cilíndricas**. Ésta dice que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a cilíndricas al escribir $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, dejar a z como es, usar los límites de integración apropiados para z, r y θ, y reemplazar dV por $r\,dz\,dr\,d\theta$. (En la figura 7 se muestra cómo recordar esto.) Es importante usar esta fórmula cuando E es una región sólida descrita fácilmente en coordenadas cilíndricas, y en particular cuando la función $f(x, y, z)$ tiene que ver con la expresión $x^2 + y^2$.

V EJEMPLO 3 Un sólido E está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo del plano $z = 4$ y arriba del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$. (Véase fig. 8.) La densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje del cilindro. Encuentre la masa de E.

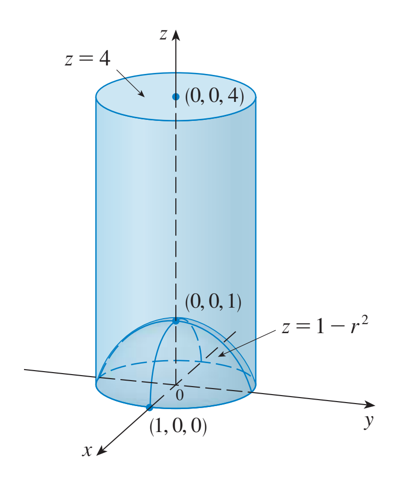


FIGURA 8

SOLUCIÓN En coordenadas cilíndricas el cilindro es $r = 1$ y el paraboloide es $z = 1 - r^2$, así que se puede escribir

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 1 - r^2 \leqslant z \leqslant 4\}$$

Puesto que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia desde el eje z, la función de densidad es

$$f(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Por lo tanto, de la fórmula 15.6.13, la masa de E es

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2}\, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{1-r^2}^4 (Kr)\, r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 Kr^2[4 - (1 - r^2)]\, dr\, d\theta \\ &= K\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^2 + r^4)\, dr \\ &= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5} \end{aligned}$$ □

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx$.

SOLUCIÓN Esta integral iterada es una integral triple sobre la región sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2},\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

y la proyección de E sobre el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. La superficie inferior de E es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su superficie superior es el plano $z = 2$. (Véase fig. 9.) Esta región tiene una descripción mucho más simple en coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\}$$

Por lo tanto, se tiene

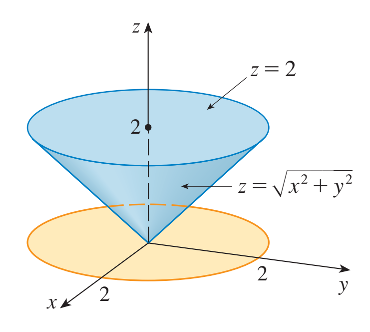


FIGURA 9

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2 + y^2)\, dz\, dy\, dx &= \iiint_E (x^2 + y^2)\, dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2\, r\, dz\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2 - r)\, dr \\ &= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi \end{aligned}$$ □

15.7 EJERCICIOS

1–2 Localice el punto cuyas coordenadas cilíndricas se dan. A continuación encuentre las coordinadas rectangulares del punto.

1. (a) $(2, \pi/4, 1)$ (b) $(4, -\pi/3, 5)$

2. (a) $(1, \pi, e)$ (b) $(1, 3\pi/2, 2)$

3–4 Cambie de coordenadas rectangulares a cilíndricas.

3. (a) $(1, -1, 4)$ (b) $(-1, -, 2)$

4. (a) $(2\ \ 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Describa verbalmente la superficie cuya ecuación se da.

5. $\theta = \pi/4$

6. $r = 5$

7–8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $z = 4 - r^2$

8. $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escriba las ecuaciones en coordenadas cilíndricas.

9. (a) $z = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + y^2 = 2y$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Trace el sólido descrito por las desigualdades dadas.

11. $0 \leqslant r \leqslant 2$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $r \leqslant z \leqslant 2$

13. Una capa cilíndrica mide 20 cm de largo, con radio interior de 6 cm y radio exterior de 7 cm. Escriba desigualdades que describan la capa en un sistema de coordenadas apropiado. Explique la forma en que se ha posicionado el sistema de coordenadas con respecto a la capa.

14. Use un aparato de gráficas para trazar el sólido encerrado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Trace el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

15. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 r\, dz\, d\theta\, dr$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

17–26 Use coordenadas cilíndricas.

17. Evalúe $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, donde E es la región que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ entre los planos $z = -5$ y $z = 4$.

18. Evalúe $\iiint_E (x^3 + xy^2)\, dV$, donde E es el sólido en el primer octante que está debajo del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

19. Evalúe $\iiint_E e^z\, dV$, donde E está encerrada por el paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 5$ y el plano xy.

20. Evalúe $\iiint_E x\, dV$, donde E está encerrada por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 3$ y por los cilindros $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

21. Evalúe $\iiint_E x^2\, dV$, donde E es el sólido que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, arriba del plano $z = 0$ y debajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Encuentre el volumen del sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. (a) Encuentre el volumen de la región E acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
(b) Encuentre el centroide de E (el centro de masa en el caso donde la densidad es constante).

24. (a) Determine el volumen del sólido que el cilindro $r = a \cos \theta$ corta de la esfera de radio a centrada en el origen.
(b) Ilustre el sólido del inciso (a) dibujando la esfera y el cilindro en la misma pantalla.

25. Encuentre la masa y el centro de masa del sólido S acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a (a > 0)$ si S tiene densidad constante K.

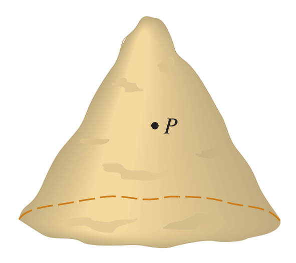
26. Encuentre la masa de una bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el eje z.

27–28 Evalúe la integral mediante un cambio a coordenadas cilíndricas.

27. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\, dz\, dx\, dy$

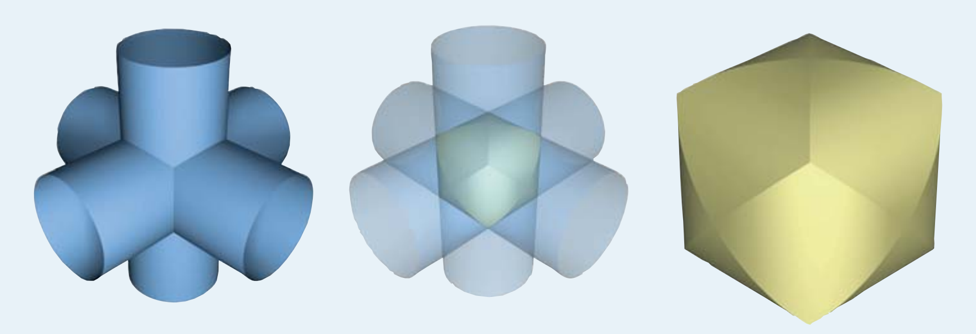
29. Al estudiar la formación de cadenas montañosas, los geólogos estiman la cantidad de trabajo requerido para elevar una montaña desde el nivel del mar. Considere una montaña que en esencia tiene la forma de un cono circular recto. Suponga que la densidad de peso del material en la vecindad de un punto P es $g(P)$ y la altura es $h(P)$.
(a) Encuentre la integral definida que representa el trabajo total hecho para formar la montaña.
(b) Suponga que el monte Fuji en Japón tiene la forma de un cono circular recto con radio 62 000 pies, altura 12 400 pies y densidad constante de 200 lb/pie^3. ¿Cuánto trabajo se realizó para formar el monte Fuji si la tierra estaba inicialmente al nivel de suelo?



PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

INTERSECCIÓN DE TRES CILINDROS

En la figura se muestra el sólido encerrado por tres cilindros circulares con el mismo diámetro que se cortan en ángulos rectos. En este proyecto se calcula el volumen y se determina cómo cambia su forma si los cilindros tienen diámetros diferentes.



1. Bosqueje con cuidado el sólido encerrado por los tres cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$. Indique las posiciones de los ejes coordenados y marque las caras con las ecuaciones de los cilindros correspondientes..
2. Encuentre el volumen del sólido del problema 1.
3. CAS Use un sistema algebraico computacional para trazar las aristas del sólido.
4. ¿Qué sucede con el sólido del problema 1 si el radio del primer cilindro es diferente de 1? Ilustre con un bosquejo trazado a mano o una gráfica de computadora.
5. Si el primer cilindro es $x^2 + y^2 = a^2$, donde $a < 1$, establezca, pero no resuelva, una integral doble para el volumen del sólido. ¿Qué pasa si $a > 1$?

15.8 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Otro útil sistema de coordenadas en tres dimensiones es el *sistema de coordenadas esféricas*. Simplifica la evaluación de integrales triples sobre regiones acotadas por esferas o conos.

COORDENADAS ESFÉRICAS

ELas **coordenadas esféricas** (r, θ, ϕ) de un punto P en el espacio se ilustran en la Figura 1, donde $\rho = |OP|$ es la distancia del origen a P, θ es el mismo ángulo que en coordenadas cilíndricas, y ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el segmento de línea OP. Nótese que

$$\rho \geqslant 0 \qquad\qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi$$

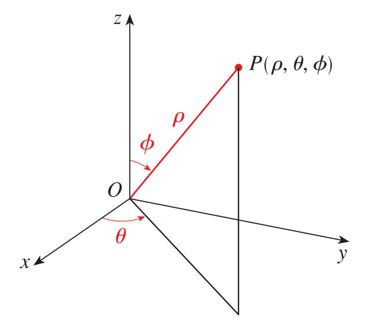


FIGURA 1
Coordenadas esféricas de un punto

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil en problemas donde hay simetría alrededor de un punto, y el origen se coloca en este punto. Por ejemplo, la esfera con centro en el origen y radio c tiene la muy sencilla ecuación $\rho = c$ (Vea la figura 2); ésta es la razón del nombre de coordenadas “esféricas.” La gráfica de la ecuación $\theta = c$ representa un semicono con el eje z en su eje (vea la figura 4).

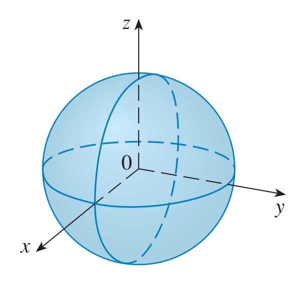


FIGURA 2 $\rho = c$, una esfera

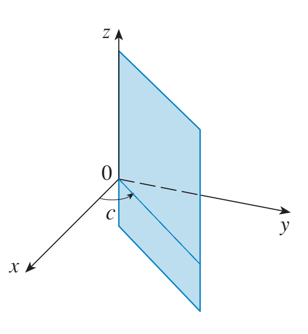


FIGURA 3 $\theta = c$, un semiplano

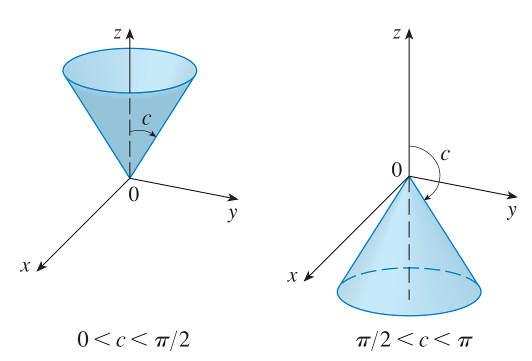


FIGURA 4 $\phi = c$, un semicono

La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas se puede ver de la figura 5. De los triángulos OPQ y OPP' tenemos

$$z = \rho \cos \phi \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Pero $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, de modo que para convertir de coordenadas esféricas a rectangulares, usamos las ecuaciones

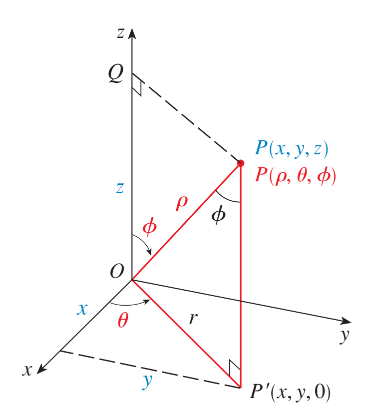
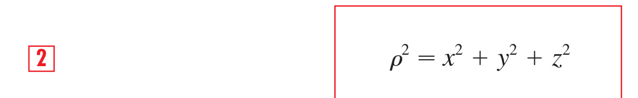


FIGURA 5

1



$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

También, la fórmula de distancias muestra que

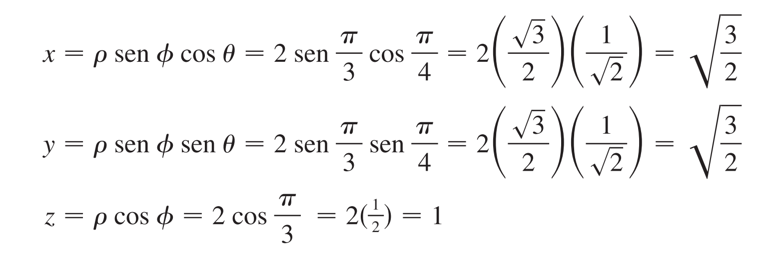
2

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Use esta ecuación para convertir coordenadas de rectangulares a esféricas.

V EJEMPLO 1 El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ se da en coordenadas esféricas. Localice el punto y encuentre sus coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN Localice el punto en la figura 6. De las ecuaciones 1



$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

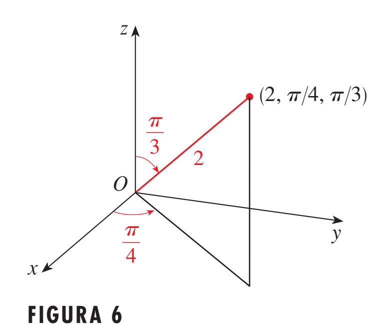


FIGURA 6

Entonces el punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ es $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$ en coordenadas rectangulares. □

ADVERTENCIA No hay acuerdo universal sobre la notación para coordenadas esféricas. Casi todos los libros de física invierten los significados de θ y ϕ y usan r en lugar de ρ.

V EJEMPLO 2 El punto $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ está dado en coordenadas rectangulares. Encuentre coordenadas esféricas para este punto.

SOLUCIÓN De la Ecuación 2 tenemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

y entonces las Ecuaciones 1 dan

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Por tanto, las coordenadas esféricas del punto dado son $(4, \pi/2, 2\pi/3)$. □

TEC En Module 15.8 se muestran familias de superficies en coordenadas cilíndricas y esféricas.

EVALUACIÓN DE INTEGRALES TRIPLES CON COORDENADAS ESFÉRICAS

En este sistema coordenado la contraparte de una caja rectangular es una **cuña esférica**

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b,\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta,\ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

donde $a \geqslant 0$, $\beta - \alpha \geqslant 2\pi$ y $d - c \leqslant \pi$. Aunque se definen integrales triples dividiendo sólidos en cajas pequeñas, se puede demostrar que dividir un sólido en pequeñas cuñas esféricas da siempre el mismo resultado. Así, se divide E en cuñas esféricas más pequeñas E_{ijk} por medio de esferas igualmente espaciadas $\rho = \rho_i$, semiplanos $\theta = \theta_j$ y semiconos $\phi = \phi_k$. En la figura 7 se muestra que E_{ijk} es aproximadamente una caja rectangular con dimensiones $\Delta\rho$, $\rho_i\,\Delta\phi$ (arco de un círculo con radio ρ_i, ángulo $\Delta\phi$) y $\rho_i \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta$ (arco de un círculo con radio $\rho_i \operatorname{sen}\phi_k$, ángulo $\Delta\theta$). Así que una aproximación al volumen de E_{ijk} está dada por

FIGURA 7

$$\Delta V_{ijk} \approx (\Delta\rho)(\rho_i\,\Delta\phi)(\rho_i \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\theta) = \rho_i^2 \operatorname{sen}\phi_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

De hecho, se puede demostrar, con la ayuda del Teorema del Valor Medio (ejercicio 45), que el volumen de E_{ijk} está dado exactamente por

$$\Delta V_{ijk} = \tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $(\tilde{\rho}_i, \tilde{\theta}_j, \tilde{\phi}_k)$ es algún punto en E_{ijk}. Sean$(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$ las coordenadas rectangulares de este punto. Entonces,

$$\iiint_E f(x, y, z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\,\Delta V_{ijk}$$

$$= \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \cos\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k \operatorname{sen}\tilde{\theta}_j, \tilde{\rho}_i \cos\tilde{\phi}_k)\,\tilde{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}_k\,\Delta\rho_i\,\Delta\theta_j\,\Delta\phi_k$$

Pero esta suma es una suma de Riemann para la función

$$F(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$$

En consecuencia, se ha llegado a la siguiente **fórmula para la integración triple en coordenadas esféricas**.

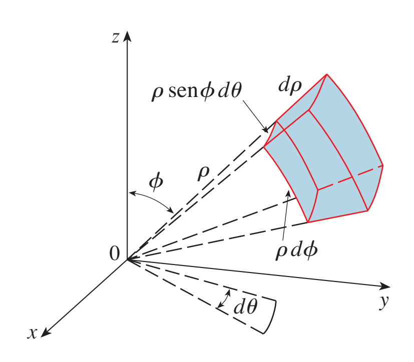


FIGURA 8
Elemento de volumen en coordenadas esféricas: $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

3 $$\iiint_E f(x, y, z) \, dV$$

$$= \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

donde E es una cuña esférica dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leqslant \rho \leqslant b, \ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \ c \leqslant \phi \leqslant d\}$$

La fórmula 3 dice que se convierte una integral triple de coordenadas rectangulares a esféricas al escribir

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

con los límites de integración apropiados, y remplazar dV por $\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$. Esto se ilustra en la figura 8.

Esta fórmula se puede ampliar para incluir regiones esféricas más generales como

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \ c \leqslant \phi \leqslant d, \ g_1(\theta, \phi) \leqslant \rho \leqslant g_2(\theta, \phi)\}$$

En este caso la fórmula es la misma que en (3), excepto que los límites de integración para ρ son $g_1(\theta, \phi)$ y $g_2(\theta, \phi)$.

Por lo común, las coordenadas esféricas se usan en integrales triples cuando superficies como conos y esferas forman el límite de la región de integración.

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV$, donde B es la bola unitaria:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$$

SOLUCIÓN Puesto que el límite de B es una esfera, se usan coordenadas esféricas:

$$B = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi\}$$

Además, las coordenadas esféricas son apropiadas porque

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

Así, (3) da

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^{3/2}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \, d\rho$$

$$= \Big[-\cos \phi\Big]_0^\pi (2\pi) \Big[\tfrac{1}{3} e^{\rho^3}\Big]_0^1 = \tfrac{4}{3}\pi(e - 1)$$ □

NOTA Habría sido extremadamente difícil evaluar la integral del ejemplo 3 sin coordenadas esféricas. En coordenadas rectangulares la integral iterada habría sido

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$$

V EJEMPLO 4 Use coordenadas esféricas para hallar el volumen del sólido que yace arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. (Véase fig. 9.)

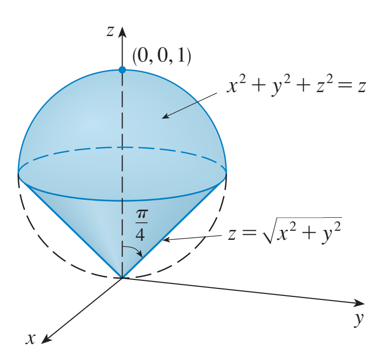


FIGURA 9

■ La figura 10 muestra otro aspecto (esta vez trazado por Maple) del sólido del ejemplo 4.

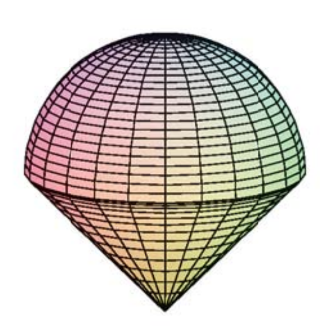


FIGURA 10

SOLUCIÓN Observe que la esfera pasa por el origen y tiene centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$. Se escribe la ecuación de la esfera en coordenadas esféricas como

$$\rho^2 = \rho \cos \phi \qquad \text{o} \qquad \rho = \cos \phi$$

La ecuación del cono se puede escribir como

$$\rho \cos \phi = \sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta} = \rho \operatorname{sen} \phi$$

Esto da $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$ o $\phi = \pi/4$. Por lo tanto, la descripción del sólido E en coordenadas esféricas es

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi\}$$

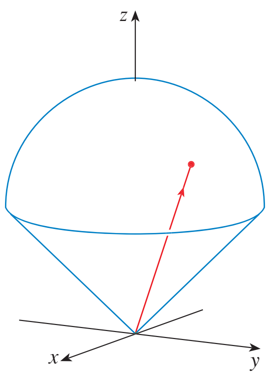
En la figura 11 se muestra cómo E es barrida si se integra primero con respecto a ρ, luego ϕ y después θ. El volumen de E es

$$V(E) = \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

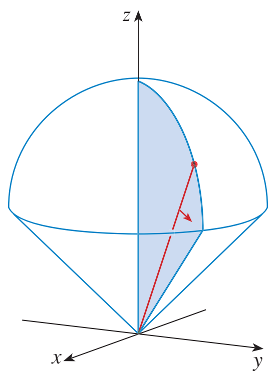
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos \phi} d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} \phi \cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$

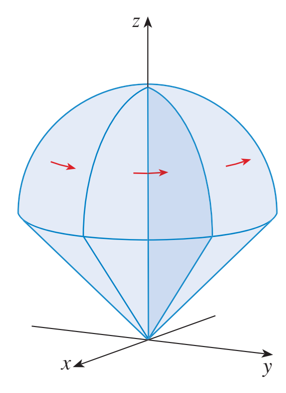
TEC En Visual 15.8 se muestra una animación de la figura 11.



ρ varía de 0 a $\cos \phi$ mientras que ϕ y θ son constantes.



ϕ varía de 0 a $\pi/4$ mientras que θ es constante.



θ varía de 0 a 2π.

FIGURA 11

□

15.8 EJERCICIOS

1–2 Localice el punto cuyas coordenadas esféricas se dan. A continuación encuentre las coordenadas rectangulares del punto.

1. (a) $(1, 0, 0)$ (b) $(2, \pi/3, \pi/4)$

2. (a) $(5, \pi, \pi/2)$ (b) $(4, 3\pi/4, \pi/3)$

3–4 Cambie de coordenadas rectangulares a esféricas.

3. (a) (1,) (b) $(0, -1, -1)$

4. (a) $(5, \pi, \pi/2)$ (b) (−1, 1,)

5–6 Describa verbalmente la superficie cuya ecuación se da.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7–8 Identifique la superficie cuya ecuación se da.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$ **8.** $\rho^2 (\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi = 9$

9–10 Escriba la ecuación en coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$

10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

11–14 Trace el sólido descrito por las desigualdades dadas.

11. $\rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

12. $2 \leqslant \rho \leqslant 3, \quad \pi/2 \leqslant \phi \leqslant \pi$

13. $\rho \leqslant 1, \quad 3\pi/4 \leqslant \phi \leqslant \pi$

14. $\rho \leqslant 2, \quad \rho \leqslant \cos\phi$

15. Un sólido se encuentra sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y bajo la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escriba una descripción del sólido en términos de desigualdades que comprendan coordenadas esféricas.

16. (a) Encuentre desigualdades que describan una esfera hueca con diámetro de 30 cm y grosor de 0.5 cm. Explique en qué forma ha posicionado el sistema de coordenadas que ha seleccionado.
(b) Suponga que la esfera se corta a la mitad. Escriba desigualdades que describan una de las mitades.

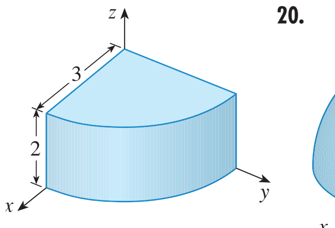
17–18 Bosqueje el sólido cuyo volumen está dado por la integral y evalúe la integral.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$

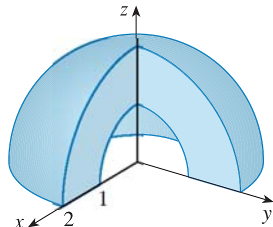
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho \, d\phi \, d\theta$

19–20 Establezca la integral triple de una función continua arbitraria $f(x, y, z)$ en coordenadas cilíndricas o esféricas sobre el sólido mostrado.

19.



20.



21–34 Use coordenadas esféricas.

21. Evalúe $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)\, dV$, donde B es la bola con centro en el origen y radio 5.

22. Evalúe $\iiint_H (9 - x^2 - y^2)\, dV$, donde H es la semiesfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

23. Evalúe $\iiint_E z\, dV$, donde E yace entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

24. Evalúe $\iiint_E e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV$, donde E está encerrada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el primer octante.

25. Evalúe $\iiint_E x^2\, dV$, donde E está acotada por el plano xz y los hemisferios $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ y $y = \sqrt{16 - x^2 - z^2}$.

26. Evalúe $\iiint_E xyz\, dV$, donde E yace entre las esferas $\rho = 2$ y $\rho = 4$ y arriba del cono $\phi = \pi/3$.

27. Encuentre el volumen del sólido $\rho \leqslant a$ que está arriba del cono $\phi = \pi/6$ y debajo de la esfera $\phi = \pi/3$.

28. Encuentre la distancia promedio de un punto en una esfera de radio a a su centro.

29. (a) Encuentre el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $\phi = \pi/3$ y debajo de la esfera $\rho = 4\cos\phi$.
(b) Encuentre el centroide del sólido de la parte (a).

30. Encuentre el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y arriba del plano xy y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. Encuentre el centroide del sólido del ejercicio 25.

32. Sea H una semiesfera sólida de radio a cuya densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde el centro de la base.
(a) Encuentre la masa de H.
(b) Encuentre el centro de masa de H.
(c) Encuentre el momento de inercia de H respecto a su eje.

33. (a) Encuentre el centroide de una semiesfera homogénea sólida de radio a.
(b) Encuentre el momento de inercia del sólido del inciso (a) respecto a un diámetro de su base.

34. Determine la masa y el centro de masa de una semiesfera sólida de radio a si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia desde la base.

35–38 |||| Use coordenadas cilíndricas o esféricas, lo que parezca más apropiado.

35. Encuentre el volumen y el centroide del sólido E que yace arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Encuentre la cuña más pequeña cortada de una esfera de radio a por dos planos que se cortan a lo largo de un diámetro a un ángulo de $\pi/6$.

CAS **37.** Evalúe $\iiint_E z\,dV$, donde E se localiza arriba del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y debajo del plano $z = 2y$. Use la tabla de integrales (en las páginas de referencias 6–10) o un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.

38. (a) Encuentre el volumen encerrado por el toro $\rho = \text{sen}\,\phi$.
(b) Use una computadora para dibujar el toro.

39–40 |||| Evalúe la integral cambiando a coordenadas esféricas.

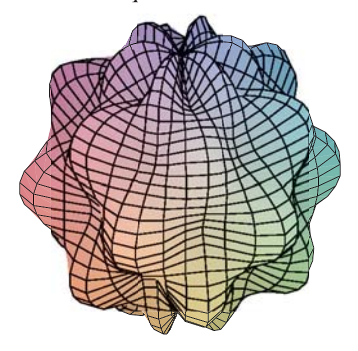
39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

41. Use un aparato de gráficas para dibujar un silo formadode un cilindro con radio 3 y altura 10 rematado por una semiesfera.

42. La latitud y longitud de un punto P del hemisferio norte están relacionadas a los coordenadas esféricas ρ, θ, y ϕ como sigue. Tomamos el origen con el centro de la Tierra y el eje positivo de las z que pase por el polo norte. El eje x positivo pasa por el punto donde el meridiano primo (el meridiano que pasa por Greenwich, Inglaterra) corta el ecuador. Entonces la latitud de P es $\alpha = 90° - \phi°$ y la longitud es $\beta = 360° - \theta°$. Encuentre la distancia de gran círculo de Los Ángeles (lat. 34.06° N, long. 118.25° W) a Montreal (lat. 45.50° N, long. 73.60° W). Tome el radio de la Tierra como de 3960 millas. (Un *gran círculo* es el círculo de intersección de una esfera y un plano que pasa por el centro de la esfera.)

CAS **43.** Las superficies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\,\text{sen}\,m\theta\,\text{sen}\,n\phi$ que se han empleado como modelos para tumores. Se muestra la "esfera dispareja" con $m = 6$ y $n = 5$. Use un sistema algebraico computacional para hallar el volumen que encierra.



44. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(La integral triple impropia se define como el límite de una integral triple sobre una esfera sólida a medida que el radio de la esfera se incrementa de manera indefinida.)

45. (a) Use coordenadas cilíndricas para mostrar que el volumen del sólido acotado arriba por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$ y que está debajo del cono $z = r\cot\phi_0$ (o $\phi = \phi_0$), donde $0 < \phi_0 < \pi/2$, es

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduzca el volumen de la cuña esférica dado $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ es

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Use el Teorema del Valor Medio para mostrar que el volumen del inciso (b) se puede escribir como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2\,\text{sen}\,\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

donde $\tilde{\rho}$ se localiza entre ρ_1 y ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 y ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ y $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROYECTO DE APLICACIÓN

CARRERA DE OBJETOS CIRCULARES

h

α

Suponga que una bola sólida (una canica), una bola hueca (una pelota de squash), un cilindro sólido (una barra de acero) y un cilindro hueco (una tubería de plomo) ruedan por una pendiente. ¿Cuál de estos objetos llega primero al fondo? (Haga una inferencia antes de proceder.)

Para contestar esta pregunta se considera una bola o cilindro con masa m, radio r y momento de inercia I (respecto al eje de rotación). Si la caída vertical es h, entonces la energía potencial en la parte superior es mgh. Suponga que el objeto llega al fondo con velocidad v y velocidad angular w, de modo que $v = \omega r$. La energía cinética en el fondo consiste en dos partes: $\frac{1}{2}mv^2$ de la traslación (al bajar la pendiente) y $\frac{1}{2}I\omega^2$ de la rotación. Si se supone que la pérdida de energía de la fricción de rodamiento es insignificante, entonces la conservación de energía da

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

1. Demuestre que

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + I^*} \qquad \text{donde } I^* = \frac{I}{mr^2}$$

2. Si $y(t)$ es la distancia vertical recorrida en el tiempo t, entonces con el mismo razonamiento usado en el problema 1 se muestra que $v^2 = 2gy/(1 + I^*)$ en cualquier tiempo t. Use este resultado para mostrar que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{1 + I^*}}\,(\text{sen } \alpha)\sqrt{y}$$

donde α es el ángulo de inclinación del plano.

3. Resuelva la ecuación diferencial del problema 2 y demuestre que el tiempo de viaje total es

$$T = \sqrt{\frac{2h(1 + I^*)}{g \,\text{sen}^2\alpha}}$$

Esto demuestra que el objeto con el valor más pequeño de I^* gana la carrera.

4. Demuestre que $I^* = \frac{1}{2}$ para un cilindro sólido e $I^* = 1$ para un cilindro hueco.

5. Calcule I^* para una bola parcialmente hueca con radio interno a y radio externo r. Exprese su respuesta en términos de $b = a/r$. ¿Qué sucede cuando $a \to 0$ y cuando $a \to r$?

6. Demuestre que $I^* = \frac{2}{5}$ para una bola sólida e $I^* = \frac{2}{3}$ para una bola hueca. Así, los objetos terminan en el siguiente orden: bola sólida, cilindro sólido, bola hueca, cilindro hueco.

15.9 CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES MÚLTIPLES

En cálculo unidimensional se emplea con frecuencia un cambio de variable (una sustitución) para simplificar una integral. Si se invierten los papeles de x y u, se puede escribir la regla de sustitución (5.5.6) como

1 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\,du$$

donde $x = g(u)$ y $a = g(c)$, $b = g(d)$. Otra forma de escribir la fórmula 1 es como sigue:

2 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du$$

Un cambio de variables puede ser útil también en las integrales dobles. Ya se ha visto un ejemplo de esto: conversión a coordenadas polares. Las nuevas variables r y θ se relacionan con las variables impares x y y mediante las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

y la fórmula de cambio de variables (15.4.2) se puede escribir como

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

donde S es la región en el plano $r\theta$ que corresponde a la región R en el plano xy.

De manera más general, se considera un cambio de variables que está dado por una **transformación** T del plano uv al plano xy:

$$T(u, v) = (x, y)$$

donde x y y se relacionan con u y v mediante las ecuaciones

3 $$x = g(u, v) \qquad y = h(u, v)$$

o, como algunas veces se escribe,

$$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v)$$

Por lo común, se supone que T es una **transformación C^1**, lo que significa que g y h tienen derivadas parciales continuas de primer orden.

Una transformación T es en realidad una función cuyo dominio y rango son subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Si $T(u_1, v_1) = (x_1, y_1)$, entonces el punto (x_1, y_1) se llama **imagen** del punto (u_1, v_1). Si no hay dos puntos que tengan la misma imagen, T se llama **uno a uno**. En la figura 1 se muestra el efecto de una transformación T en una región S en el plano uv. T transforma a S en una región R en el plano xy llamada **imagen de S**, que consta de las imágenes de los puntos en S.

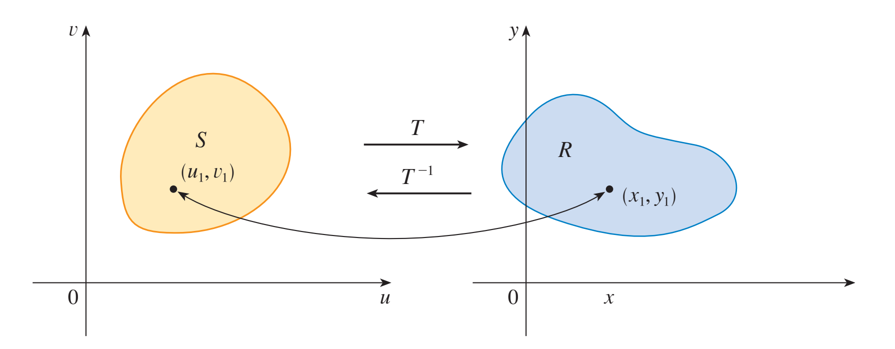


FIGURA 1

Si T es una transformación uno a uno, entonces tiene una **transformación inversa** T^{-1} del plano xy al plano uv y podría ser posible resolver las ecuaciones 3 para u y v en términos de x y y:

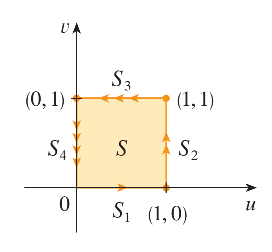
$$u = G(x, y) \qquad v = H(x, y)$$

V EJEMPLO 1 Una transformación se define por las ecuaciones

$$x = u^2 - v^2 \qquad y = 2uv$$

Encuentre la imagen del cuadrado $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1\}$.

SOLUCIÓN La transformación hace corresponder el límite de S con el límite de la imagen. Así que se comienza por hallar las imágenes de los lados de S. El primer lado, S_1, está dado



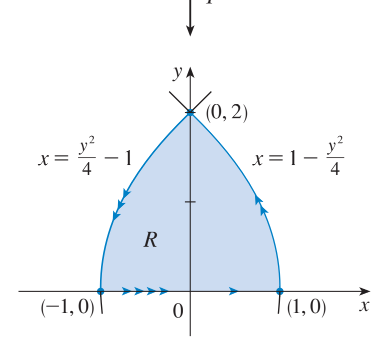


FIGURA 2

por $v = 0$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$. (Véase fig. 2.) De las ecuaciones dadas se tiene $x = u^2$, $y = 0$ y, por lo tanto, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Así, S_1 se hace corresponder con el segmento de recta de (0, 0) a (1, 0) en el plano xy. El segundo lado, S_2, es $u = 1$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$ y, si $u = 1$ en las ecuaciones dadas, se obtiene

$$x = 1 - v^2 \qquad y = 2v$$

Al eliminar v se obtiene

4 $$x = 1 - \frac{y^2}{4} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

que es la parte de una parábola. De manera similar, S_3 está dada por $v = 1$ $(0, \leqslant u \leqslant 1)$, cuya imagen es el arco parabólico

5 $$x = \frac{y^2}{4} - 1 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 0$$

Por último, S_4 está dado por $u = 0$ $(0 \leqslant v \leqslant 1)$ cuya imagen es $x = -v^2$, $y = 0$, es decir, $-1 \leqslant x \leqslant 0$. (Observe que cuando se va alrededor del cuadrado en el sentido contrario a las manecillas del reloj, también se recorre la región parabólica en dirección contraria a las manecillas del reloj). La imagen de S es la región R (mostrada en la figura 2) acotada por el eje x y las parábolas dadas por las ecuaciones 4 y 5. □

Ahora se verá cómo un cambio de variables afecta a la integral doble. Se empieza con un rectángulo pequeño S en el plano uv cuya esquina inferior izquierda es el punto (u_0, v_0) y cuyas dimensiones son Δu y Δv. (Véase fig. 3.)

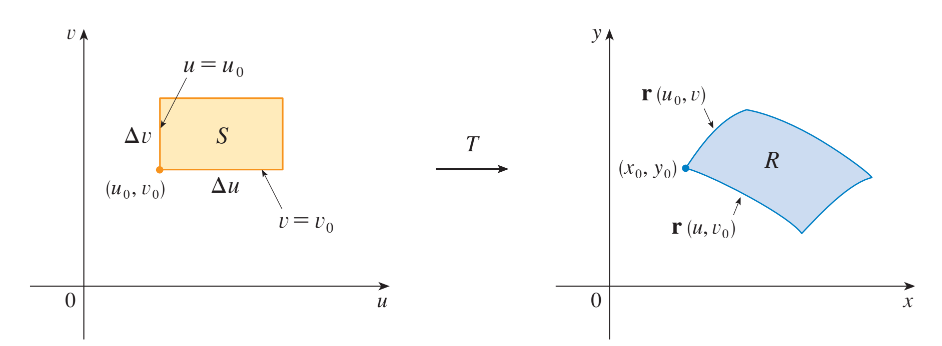


FIGURA 3

La imagen de S es una región R en el plano xy, uno de cuyos límites es $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$. El vector

$$\mathbf{r}(u, v) = g(u, v)\,\mathbf{i} + h(u, v)\,\mathbf{j}$$

es el vector de posición de la imagen del punto (u, v). La ecuación del lado inferior de S es $v = v_0$, cuya curva imagen está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v_0)$. El vector tangente en (x_0, y_0) a esta curva imagen es

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

De manera similar, el vector tangente en (x_0, y_0) a la curva imagen del lado izquierdo de S (a saber, $u = u_0$) es

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

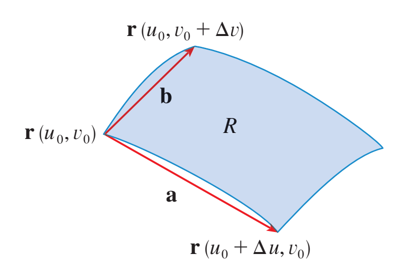


FIGURA 4

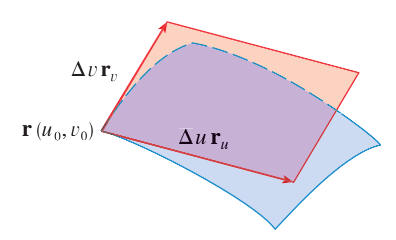


FIGURA 5

Se puede aproximar la región imagen $R = T(S)$ por el paralelogramo determinado por los vectores secantes

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

mostrados en la figura 4. Pero

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

y, por lo tanto, $\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta u\, \mathbf{r}_u$

De manera similar, $\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) \approx \Delta v\, \mathbf{r}_v$

Esto significa que se puede aproximar R mediante un paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v$. (Véase fig. 5.) Por lo tanto, se puede aproximar el área de R mediante el área de este paralelogramo, el cual, de la sección 12.4, es

6 $$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v$$

Al calcular el producto punto, se obtiene

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

El determinante que surge en este cálculo se llama *jacobiano* de la transformación y se le da una notación especial.

■ Recibe el nombre de jacobiano en honor al matemático alemán Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Aunque el matemático francés Cauchy fue el primero que usó estos determinantes especiales relacionados con derivadas parciales, Jacobi desarrolló con ellos un método para evaluar integrales múltiples.

7 DEFINICIÓN El **jacobiano** de la transformación T dado por $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Con esta notación se puede usar la ecuación 6 para dar una aproximación del área ΔA de R:

8 $$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_0, v_0).

A continuación se divide una región S en el plano uv en rectángulos S_{ij} y a las imágenes en el plano xy se les llama R_{ij}. (Véase fig. 6.)

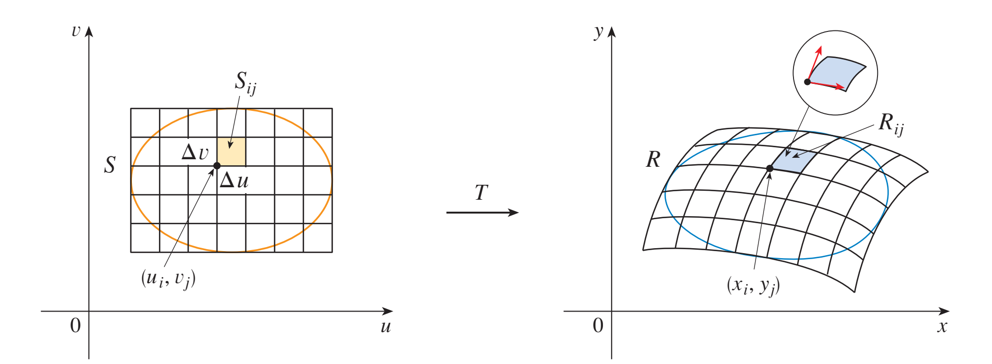


FIGURA 6

Al aplicar la aproximación (8) a cada R_{ij}, se aproxima la integral doble de f sobre R como sigue:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

$$\approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(g(u_i, v_j), h(u_i, v_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

donde el jacobiano se evalúa en (u_i, v_j). Observe que esta suma doble es una suma de Riemann para la integral

$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

El argumento anterior hace pensar que el siguiente teorema es cierto. (En libros de cálculo avanzados se da una demostración completa.)

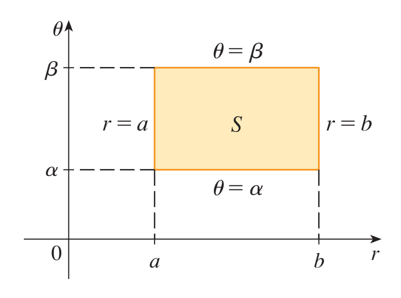
9 CAMBIO DE VARIABLES EN UNA INTEGRAL DOBLE Suponga que T es una transformación C^1 cuyo jacobiano es no nulo y que relaciona una región S en el plano uv con una región R en el plano xy. Suponga que f es continua en R, y que R y S son regiones planas tipo I o tipo II. Suponga también que T es uno a uno, excepto quizá en el límite de S. Entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

El Teorema 9 dice que se cambia de una integral en x y y a una integral en u y v al expresar a x y y en términos de u y v y escribir

$$dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Observe la similitud entre el Teorema 9 y la fórmula unidimensional en la ecuación 2. En lugar de la derivada dx/du, se tiene el valor absoluto del jacobiano, es decir, $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$.



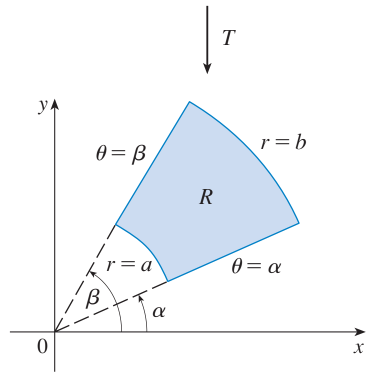


FIGURA 7
Transformación en coordenadas polares

Como una primera ilustración del Teorema 9, se muestra que la fórmula para integración en coordenadas polares es sólo un caso especial. Aquí la transformación T del plano $r\theta$ al plano xy está dada por

$$x = g(r, \theta) = r\cos\theta \qquad y = h(r, \theta) = r \operatorname{sen}\theta$$

y la representación geométrica de la transformación se muestra en la figura 7. T establece una correspondencia entre un rectángulo ordinario en el plano $r\theta$ y el rectángulo polar en el plano xy. El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r > 0$$

Así, el Teorema 9 da

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

que es lo mismo que la fórmula 15.4.2.

V EJEMPLO 2 Use el cambio de variables $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la integral $\iint_R y\,dA$, donde R es la región acotada por el eje x y las parábolas $y^2 = 4 - 4x$ y $y^2 = 4 + 4x$, $y \geqslant 0$.

SOLUCIÓN La región R se ilustra en la figura 2. En el ejemplo 1 se descubrió que $T(S) = R$, donde S es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. De hecho, la razón para hacer el cambio de variables para evaluar la integral es que S es una región mucho más simple que R. Primero se necesita evaluar el jacobiano:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2 > 0$$

Por lo tanto, por el Teorema 9,

$$\iint_R y\,dA = \iint_S 2uv \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA = \int_0^1 \int_0^1 (2uv)4(u^2 + v^2)\,du\,dv$$

$$= 8\int_0^1 \int_0^1 (u^3 v + uv^3)\,du\,dv = 8\int_0^1 \left[\tfrac{1}{4}u^4 v + \tfrac{1}{2}u^2 v^3\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$= \int_0^1 (2v + 4v^3)\,dv = \left[v^2 + v^4\right]_0^1 = 2$$

□

NOTA El ejemplo 2 no fue un problema muy difícil de resolver, porque se tenía un cambio de variables adecuado. Si no se tuviera una transformación, entonces el primer paso es considerar un cambio de variables apropiado. Si (x, y) es difícil de integrar, entonces la forma de $f(x, y)$ puede hacer pensar en una transformación. Si la región de integración R es difícil, entonces la transformación debe ser elegida de modo que la región correspondiente en S en el plano uv tenga una descripción conveniente.

EJEMPLO 3 Evalúe la integral $\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$ y $(0, -1)$.

SOLUCIÓN Puesto que no es fácil integrar $e^{(x+y)/(x-y)}$, se hace un cambio de variables sugerido por la forma de esta función:

$$\boxed{10} \qquad u = x + y \qquad v = x - y$$

Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano xy al plano uv. El Teorema 9 habla acerca de una transformación T del plano uv al plano xy. Se obtiene al despejar x y y de las ecuaciones 10:

$$\boxed{11} \qquad x = \tfrac{1}{2}(u + v) \qquad y = \tfrac{1}{2}(u - v)$$

El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}$$

Para hallar la región S en el plano uv correspondiente a R, se nota que los lados de R están sobre las líneas

$$y = 0 \qquad x - y = 2 \qquad x = 0 \qquad x - y = 1$$

y, de las ecuaciones 10 u 11, las líneas imagen en el plano uv son

$$u = v \qquad v = 2 \qquad u = -v \qquad v = 1$$

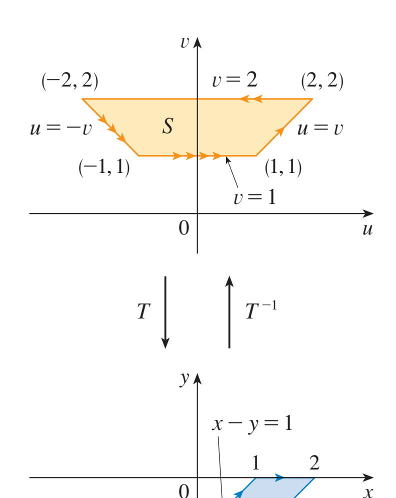


FIGURA 8

Así, la región S es la región trapezoidal con vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ y $(-1, 1)$ mostrada en la figura 8. Puesto que

$$S = \{(u, v) \mid 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}$$

El Teorema 9 da

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA = \iint_S e^{u/v}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

$$= \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v}\left(\tfrac{1}{2}\right) du\,dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[v e^{u/v}\right]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_1^2 (e - e^{-1})v\,dv = \tfrac{3}{4}(e - e^{-1}) \qquad \square$$

INTEGRALES TRIPLES

Hay una fórmula similar de cambio de variables para integrales triples. Sea T una transformación que mapea una región S en el espacio uvw sobre una región R en el espacio xyz por medio de las ecuaciones

$$x = g(u, v, w) \qquad y = h(u, v, w) \qquad z = k(u, v, w)$$

El **jacobiano** de T es el siguiente determinante de 3×3:

12
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Bajo hipótesis similares a las del Teorema 9, se tiene la siguiente fórmula para integrales triples:

13
$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

EJEMPLO 4 Use la fórmula 13 para deducir la fórmula para integración triple en coordenadas esféricas.

SOLUCIÓN Aquí el cambio de variables está dado por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi$$

Se calcula el jacobiano como sigue:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \operatorname{sen} \phi \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \operatorname{sen} \theta \end{vmatrix} - \rho \operatorname{sen} \phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \phi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \cos \phi \,(-\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \operatorname{sen}^2 \theta - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \cos^2 \theta)$$

$$- \rho \operatorname{sen} \phi \,(\rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta)$$

$$= -\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi - \rho^2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}^2 \phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

Puesto que $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, se tiene $\operatorname{sen} \phi \geqslant 0$. Por lo tanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \operatorname{sen} \phi| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

y la fórmula 13 da

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

que es equivalente a la fórmula 15.8.3. □

15.9 EJERCICIOS

1–6 Encuentre el jacobiano de la transformación.

1. $x = 5u - v, \quad y = u + 3v$

2. $uv, \quad y = u/v$

3. $e^{-r} \operatorname{sen} \theta, \quad y = e^{r} \cos\theta$

4. $e^{s+t}, \quad y = e^{s-t}$

5. $u/v, \quad y = v/w, \quad z = w/u$

6. $v + w^2, \quad y = w + u^2, \quad z = u + v^2$

7–10 Encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$;
$x = 2u + 3v, \ y = u - v$

8. S es el cuadrado acotado por las líneas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$, $v = 1$; $\quad x = v, \ y = u(1 + v^2)$

9. S es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$; $x = u^2, \ y = v$

10. S es el disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $\quad x = au, \ y = bv$

11–16 Use la transformación dada para evaluar la integral.

11. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, donde R es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(1, 2)$; $\quad x = 2u + v, y = u + 2v.$

12. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, donde R es el paralelogramo con vértices $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(3, -1)$ y $(1, 5)$;
$x = \frac{1}{4}(u + v), \ y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

13. $\iint_R x^2\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $\quad x = 2u, \ y = 3v$

14. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, donde R es la región acotada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$,
$y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$

15. $\iint_R xy\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las líneas $y = x$ y $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v, y = v.$

16. $\iint_R y^2\, dA$, donde R es la región acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $\quad u = xy$, $v = xy^2$. Ilustre mediante una calculadora o computadora para trazar R.

17. (a) Evalúe $\iiint_E dV$, donde E es el sólido encerrado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Use la transformación $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.
(b) La Tierra no es una esfera perfecta; la rotación ha dado como resultado un aplastamiento de los polos. Así, la forma se puede aproximar mediante un elipsoide con $a = b = 6378$ km y $c = 6356$ km. Use el inciso (a) para estimar el volumen de la Tierra.

18. Evalúe $\iiint_E x^2 y\, dV$, donde E es el sólido del ejercicio 17 (a).

19–23 Evalúe la integral mediante un cambio de variables apropiado.

19. $\displaystyle\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA$, donde R es el paralelogramo encerrado por las líneas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ y $3x - y = 8$.

20. $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dA$, donde R es el rectángulo encerrado por las líneas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$ y $x + y = 3$.

21. $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 1)$.

22. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$.

23. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, donde R está dada por la desigualdad $|x| + |y| \leqslant 1$

24. Sea f continua en $[0, 1]$ y sea R la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Demuestre que

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du$$

15 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Suponga que f es una función continua definida en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$.
   (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann doble de f. Si $f(x, y) \geqslant 0$, ¿qué representa la suma?
   (b) Escriba la definición de $\iint_R f(x, y)\, dA$ como un límite.
   (c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\iint_R f(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \geqslant 0$? ¿Qué pasa si f toma valores positivos y negativos?
   (d) ¿Cómo evalúa $\iint_R f(x, y)\, dA$?
   (e) ¿Qué dice la Regla del Punto Medio para integrales dobles?
   (f) Escriba una expresión para el valor promedio de f.

2. (a) ¿Cómo define a $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región acotada que no es un rectángulo?
   (b) ¿Qué es una región tipo I? ¿Cómo evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo I?
   (c) ¿Qué es una región tipo II? ¿Cómo evalúa $\iint_D f(x, y)\, dA$ si D es una región tipo II?
   (d) ¿Qué propiedades tienen las integrales dobles?

3. ¿Cómo cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble? ¿Por qué querría hacer esto?

4. Si una lámina ocupa una región plana D y tiene una función de densidad $\rho(x, y)$, escriba expresiones para cada uno de los siguientes incisos en términos de integrales dobles.
   (a) La masa.
   (b) Los momentos respecto a los ejes.
   (c) El centro de masa.
   (d) Los momentos de inercia respecto a los ejes y el origen.

5. Sea f una función de densidad conjunta de un par de variables aleatorias continuas X y Y.
   (a) Escriba una integral doble para la probabilidad de que X esté entre a y b, y Y esté entre c y d.
   (b) ¿Qué propiedades posee f?
   (c) ¿Cuáles son los valores esperados de X y Y?

6. (a) Escriba la definición de la integral triple de f sobre una caja rectangular B.
   (b) ¿Cómo evalúa $\iiint_B f(x, y, z)\, dV$?
   (c) ¿Cómo define $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región sólida acotada que no es una caja?
   (d) ¿Qué es una región sólida tipo 1? ¿Cómo evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de este tipo?
   (e) ¿Qué es una región sólida tipo 2? ¿Cómo evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de este tipo?
   (f) ¿Qué es una región sólida tipo 3? ¿Cómo evalúa $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ si E es una región de este tipo?

7. Suponga que un objeto sólido ocupa la región E y tiene función de densidad $\rho(x, y, z)$. Escriba expresiones para cada uno de los siguientes incisos.
   (a) La masa.
   (b) Los momentos respecto a los planos coordenados.
   (c) Las coordenadas del centro de masa.
   (d) Los momentos de inercia respecto a los ejes.

8. (a) ¿Cómo cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en una integral triple?
   (b) ¿Cómo cambia de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas en una integral triple?
   (c) ¿En qué situaciones cambiaría a coordenadas cilíndricas o esféricas?

9. (a) Si una transformación T está dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, ¿cuál es el jacobiano de T?
   (b) ¿Cómo cambia las variables en una integral doble?
   (c) ¿Cómo cambia las variables en una integral triple?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso, explique por qué. Si es falso explique por qué, o dé un ejemplo que desapruebe el enunciado.

1. $\int_{-1}^{2}\int_{0}^{6} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dx\, dy = \int_{0}^{6}\int_{-1}^{2} x^2 \operatorname{sen}(x - y)\, dy\, dx$

2. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} \sqrt{x + y^2}\, dy\, dx = \int_{0}^{x}\int_{0}^{1} \sqrt{x + y^2}\, dx\, dy$

3. $\int_{1}^{2}\int_{3}^{4} x^2 e^y\, dy\, dx = \int_{1}^{2} x^2\, dx \int_{3}^{4} e^y\, dy$

4. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} e^{x^2+y^2} \operatorname{sen} y\, dx\, dy = 0$

5. Si D es el disco dado por $x^2 + y^2 \leqslant 4$, entonces

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dA = \tfrac{16}{3}\pi$$

6. $\int_{1}^{4}\int_{0}^{1} \left(x^2 + \sqrt{y}\right) \operatorname{sen}(x^2 y^2)\, dx\, dy \leqslant 9$

7. La integral

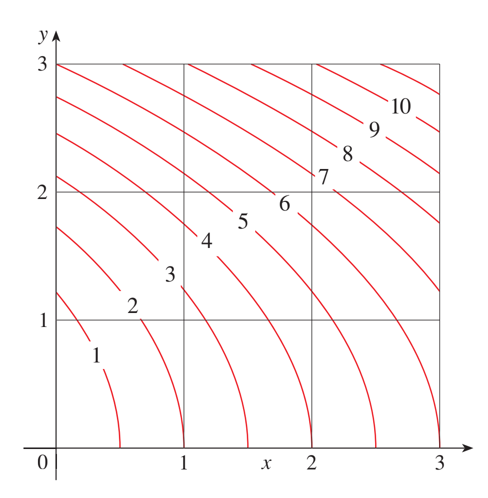
$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{r}^{2} dz\, dr\, d\theta$$

representa el volumen encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 2$.

8. La integral $\iiint_E kr^3\, dz\, dr\, d\theta$ representa el momento de inercia respecto al eje z de un sólido E con densidad constante k.

EJERCICIOS

1. Un mapa de contorno se muestra para una función f en el cuadrado $R = [0, 3] \times [0, 3]$. Use una suma de Riemann con nueve términos para estimar el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$. Tome los puntos de muestra como las esquinas superiores derechas de los cuadrados.



2. Use la Regla del Punto Medio para estimar la integral del ejercicio 1.

3–8 Calcule la integral iterada.

3. $\int_1^2 \int_0^2 (y + 2xe^y)\, dx\, dy$

4. $\int_0^1 \int_0^1 ye^{xy}\, dx\, dy$

5. $\int_0^1 \int_0^x \cos(x^2)\, dy\, dx$

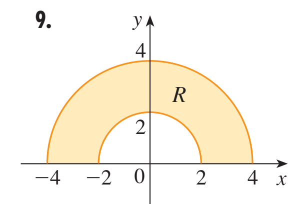
6. $\int_0^1 \int_x^{e^x} 3xy^2\, dy\, dx$

7. $\int_0^\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y \operatorname{sen} x\, dz\, dy\, dx$

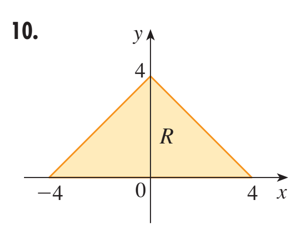
8. $\int_0^1 \int_0^y \int_x^1 6xyz\, dz\, dx\, dy$

9–10 Escriba $\iint_R f(x, y)\, dA$ como una integral iterada, donde R es la región mostrada y f es una función continua arbitraria sobre R.

9.



10.



11. Describa la región cuya área está dada por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} 2\theta} r\, dr\, d\theta$$

12. Describa el sólido cuyo volumen está dado por la integral

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

y evalúe la integral.

13–14 Calcule la integral iterada invirtiendo primero el orden de integración.

13. $\int_0^1 \int_x^1 \cos(y^2)\, dy\, dx$

14. $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{ye^{x^2}}{x^3}\, dx\, dy$

15–28 Calcule el valor de la integral múltiple.

15. $\iint_R ye^{xy}\, dA$, donde $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$

16. $\iint_D xy\, dA$, donde $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y^2 \leqslant x \leqslant y + 2\}$

17. $\iint_D \frac{y}{1 + x^2}\, dA$, donde D está acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$

18. $\iint_D \frac{1}{1 + x^2}\, dA$, donde D es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

19. $\iint_D y\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotado por las parábolas $x = y^2$ y $x = 8 - y^2$.

20. $\iint_D y\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que yace arriba de la hipérbola $xy = 1$ y la línea $y = x$ y debajo de la línea $y = 2$.

21. $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotada por las líneas $y = 0$ y $y = \sqrt{3}x$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

22. $\iint_D x\, dA$, donde D es la región en el primer cuadrante que está entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 2$.

23. $\iiint_E xy\, dV$, donde $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ 0 \leqslant z \leqslant x + y\}$

24. $\iiint_T xy\, dV$, donde T es el tetraedro sólido con vértices $(0, 0, 0)$, $\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

25. $\iiint_E y^2z^2\, dV$, donde E está acotada por el paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ y el plano $x = 0$.

26. $\iiint_E z\, dV$, donde E está acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$ y el cilindro circular $y^2 + z^2 = 1$ en el primer octante.

27. $\iiint_E yz\, dV$, donde E está arriba del plano $z = 0$, debajo del plano $z = y$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

28. $\iiint_H z^3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, donde H es la semiesfera sólida que está arriba del plano xy y tiene centro en el origen y radio 1.

29–34 Encuentre el volumen del sólido dado.

29. Debajo del paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ y arriba del rectángulo $R = [0, 2] \times [1, 4]$.

30. Debajo de la superficie $z = x^2y$ y arriba del triángulo en el plano xy con vértices $(1, 0)$, $(2, 1)$ y $(4, 0)$.

31. El tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 0) y (2, 2, 0).

32. Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $z = 0$ y $y + z = 3$.

33. Una de las cuñas cortadas del cilindro $x^2 + 9y^2 = a^2$ por los planos $z = 0$ y $z = mx$.

34. Arriba del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y debajo del semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

---

35. Considere una lámina que ocupa la región D acotada por la parábola $x = 1 - y^2$ y los ejes coordenados en el primer cuadrante con función de densidad $\rho(x, y) = y$.
(a) Encuentre la masa de la lámina.
(b) Encuentre el centro de masa.
(c) Encuentre los momentos de inercia y los radios de giro respecto a los ejes x y y.

36. Una lámina ocupa la parte del disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ que yace en el primer cuadrante.
(a) Encuentre el centroide de la lámina.
(b) Encuentre el centro de masa de la lámina si la función de densidad es $\rho(x, y) = xy^2$.

37. (a) Encuentre el centroide de un cono circular recto con altura h y radio de base a. (Coloque el cono de modo que su base esté en el plano xy con centro en el origen y su eje a lo largo del eje positivo z).

38. Encuentre el momento de inercia del cono del Ejercicio 37 alrededor de su eje (el eje z).

39. Use coordenadas polares para evaluar $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^3 + xy^2)\, dy\, dx$.

40. Use coordenadas esféricas para evaluar

$$\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy$$

41. Si D es la región acotada por las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = e^x$, encuentre el valor aproximado de la integral $\iint_D y^2\, dA$. (Use un dispositivo de graficación para estimar los puntos de intersección de las curvas.)

CAS **42.** Encuentre el centro de masa del tetraedro sólido con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3) y función de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

43. La función de densidad conjunta para variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor de la constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 2, Y \geqslant 1)$.
(c) Halle $P(X + Y \leqslant 1)$.

44. Una lámpara tiene tres bombillos, cada uno de un tipo con duración promedio de 800 horas. Si se modela la probabilidad de falla de los bombillos mediante una función de densidad exponencial con media 800, encuentre la probabilidad de que los tres bombillos fallen en un total de 1000 horas.

45. Reescriba la integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

como la integral iterada en el orden $dx\, dy\, dz$.

46. Dé otras cinco integrales iteradas que sean iguales a

$$\int_0^2 \int_0^{y^3} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

47. Use la transformación $u = x - y$, $v = x + y$ para evaluar $\iint_R (x - y)/(x + y)\, dA$, donde R es el cuadrado con vértices (0, 2), (1, 1), (2, 2) y (1, 3).

48. Use la transformación $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para hallar el volumen de la región acotada por la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ y los planos coordenados.

49. Use la fórmula de cambio de variables y una transformación apropiada para evaluar $\iint_R xy\, dA$, donde R es el cuadrado con vértices (0, 0), (1, 1), (2, 0) y (1, −1).

50. El **Teorema del Valor Medio para integrales dobles** dice que si f es una función continua en una región plana D que es de tipo I o II, entonces existe un punto (x_0, y_0) en D tal que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0)\, A(D)$$

Use el Teorema del Valor Extremo (14.7.8) y la propiedad 15.3.11 de las integrales para demostrar este teorema. (Use la demostración de la versión de una sola variable de la sección 6.5 como guía.)

51. Suponga que f es continua en un disco que contiene el punto (a, b). Sea D_r el disco cerrado con centro (a, b) y radio r. Use el Teorema del Valor Medio para integrales dobles (véase el ejercicio 50) para mostrar que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D_r} f(x, y)\, dA = f(a, b)$$

52. (a) Evalúe $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{n/2}}\, dA$, donde n es un entero y D es la región acotada por los círculos con centro en el origen y radios r y R, $0 < r < R$.
(b) ¿Para qué valores de n la integral del inciso (a) tiene límite cuando $r \to 0^+$?
(c) Encuentre $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}}\, dV$, donde E es la región acotada por las esferas con centro en el origen y radios r y R, $0 < r < R$.
(d) Para qué valores de n la integral del inciso (c) tiene un límite cuando $r \to 0^+$?

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Si $[\![x]\!]$ denota el entero máximo en x, evalúe la integral

$$\iint_R [\![x + y]\!]\, dA$$

donde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant 3,\ 2 \leqslant y \leqslant 5\}$.

2. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{\text{máx}\{x^2, y^2\}}\, dy\, dx$$

donde $\text{máx}\{x^2, y^2\}$ representa los números más grandes de x^2 y y^2.

3. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \int_x^1 \cos(t^2)\, dt$ en el intervalo $[0, 1]$.

4. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores constantes, $\mathbf{r}$ es el vector de posición $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, y E está dada por las desigualdades $0 \leqslant \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} \leqslant \gamma$, demuestre que

$$\iiint_E (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})\, dV = \frac{(\alpha\beta\gamma)^2}{8|\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|}$$

5. La integral doble $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy$ es una integral impropia y se podría definir como el límite de las integrales dobles sobre el rectángulo $[0, t] \times [0, t]$ cuando $t \to 1^-$. Pero si se expande el integrando como una serie geométrica, se puede expresar la integral como la suma de una serie infinita. Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

6. Leonhard Euler pudo hallar la suma exacta de la serie del problema 5. En 1736 demostró que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

En este problema, se pide demostrar este hecho evaluando la integral doble en el problema 5. Empiece por hacer el cambio de variables

$$x = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \qquad y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$$

Esto da una rotación respecto al origen por el ángulo $\pi/4$. Será necesario bosquejar la región correspondiente en el plano uv.

[*Sugerencia*: si, al evaluar la integral, encuentra cualquiera de las expresiones $(1 - \operatorname{sen}\theta)/\cos\theta$ o $(\cos\theta)/(1 + \operatorname{sen}\theta)$, es posible que desee usar la identidad $\cos\theta = \operatorname{sen}((\pi/2) - \theta)$ y la identidad correspondiente para $\operatorname{sen}\theta$.]

7. (a) Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

(Nadie ha sido capaz de hallar el valor exacto de la suma de esta serie.)

(b) Demuestre que

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + xyz}\, dx\, dy\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$$

Use esta ecuación para evaluar la integral triple correcta hasta dos decimales.

8. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \ln \pi$$

evaluando primero la integral como una integral iterada.

9. (a) Demuestre que cuando la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

se escribe en coordenadas cilíndricas, se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

(b) Demuestre que cuando la ecuación de Laplace se escribe en coordenadas esféricas, se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\cot \phi}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

10. (a) Una lámina tiene densidad constante ρ y toma la forma de un disco con centro en el origen y radio R. Use la Ley de Newton de la Gravitación (véase sección 13.4) para mostrar que la magnitud de la fuerza de atracción que ejerce la lámina sobre un cuerpo con masa m localizada en el punto $(0, 0, d)$ en el eje positivo z es

$$F = 2\pi G m \rho d\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right)$$

[*Sugerencia*: divida el disco como en la figura 4 de la sección 15.4 y calcule primero la componente vertical de la fuerza ejercida por el subrectángulo polar R_{ij}.]

(b) Demuestre que la magnitud de la fuerza de atracción de una lámina con densidad ρ que ocupa un plano completo sobre un objeto con masa m localizado a una distancia d del plano es

$$F = 2\pi G m \rho$$

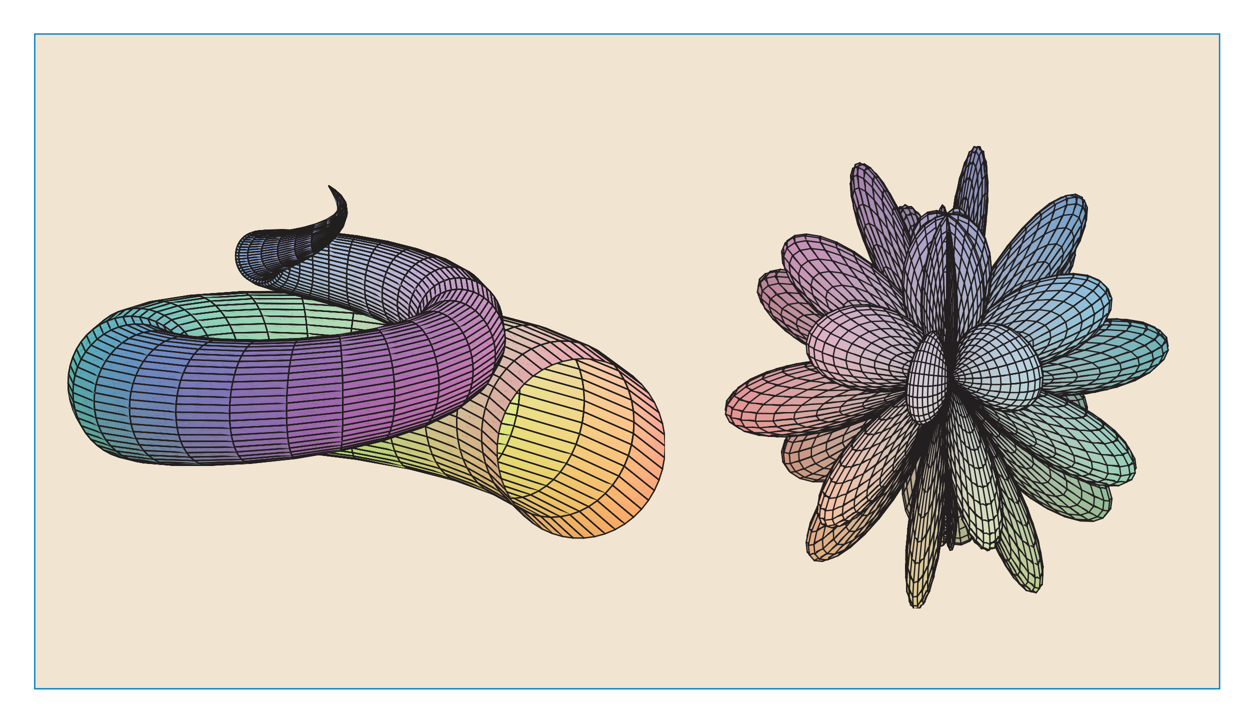
Observe que esta expresión no depende de d.

11. Si f es continua, demuestre que

$$\int_0^x \int_0^y \int_0^z f(t)\, dt\, dz\, dy = \tfrac{1}{2} \int_0^x (x - t)^2 f(t)\, dt$$

16

CÁLCULO VECTORIAL

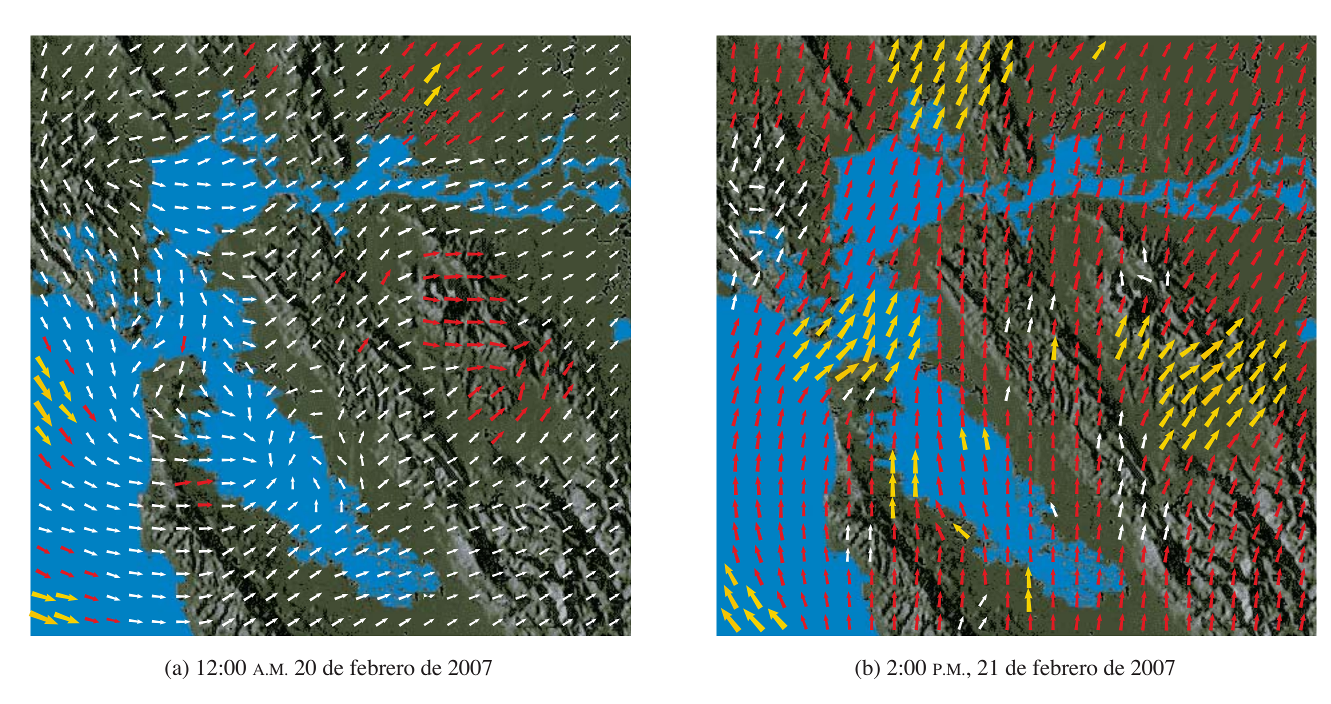


Las ecuaciones paramétricas hacen posible trazar superficies con formas extrañas y hermosas.

En este capítulo se trata el cálculo de campos vectoriales (que son funciones que asignan vectores a puntos en el espacio.) En particular, se definen las integrales de línea (las cuales se pueden usar para encontrar el trabajo que efectúa un campo de fuerzas al mover un objeto a lo largo de una curva). Luego se definen las integrales de superficie (las cuales se utilizan para determinar el caudal que pasa por una superficie). Las relaciones entre estos nuevos tipos de integrales y las integrales sencillas, dobles y triples que ya se estudiaron, las dan las versiones para dimensiones de orden superior del teorema fundamental del cálculo: teorema de Green, teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

16.1 CAMPOS VECTORIALES

Los vectores de la figura 1 son vectores de la velocidad del viento que indican la rapidez y dirección del viento en los puntos que están 10 m arriba de la superficie en el área de la bahía de San Francisco. (Observe que los patrones del viento en días consecutivos son muy diferentes.) Imagine un vector de velocidad del viento asociado con cada punto en el aire. Este es un ejemplo de un *campo vectorial de la velocidad.*

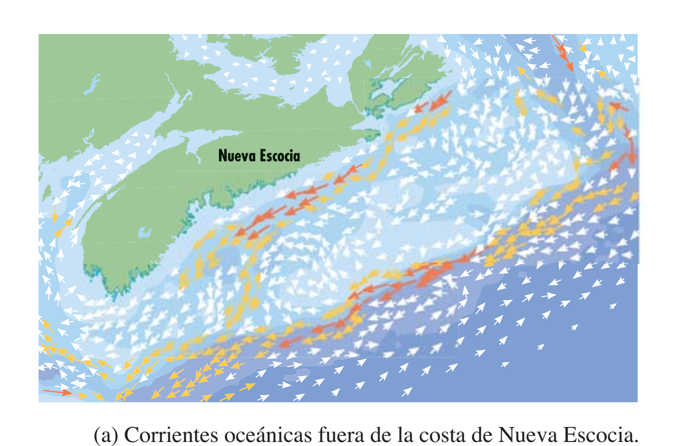


(a) 12:00 A.M. 20 de febrero de 2007

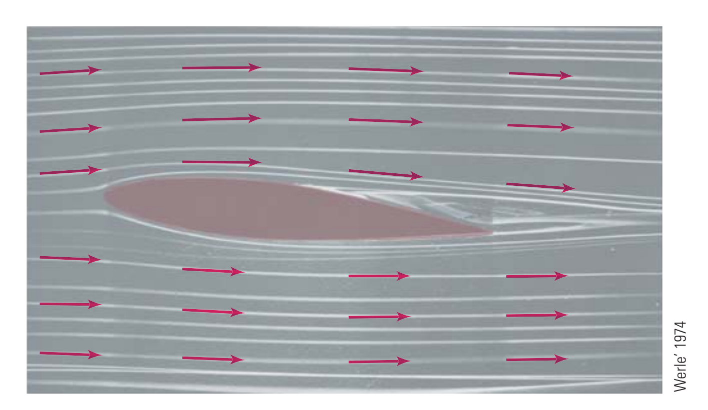
(b) 2:00 P.M., 21 de febrero de 2007

FIGURA 1 Campos vectoriales de la velocidad que muestran los patrones de viento en la bahía de San Francisco.

Otros ejemplos de campos vectoriales de velocidad se ilustran en la figura 2: corrientes oceánicas y el flujo que se encuentra un alerón.



(a) Corrientes oceánicas fuera de la costa de Nueva Escocia.



(b) Flujo que se encuentra un alerón inclinado.

FIGURA 2 Campos vectoriales de velocidad

Otro tipo de campo vectorial, llamado *campo de fuerza*, asocia un vector de fuerzas con cada punto de una región. Un ejemplo es el campo de fuerza gravitacional que se examina en el ejemplo 4.

En general, un campo vectorial es una función cuyo dominio es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ o bien en $\mathbb{R}^3$, y cuyo rango es un conjunto de vectores en V_2 o en V_3.

1 DEFINICIÓN Sea D un conjunto en $\mathbb{R}^2$, una región plana. Un **campo vectorial sobre** $\mathbb{R}^2$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y) en D un vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$.

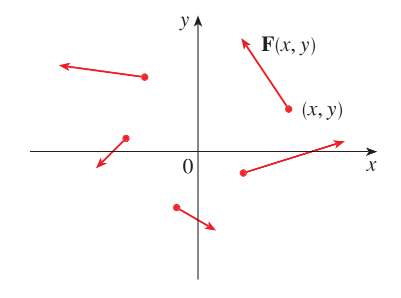


FIGURA 3
Campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

La mejor manera de representar un campo vectorial es dibujar la flecha que representa al vector $\mathbf{F}(x, y)$ que inicie en el punto (x, y). Naturalmente, es imposible hacerlo para todos los puntos (x, y), pero puede conseguir una representación razonable de $\mathbf{F}$ trazando la flecha para algunos puntos representativos en D como en la figura 3. Puesto que $\mathbf{F}(x, y)$ es un vector bidimensional, puede expresarlo en términos de sus **funciones componentes** P y Q como sigue:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$$

o bien, simplificando, $$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$$

Observe que P y Q son funciones escalares de dos variables y, algunas veces, se les llama **campos escalares** para distinguirlos de los campos vectoriales.

2 DEFINICIÓN Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Un **campo vectorial sobre** $\mathbb{R}^3$ es una función $\mathbf{F}$ que asigna a cada punto (x, y, z) en E un vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$.

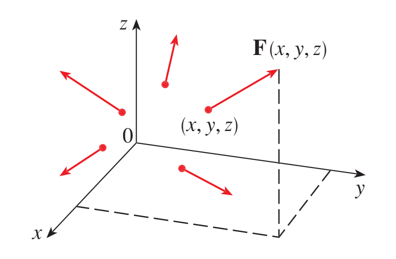


FIGURA 4
Campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ se representa en la figura 4. Se expresan en términos de sus funciones constituyentes P, Q y R como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Al igual que con las funciones vectoriales de la sección 13.1, es posible definir la continuidad de los campos vectoriales y demostrar que $\mathbf{F}$ es continua si y sólo si sus funciones constituyentes P, Q y R son continuas.

Algunas veces identifica un punto (x, y, z) con su vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ y escribe $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ en lugar de $\mathbf{F}(x, y, z)$. Entonces $\mathbf{F}$ se vuelve una función que asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ a un vector $\mathbf{x}$.

V EJEMPLO 1 Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ está definido por $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Describa $\mathbf{F}$ trazando alguno de sus vectores $\mathbf{F}(x, y)$ como en la figura 3.

SOLUCIÓN Puesto que $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$, dibuje el vector $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ iniciando en el punto $(1, 0)$ en la figura 5. Como $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$, dibuje el vector $\langle -1, 0\rangle$ con inicio en el punto $(0, 1)$. Al continuar de este modo, calcule varios valores representativos de $\mathbf{F}(x, y)$ de la tabla y dibuje los vectores correspondientes para representar el campo vectorial en la figura 5.

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1\rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1\rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2\rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2\rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3\rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0\rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2\rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2\rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0\rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0\rangle$

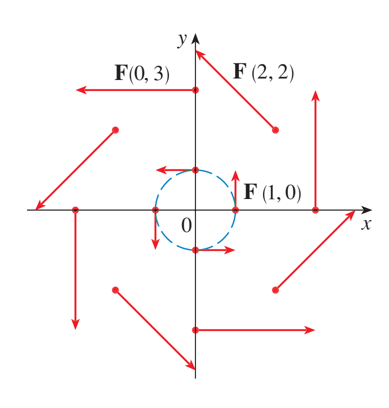


FIGURA 5
$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

Al parecer, según la figura 5, cada flecha es tangente a la circunferencia con centro en el origen.

Para confirmarlo, calcule el producto punto del vector de posición $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ con el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(x, y)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) \\ &= -xy + yx = 0\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\mathbf{F}(x, y)$ es perpendicular al vector de posición $\langle x, y\rangle$ y, por lo tanto es tangente a la circunferencia con centro en el origen y radio $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Observe que también

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\mathbf{x}|$$

de modo que la magnitud del vector $\mathbf{F}(x, y)$ es igual al radio del círculo. □

Algunos sistemas algebraicos computacionales son capaces de dibujar campos vectoriales en dos o tres dimensiones. Proporcionan una mejor representación del campo vectorial de lo que es posible a mano, porque la computadora puede trazar una gran cantidad de vectores representativos. La figura 6 muestra una gráfica por computadora del campo vectorial del ejemplo 1. Las figuras 7 y 8 ilustran otros dos campos vectoriales. Observe que las computadoras dan una escala a las longitudes de los vectores de modo que no sean demasiado grandes, pero que sean proporcionales a sus longitudes verdaderas.

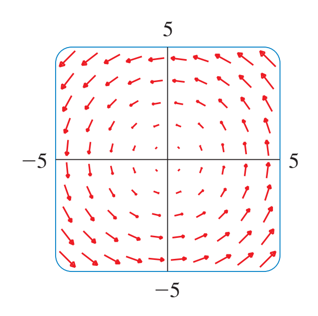


FIGURA 6
$\mathbf{F}(x, y) = \langle -y, x\rangle$

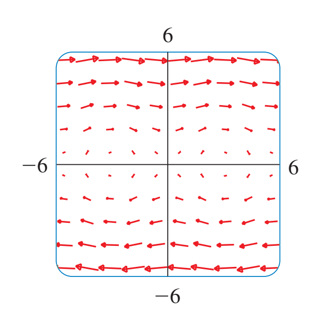


FIGURA 7
$\mathbf{F}(x, y) = \langle y, \operatorname{sen} x\rangle$

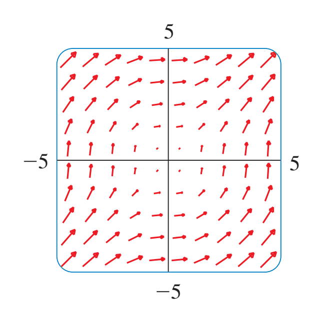


FIGURA 8
$\mathbf{F}(x, y) = \langle \ln(1 + y^2), \ln(1 + x^2)\rangle$

V EJEMPLO 2 Dibuje el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$.

SOLUCIÓN La gráfica se muestra en la figura 9. Observe que todos los vectores son verticales y señalan hacia arriba por encima del plano xy o hacia abajo de éste. La magnitud se incrementa con la distancia a partir del plano xy. □

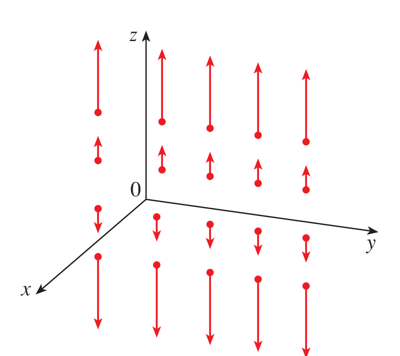


FIGURA 9
$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$

□

Puede dibujar el campo vectorial del ejemplo 2 a mano porque tiene una fórmula muy sencilla. La mayor parte de los campos vectoriales tridimensionales son virtualmente im-

posibles de dibujar a mano, por lo que necesita recurrir a un sistema algebraico computacional. Se ilustran ejemplos en las figuras 10, 11 y 12. Observe que los campos vectoriales de las figuras 10 y 11 tienen fórmulas similares, pero todos los vectores de la figura 11 señalan en la dirección general del eje y negativo porque sus componentes y son -2. Si el campo vectorial en la figura 12 representa un campo de velocidad, entonces una partícula podría ser desplazada hacia arriba y giraría en espiral alrededor del eje z en el sentido de las manecillas del reloj si se ve desde arriba.

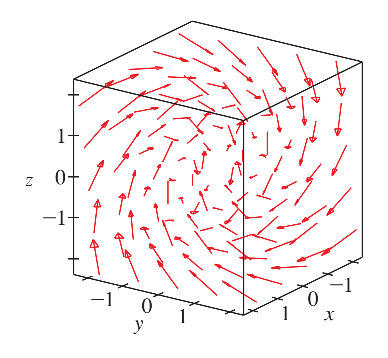
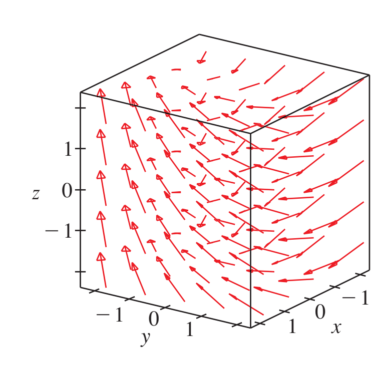
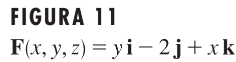


FIGURA 10
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$




FIGURA 11
$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$

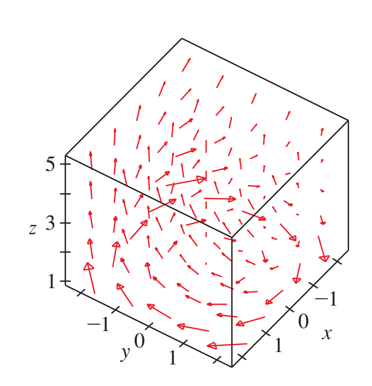


FIGURA 12
$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{y}{z}\,\mathbf{i} - \frac{x}{z}\,\mathbf{j} + \frac{z}{4}\,\mathbf{k}$

TEC En Visual 16.1 puede girar los campos vectoriales de las figuras 10 a 12, así como los campos adicionales.

EJEMPLO 3 Imagine un fluido que circula en forma estable por una tubería y sea $\mathbf{V}(x, y, z)$ el vector de velocidad en un punto (x, y, z). Luego $\mathbf{V}$ asigna un vector a cada punto (x, y, z) en un cierto dominio E (el interior de la tubería), y de este modo $\mathbf{V}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ llamado **campo de velocidades**. Un campo de velocidades posible se ilustra en la figura 13. La rapidez en cualquier punto dado se indica por la longitud de la flecha.

Los campos de velocidades también se presentan en otras áreas de la física. Por ejemplo, el campo vectorial del ejemplo 1 se podría usar como campo de velocidades para describir la rotación de una rueda en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Ha visto otros ejemplos de campos de velocidad en las figuras 1 y 2. □

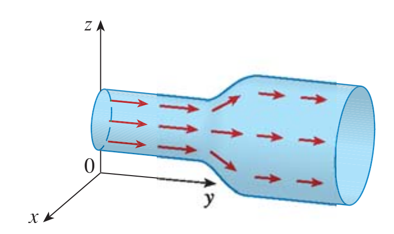


FIGURA 13
Campo de velocidades en un flujo de fluidos

EJEMPLO 4 La ley de la gravitación de Newton establece que la magnitud de la fuerza de la gravedad entre dos objetos con masas m y M es

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los objetos y G es la constante gravitacional. Éste es un ejemplo de una ley de la inversa del cuadrado. Suponga que el objeto de masa M está en el origen en $\mathbb{R}^3$. (Por ejemplo, M podría ser la masa de la Tierra y el origen podría ser su centro.) Sea $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ el vector de posición del objeto con masa m. Entonces, $r = |\mathbf{x}|$, así que $r^2 = |\mathbf{x}|^2$. La fuerza gravitacional ejercida en este segundo objeto actúa hacia el origen, y el vector unitario en esta dirección es

$$-\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Por lo tanto, la fuerza gravitacional que actúa en el objeto en $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ es

$$\boxed{3} \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

[Los físicos utilizan la notación $\mathbf{r}$ en lugar de $\mathbf{x}$ para el vector de posición, de modo que puede encontrar la fórmula 3 escrita en la forma $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\mathbf{r}$.] La función dada por

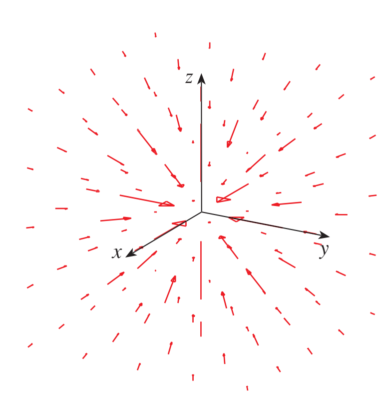


FIGURA 14
Campo de fuerzas gravitacional

la ecuación 3 es un ejemplo de un campo vectorial, llamado **campo gravitacional**, porque asocia un vector [la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$] con todo punto $\mathbf{x}$ en el espacio.

La fórmula 3 es una forma compacta de expresar el campo gravitacional, pero también puede escribirla en términos de sus funciones constituyentes usando el hecho de que $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

El campo gravitacional $\mathbf{F}$ se representa en la figura 14. □

EJEMPLO 5 Suponga que una carga eléctrica Q se localiza en el origen. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza eléctrica $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ que ejerce esta carga sobre la carga q situada en el punto (x, y, z) con vector de posición $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ es

4 $$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon q Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

donde ε es una constante, que depende de las unidades que se utilizan. En el caso de cargas similares, $qQ > 0$ y la fuerza es de repulsión; si las cargas son de signo contrario, entonces $qQ < 0$ y la fuerza es de atracción. Observe la similitud entre las fórmulas 3 y 4. Ambos campos vectoriales son ejemplos de **campos de fuerzas**.

En lugar de considerar la fuerza eléctrica $\mathbf{F}$, los físicos toman en cuenta a menudo la fuerza por unidad de carga:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$$

Entonces $\mathbf{E}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$, que se llama **campo eléctrico** de Q. □

CAMPOS DE GRADIENTE

Si f es una función escalar de dos variables, de acuerdo con la sección 14.6 su gradiente ∇f, o grad f, se define como

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Por tanto, ∇f es realmente un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$ y se llama **campo vectorial gradiente**. Del mismo modo, si f es una función escalar de tres variables, su gradiente es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

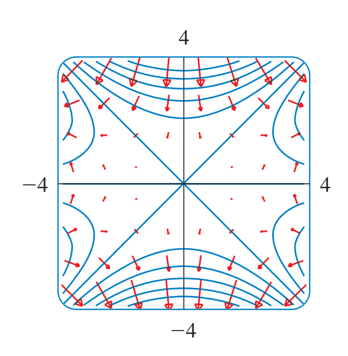


FIGURA 15

V EJEMPLO 6 Determine el campo vectorial gradiente de $f(x, y) = x^2y - y^3$. Dibuje el campo vectorial gradiente junto con un mapa de curvas de nivel de f. ¿Cuál es su relación?

SOLUCIÓN El campo vectorial gradiente está dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

En la figura 15 se ilustra un mapa de curvas de nivel de f con el campo vectorial gradiente. Observe que los vectores gradiente son perpendiculares a las curvas de nivel,

como era de esperarse de acuerdo con la sección 14.6. Note también que los vectores gradiente son largos donde las curvas de nivel están cercanas entre sí, y cortos donde las curvas se separan. La razón es que la longitud del vector gradiente es el valor de la derivada direccional de f y las curvas de nivel cercanas indican una gráfica de fuerte pendiente. □

Un campo vectorial **F** se denomina **campo vectorial conservativo** si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. En esta situación f recibe el nombre de **función potencial** de **F**.

No todos los campos vectoriales son conservativos, pero tales campos surgen con frecuencia en la física. Por ejemplo, el campo gravitacional **F** del ejemplo 4 es conservativo porque si define

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k} \\ &= \mathbf{F}(x, y, z)\end{aligned}$$

En las secciones 16.3 y 16.5 se trata la manera de decir si un campo vectorial dado es conservativo o no lo es.

16.1 EJERCICIOS

1–10 Trace el campo vectorial **F** en un diagrama como la figura 5 o la figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

3. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{k}$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{k}$

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{k}$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$

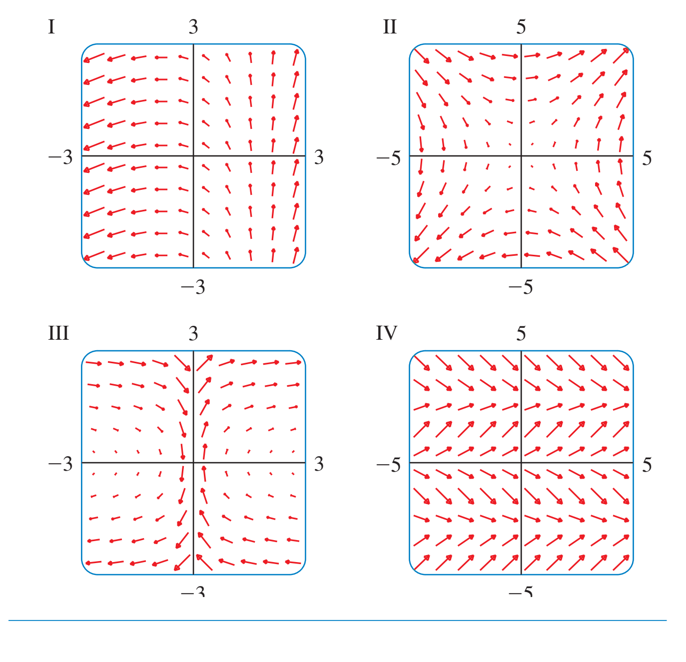
11–14 Haga corresponder los campos vectoriales **F** con las gráficas I a IV. Proporcione razones para tales elecciones.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \operatorname{sen} y \rangle$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$



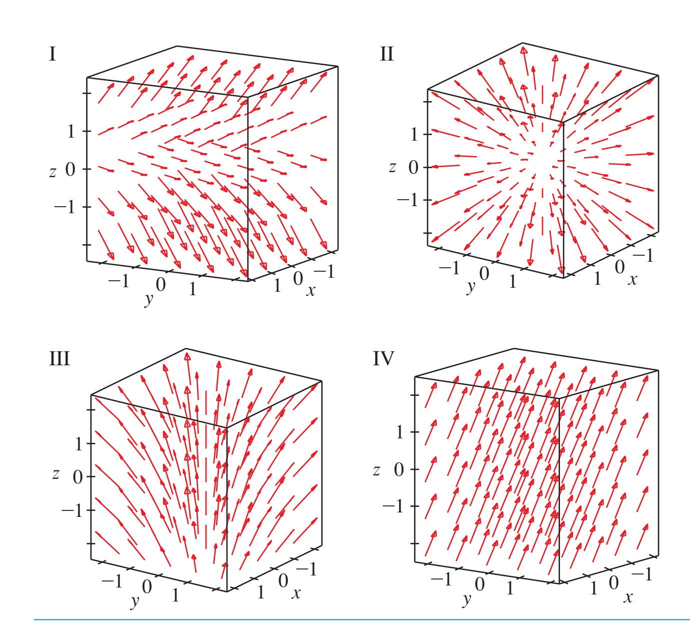
15–18 Busque la correspondencia entre los campos vectoriales **F** sobre $\mathbb{R}^3$ con las gráficas I a IV. Proporcione razones para tales elecciones.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$



CAS **19.** Si tiene un CAS que trace campos vectoriales (el comando es `fieldplot` en Maple y `PlotVectorField` en Mathematica), úselo para trazar

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 2xy)\,\mathbf{i} + (3xy - 6x^2)\,\mathbf{j}$$

Explique la apariencia al determinar el conjunto de puntos (x, y) tales que $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$.

CAS **20.** Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$ y $r = |\mathbf{x}|$. Mediante un CAS grafique este campo vectorial en varios dominios hasta que pueda ver lo que sucede. Describa la apariencia de la gráfica y explíquela determinando los puntos donde $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

21–24 Determine el campo vectorial gradiente de f.

21. $f(x, y) = xe^{xy}$

22. $f(x, y) = \tan(3x - 4y)$

23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

24. $f(x, y, z) = x\cos(y/z)$

25–26 Determine el campo vectorial gradiente ∇f de f y dibújelo.

25. $f(x, y) = x^2 - y$

26. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

CAS **27–28** Dibuje el campo vectorial gradiente de f junto con un mapa de curvas de nivel de f. Explique cuál es la relación que guardan entre sí.

27. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

28. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$

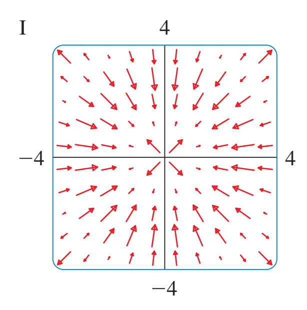
29–32 Relacione las funciones f con las gráficas de los campos vectoriales gradiente I a IV. Dé las razones de su elección.

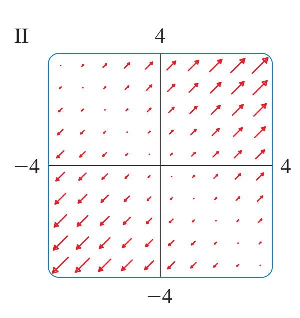
29. $f(x, y) = x^2 + y^2$

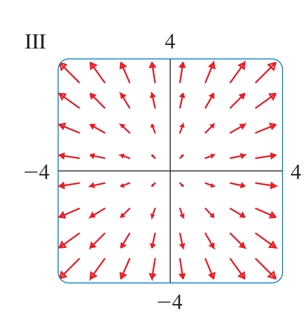
30. $f(x, y) = x(x + y)$

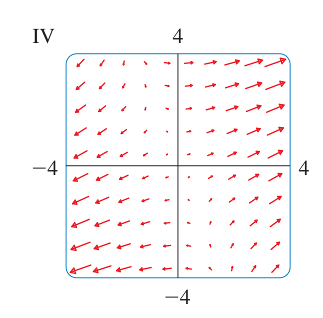
31. $f(x, y) = (x + y)^2$

32. $f(x, y) = \operatorname{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$









33. Una partícula se mueve en un campo de velocidad $\mathbf{V}(x, y) = \langle x^2, x + y^2 \rangle$. Si su posición es $(2, 1)$ en un tiempo $t = 3$, calcule su posición en el tiempo $t = 3.01$.

34. Una partícula se encuentra en la posición $(1, 3)$ en un tiempo $t = 1$. Si se mueve en un campo de velocidad

$$\mathbf{F}(x, y) = \langle xy - 2, y^2 - 10 \rangle$$

encuentre su posición aproximada en el tiempo $t = 1.05$.

35. Las **líneas de flujo** o **líneas de corriente** de un campo vectorial son las trayectorias que sigue una partícula cuyo campo de velocidades es el campo vectorial dado. Por lo tanto, los vectores en un campo vectorial son tangentes a las líneas de flujo.

(a) Use un diagrama del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$ para dibujar algunas líneas de flujo. A partir de los diagramas, ¿podría adivinar las ecuaciones de las líneas de flujo?

(b) Si las ecuaciones paramétricas de una línea de flujo son $x = x(t)$, $y = y(t)$, explique por qué estas funciones cumplen con las ecuaciones diferenciales $dx/dt = x$ y $dy/dt = -y$. Luego resuelva las ecuaciones diferenciales para encontrar una ecuación de la línea de flujo que pasa por el punto $(1, 1)$.

36. (a) Dibuje el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ y luego dibuje algunas líneas de flujo. ¿Qué forma parecen tener estas líneas de flujo?

(b) Si las ecuaciones paramétricas de las líneas de flujo son $x = x(t)$, $y = y(t)$, ¿qué ecuaciones diferenciales satisfacen estas funciones? Deduzca que $dy/dx = x$.

(c) Si una partícula parte del origen en el campo de velocidades dado por $\mathbf{F}$, determine una ecuación de la trayectoria que sigue.

16.2 INTEGRALES DE LÍNEA

En esta sección se define una integral que es similar a la integral simple, pero con la diferencia de que en lugar de integrar en el intervalo $[a, b]$, integra en la curva C. Estas integrales se llaman *integrales de línea*, aunque un mejor nombre es el de "integrales curvilíneas". Fueron inventadas a principios del siglo XIX para solucionar problemas relacionados con el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.

Inicie con una curva plana C dada por las ecuaciones paramétricas

1 $$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

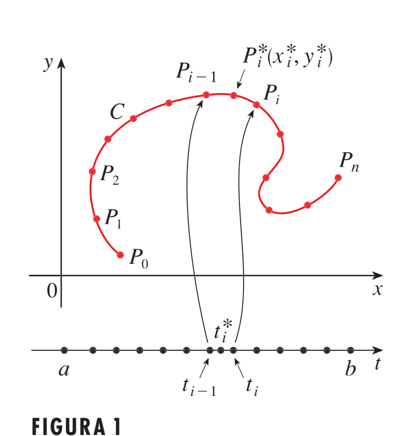


FIGURA 1

o, en forma equivalente, por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, y suponga que C es una curva uniforme. [Esto quiere decir que $\mathbf{r}'$ es continua y que $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (véase sección 13.3)]. Si divide el intervalo del parámetro $[a, b]$ en n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de igual anchura y hace $x_i = x(t_i)$ y $y_i = y(t_i)$, entonces los puntos correspondientes $P_i(x_i, y_i)$ dividen a C en n subarcos de longitudes $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$ (véase figura 1). Seleccione cualquier punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ en el i-ésimo subarco. (Esto corresponde a un punto t_i^* en $[t_{i-1}, t_i]$.) Ahora si f es una función de dos variables cuyo dominio incluye a la curva C, evalúe f en el punto (x_i^*, y_i^*), multiplique por la longitud Δs_i del subarco, y forme la suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

que es similar a la suma de Riemann. Luego contiene el límite de estas sumas y plantea la siguiente definición por analogía con la integral simple.



2 DEFINICIÓN Si f se define en una curva C uniforme definida por las ecuaciones 1, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** es

$$\int_C f(x, y)\,ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

si existe el límite.

En la sección 10.2 encontró que la longitud de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Un razonamiento similar se puede plantear para demostrar que si f es una función continua, entonces el límite de la definición 2 siempre existe y la fórmula siguiente se puede usar para evaluar la integral de línea:

3 $$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

El valor de la integral de línea no depende de la parametrización de la curva, siempre que ésta sea cruzada exactamente una vez cuando t se incrementa desde a a b.

■ La función s de la longitud del arco se trata en la sección 13.3.

Si $s(t)$ es la longitud de C entre $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$, entonces,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

La manera de recordar la fórmula 3 es expresar todo en términos del parámetro t: Use las ecuaciones paramétricas para expresar x y y en términos de t y escriba ds como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

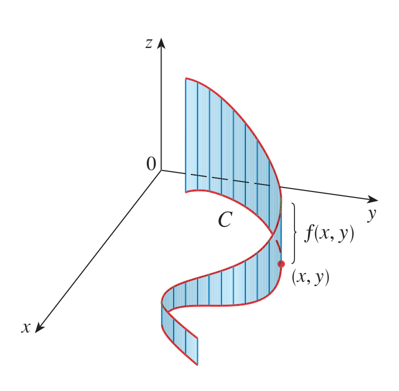


FIGURA 2

En el caso especial donde C es el segmento rectilíneo que une $(a, 0)$ con $(b, 0)$, al usar x como parámetro, escrba las ecuaciones paramétricas de C como sigue: $x = x$, $y = 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 3 se transforma en

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, 0)\, dx$$

y en este caso la integral de línea se reduce a una integral simple ordinaria.

Justo para una integral simple ordinaria, se interpreta la integral de línea de una función *positiva* como un área. En efecto, si $f(x, y) \geqslant 0$, $\int_C f(x, y)\, ds$ representa el área de un lado de la "cerca" o de la "cortina" de la figura 2, cuya base es C y cuya altura por arriba del punto (x, y) es $f(x, y)$.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C (2 + x^2y)\, ds$, donde C es la mitad superior de un círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la fórmula 3 primero necesita ecuaciones paramétricas que representen a C. Recuerde que el círculo unitario se puede parametrizar por medio de las ecuaciones

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

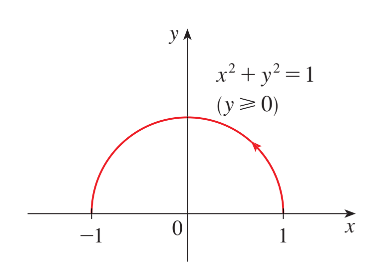


FIGURA 3

y la mitad superior del círculo se describe por el intervalo del parámetro $0 \leqslant t \leqslant \pi$ (véase figura 3). Por lo tanto, la fórmula 3 proporciona

$$\begin{aligned}
\int_C (2 + x^2y)\, ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\, dt \\
&= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi \\
&= 2\pi + \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

□

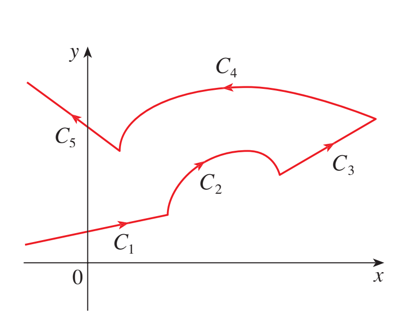


FIGURA 4
Curva suave por segmentos

Suponga que C es una **curva uniforme por segmentos**; es decir, C es una unión de una cantidad finita de curvas uniformes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, donde, de acuerdo con la figura 4, el punto inicial de C_{i+1} es el punto final de C_i. Entonces, define la integral de f a lo largo de C como la suma de las integrales de f a lo largo de cada una de las partes de C:

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_{C_1} f(x, y)\, ds + \int_{C_2} f(x, y)\, ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y)\, ds$$

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_C 2x\, ds$, donde C consta del arco C_1 de la parábola $y = x^2$ desde (0, 0) a (1, 1) seguido por el segmento rectilíneo C_2 desde (1, 1) a (1, 2).

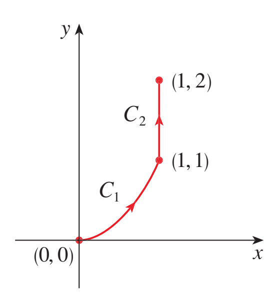


FIGURA 5
$C = C_1 \cup C_2$

SOLUCIÓN La curva C se ilustra en la figura 5. El arco C_1 es la gráfica de una función de x, de modo que elija x como el parámetro y las ecuaciones de C_1 se vuelven

$$x = x \qquad y = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} 2x\, ds = \int_0^1 2x \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

En C_2 escoja a y como parámetro, de modo que las ecuaciones de C_2 son

$$x = 1 \qquad y = y \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

y
$$\int_{C_2} 2x\, ds = \int_1^2 2(1) \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\, dy = \int_1^2 2\, dy = 2$$

Por lo tanto,
$$\int_C 2x\, ds = \int_{C_1} 2x\, ds + \int_{C_2} 2x\, ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$ □

Cualquier interpretación física de una integral de línea $\int_C f(x, y)\, ds$ depende de la interpretación física de la función f. Suponga que $\rho(x, y)$ representa la densidad lineal en un punto (x, y) de un alambre delgado con forma de la curva C. Entonces la masa de la parte del alambre desde P_{i-1} hasta P_i de la figura 1 es de alrededor de $\rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$ y entonces la masa total del alambre es de casi $\Sigma\, \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$. Al considerar más y más puntos de la curva obtiene la **masa** m del alambre como el valor límite de estas aproximaciones:

$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\, ds$$

[Por ejemplo, si $f(x, y) = 2 + x^2 y$ representa la densidad de un alambre semicircular, entonces la integral del ejemplo 1 representaría la masa del alambre.] El **centro de masa** del alambre con función de densidad ρ se sitúa en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

4
$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_C x\rho(x, y)\, ds \qquad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_C y\rho(x, y)\, ds$$

Otra interpretación física de las integrales de línea se estudia más adelante en este capítulo.

V EJEMPLO 3 Un alambre toma la forma de un semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, y es más grueso cerca de la base que cerca de la parte superior. Calcule el centro de masa del alambre si la densidad lineal en cualquier punto es proporcional a su distancia desde la recta $y = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 1, use la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, y determine que $ds = dt$. La densidad lineal es

$$\rho(x, y) = k(1 - y)$$

donde k es una constante, y entonces la masa del alambre es

$$m = \int_C k(1 - y)\, ds = \int_0^\pi k(1 - \text{sen}\, t)\, dt$$

$$= k\big[t + \cos t\big]_0^\pi = k(\pi - 2)$$

Según las ecuaciones 4

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\rho(x, y)\, ds = \frac{1}{k(\pi - 2)}\int_C yk(1 - y)\, ds$$

$$= \frac{1}{\pi - 2}\int_0^\pi (\text{sen}\, t - \text{sen}^2 t)\, dt = \frac{1}{\pi - 2}\Big[-\cos t - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\text{sen}\, 2t\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}$$

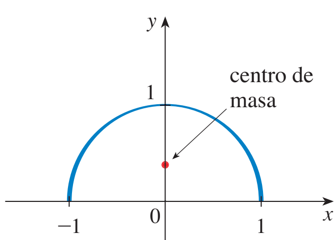
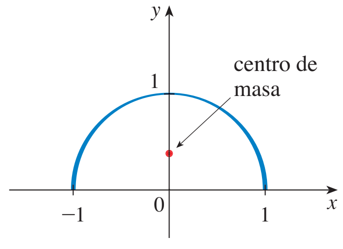



FIGURA 6

Por simetría $\bar{x} = 0$, de modo que el centro de masa es

$$\left(0, \frac{4 - \pi}{2(\pi - 2)}\right) \approx (0, 0.38)$$

Véase figura 6. □

Las otras dos integrales de línea se obtienen reemplazando Δs_i por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o por $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ en la definición 2. Se les llama **integrales de línea de *f* a lo largo de *C* con respecto a *x* y *y***:

5 $$\int_C f(x, y)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta x_i$$

6 $$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta y_i$$

Cuando quiera distinguir la integral de línea original $\int_C f(x, y)\, ds$ de las de las ecuaciones 5 y 6, se denomina **integral de línea con respecto a la longitud de arco**.

Las fórmulas siguientes establecen que las integrales de línea con respecto a x y a y también se pueden evaluar expresando todo en términos de t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$.

7
$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt$$

A menudo sucede que las integrales de línea con respecto a x y y se presentan juntas. Cuando esto sucede, se acostumbra abreviarlas escribiendo

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Algunas veces, al plantear una integral de línea, lo más difícil es pensar en una representación paramétrica de una curva cuya descripción geométrica se conoce. En particular, con frecuencia necesita parametrizar un segmento rectilíneo, de modo que es útil re-

cordar que una representación vectorial del segmento rectilíneo que inicia en $\mathbf{r}_0$ y termina en $\mathbf{r}_1$ se define con

8 $$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Véase ecuación 12.5.4.)

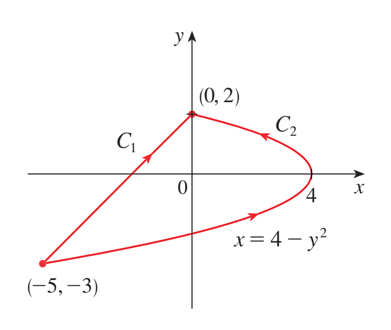


FIGURA 7

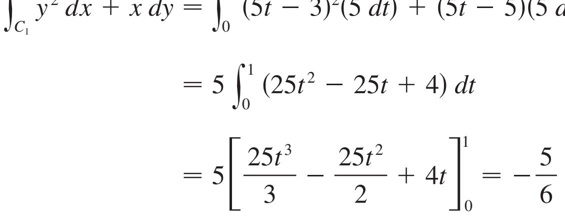
V EJEMPLO 4 Evalúe $\int_C y^2\,dx + x\,dy$, donde (a) $C = C_1$ es el segmento rectilíneo desde $(-5, -3)$ a $(0, 2)$ y (b) si $C = C_2$ es el arco de la parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5, -3)$ a $(0, 2)$. (Véase figura 7.)

SOLUCIÓN

(a) Una representación paramétrica del segmento rectilíneo es

$$x = 5t - 5 \qquad y = 5t - 3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

(Use la ecuación 8 con $\mathbf{r}_0 = \langle -5, -3\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 0, 2\rangle$.) Luego $dx = 5\,dt$, $dy = 5\,dt$, y con la fórmula 7 se tiene



$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy = \int_0^1 (5t - 3)^2(5\,dt) + (5t - 5)(5\,dt)$$

$$= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt$$

$$= 5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = -\frac{5}{6}$$

(b) Puesto que la parábola está definida como una función de y, tome a y como el parámetro y escriba C_2 como

$$x = 4 - y^2 \qquad y = y \qquad -3 \leqslant y \leqslant 2$$

Entonces $dx = -2y\,dy$ y de acuerdo con la fórmula 7

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = \int_{-3}^2 y^2(-2y)\,dy + (4 - y^2)\,dy$$

$$= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy$$

$$= \left[-\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-3}^2 = 40\tfrac{5}{6}$$ □

Observe que las respuestas del inciso (a) y del (b) del ejemplo 4 son diferentes aun cuando las dos curvas tienen los mismos puntos finales. Por lo tanto, el valor de una integral de línea depende en general no sólo de los puntos finales de la curva, sino también de la trayectoria. Sin embargo, véase en la sección 16.3 las condiciones en las cuales la integral es independiente de la trayectoria.

Observe que las respuestas del ejemplo 4 dependen de la dirección u orientación de la curva. Si $-C_1$ denota el segmento rectilíneo desde $(0, 2)$ a $(-5, -3)$, es posible verificar, mediante la parametrización

$$x = -5t \qquad y = 2 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

que

$$\int_{-C_1} y^2\,dx + x\,dy = \tfrac{5}{6}$$

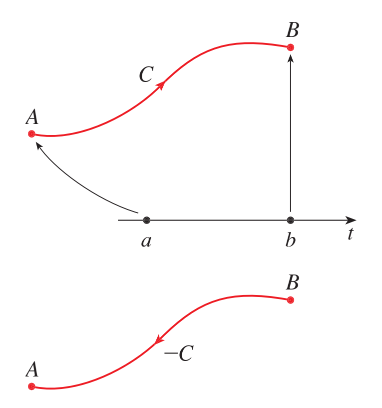


FIGURA 8

En general, una parametrización dada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, determina una **orientación** de una curva C, cuya dirección positiva corresponde a los valores crecientes del parámetro t. (Véase figura 8, en donde el punto inicial A corresponde al valor del parámetro a y el punto final B corresponde a $t = b$.)

Si $-C$ denota la curva que consiste en los mismos puntos que C, pero con la orientación opuesta, es decir (del punto inicial B al punto final A de la figura 8), entonces tiene

$$\int_{-C} f(x, y)\, dx = -\int_C f(x, y)\, dx \qquad \int_{-C} f(x, y)\, dy = -\int_C f(x, y)\, dy$$

Pero si integra con respecto a la longitud de arco, el valor de la integral de línea *no* cambia cuando se invierte la orientación de la curva:

$$\int_{-C} f(x, y)\, ds = \int_C f(x, y)\, ds$$

La razón es que Δs_i es siempre positiva, en tanto que Δx_i y Δy_i cambian de signo cuando se invierte la orientación de C.

INTEGRALES DE LÍNEA EN EL ESPACIO

Ahora suponga que C es una curva uniforme en el espacio que definen las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

o la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Si f es una función de tres variables que es continua en alguna región que contiene a C, entonces defina la **integral de línea de *f* a lo largo de *C*** (con respecto a la longitud de arco), de manera similar a la de las curvas planas:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta s_i$$

Evalúe usando una fórmula similar a la fórmula 3:

$$\boxed{9} \qquad \int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Observe que las integrales tanto en la fórmula 3 como en la 9 se pueden expresar en la notación vectorial más compacta

$$\int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt$$

En el caso especial de $f(x, y, z) = 1$, obtiene

$$\int_C ds = \int_a^b |\,\mathbf{r}'(t)\,|\, dt = L$$

donde L es la longitud de la curva C (véase fórmula 13.3.3).

Las integrales de línea a lo largo de C con respecto a x, y y z también se pueden definir. Por ejemplo,

$$\int_C f(x, y, z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta z_i$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)\, dt$$

Por lo tanto, como sucede con las integrales de línea en el plano, evalúe las integrales de la forma

10 $$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

expresando todo (x, y, z, dx, dy, dz) en términos del parámetro t.

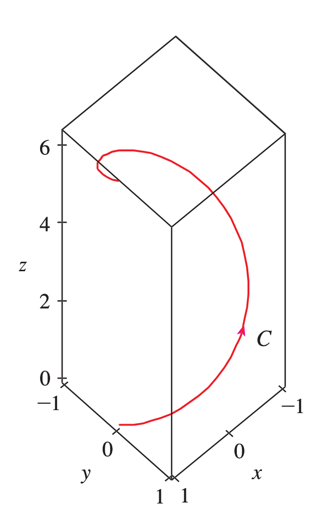


FIGURA 9

V EJEMPLO 5 Evalúe $\int_C y \operatorname{sen} z\, ds$, donde C es la hélice circular dada por las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (véase figura 9).

SOLUCIÓN El resultado con la fórmula 9 es

$$\int_C y \operatorname{sen} z\, ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[t - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\pi$$ □

EJEMPLO 6 Evalúe $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$, donde C consta del segmento rectilíneo C_1 desde (2, 0, 0) hasta (3, 4, 5) seguido por el segmento vertical C_2 desde (3, 4, 5) hasta (3, 4, 0).

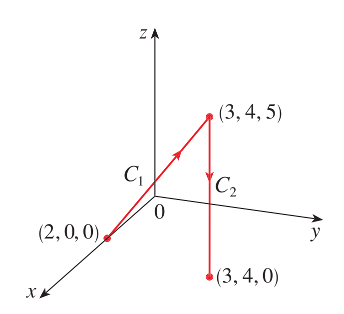


FIGURA 10

SOLUCIÓN La curva C se ilustra en la figura 10. Al aplicar la ecuación 8, exprese C_1 como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0\rangle + t\langle 3, 4, 5\rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t\rangle$$

o bien, en forma paramétrica, como

$$x = 2 + t \qquad y = 4t \qquad z = 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \int_0^1 (4t)\, dt + (5t)4\, dt + (2 + t)5\, dt$$

$$= \int_0^1 (10 + 29t)\, dt = 10t + 29 \frac{t^2}{2} \bigg]_0^1 = 24.5$$



De manera similar, C_2 se puede expresar en la forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5\rangle + t\langle 3, 4, 0\rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t\rangle$$

o bien, $$x = 3 \qquad y = 4 \qquad z = 5 - 5t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Entonces $dx = 0 = dy$, de modo que

$$\int_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 3(-5)\,dt = -15$$

Al sumar los valores de estas integrales

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = 24.5 - 15 = 9.5$$

□

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

De acuerdo con la sección 6.4, el trabajo realizado por una fuerza variable $f(x)$ que mueve a una partícula desde a hasta b a lo largo del eje x es $W = \int_a^b f(x)\,dx$. Luego, en la sección 12.3, encuentra que el trabajo que efectúa una fuerza constante $\mathbf{F}$ al mover un objeto desde el punto P hasta otro punto Q en el espacio es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es el vector desplazamiento.

Ahora suponga que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo de fuerzas continuo sobre $\mathbb{R}^3$, tal como el campo gravitacional del ejemplo 4 de la sección 16.1 o el campo de fuerzas eléctricas del ejemplo 5 de la misma sección. (Un campo de fuerzas sobre $\mathbb{R}^2$ se puede considerar como un caso especial donde $R = 0$ y P y Q dependen sólo de x y de y.) Desea calcular el trabajo que realizó esta fuerza al mover la partícula a lo largo de la curva uniforme C.

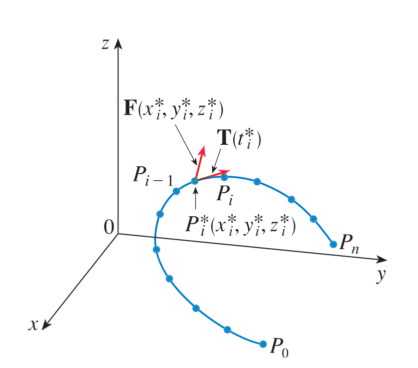


FIGURA 11

Divida C en subarcos $P_{i-1}P_i$ de longitudes Δs_i dividiendo el intervalo del parámetro $[a, b]$ en subintervalos de igual anchura. (Véase en la figura 1 el caso bidimensional o en la figura 11 el caso tridimensional.) Elija un punto $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ en el i-ésimo subarco que corresponde al valor del parámetro t_i^*. Si Δs_i es pequeño, entonces cuando la partícula se mueve desde P_{i-1} hasta P_i a lo largo de la curva, prosigue aproximadamente en la dirección de $\mathbf{T}(t_i^*)$, el vector unitario tangente en P_i^*. Por lo tanto, el trabajo que efectúa la fuerza $\mathbf{F}$ al mover la partícula desde P_{i-1} hasta P_i es alrededor de

$$\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot [\Delta s_i\,\mathbf{T}(t_i^*)] = [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(t_i^*)]\,\Delta s_i$$

y el trabajo total realizado al mover la partícula a lo largo de C es casi

11 $$\sum_{i=1}^{n} [\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \cdot \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*, z_i^*)]\,\Delta s_i$$

donde $\mathbf{T}(x, y, z)$ es el vector unitario tangente en el punto (x, y, z) en C. Intuitivamente es posible ver que estas aproximaciones deben llegar a ser mejores a medida que n se incrementa. Por lo tanto, defina el **trabajo** W realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ como el límite de las sumas de Riemann en (11), a saber,

12 $$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\,ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$$

La ecuación 12 establece que ese trabajo *es la integral de línea con respecto a la longitud de arco de la componente tangencial de la fuerza.*

Si la curva C está definida por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/|\mathbf{r}'(t)|$, de modo que al aplicar la ecuación 9 puede volver a expresar la ecuación 12 en la forma

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

Esta integral se abrevia a menudo como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y se encuentra también en otras especialidades de la física. Por lo tanto, se presenta la definición siguiente para la integral de línea de *cualquier* campo vectorial continuo.

13 DEFINICIÓN Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Entonces la **integral de línea de F a lo largo de** C es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

Al aplicar la definición 13, recuerde que $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ es sólo una forma de abreviar $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, de modo que evalúe $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ haciendo simplemente $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ en la expresión para $\mathbf{F}(x, y, z)$. Observe también que puede escribir formalmente $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$.

■ La figura 12 muestra el campo de fuerza y la curva del ejemplo 7. El trabajo hecho es negativo porque el campo obstruye el movimiento a lo largo de la curva

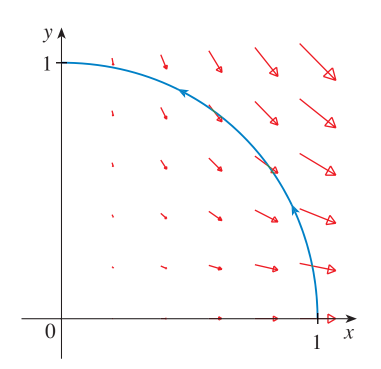


FIGURA 12

EJEMPLO 7 Determine el trabajo efectuado por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ cuando mueve una partícula a lo largo del cuarto de círculo $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

Por lo tanto, el trabajo hecho es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\,\frac{\cos^3 t}{3}\bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$ □

NOTA Aun cuando $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ y las integrales con respecto a la longitud de arco permanecen sin cambio cuando se invierte la dirección, se sigue cumpliendo

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

porque el vector unitario tangente **T** es reemplazado por su negativo cuando C es reemplazado por $-C$.

■ En la figura 13 se ilustra la cúbica torcida C del ejemplo 8 y algunos vectores representativos que actúan en tres puntos de C.

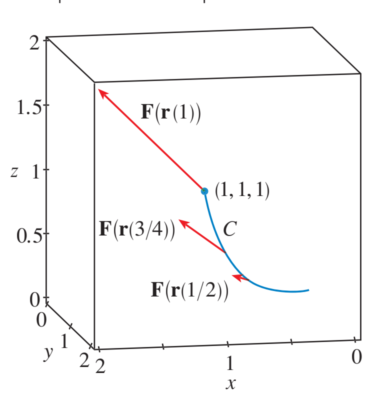


FIGURA 13

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ y C es la cúbica torcida definida por

$$x = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

SOLUCIÓN Tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$

$$= \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\,dt = \frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\bigg]_0^1 = \frac{27}{28}$$ □

Para finalizar, se hace notar la relación entre las integrales de línea de los campos vectoriales y las integrales de línea de los campos escalares. Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre $\mathbb{R}^3$ está definido en la forma de componentes mediante la ecuación $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Aplique la definición 13 para calcular su integral de línea a lo largo de C.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k})\cdot(x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,dt$$

Pero esta última integral es precisamente la integral de línea de (10). Por lo tanto, tiene

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \qquad \text{donde } \mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

Por ejemplo, la integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ del ejemplo 6 se podría expresar como $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

16.2 EJERCICIOS

1–16 Evalúe la integral de línea, donde C es la curva dada.

1. $\int_C y^3\,ds$, $\quad C$: $x = t^3$, $y = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C xy\,ds$, $\quad C$: $x = t^2$, $y = 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4\,ds$, $\quad C$ es la mitad derecha de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

4. $\int_C x \operatorname{sen} y\,ds$, $\quad C$ es el segmento de recta de (0, 3) a (4, 6).

5. $\int_C (x^2y^3 - \sqrt{x})dy$, C es el arco de la curva $y = \sqrt{x}$ de (1, 1) a (4, 2).

6. $\int_C xe^y\,dx$, C es el arco de la curva $x = e^y$ desde (1, 0) a $(e, 1)$.

7. $\int_C xy\,dx + (x - y)\,dy$, $\quad C$ consiste en los segmentos de recta desde (0, 0) hasta (2, 0) y desde (2, 0) hasta (3, 2).

8. $\int_C \operatorname{sen} x\,dx + \cos y\,dy$, $\quad C$ consiste en la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ desde (1, 0) a (−1, 0) y el segmento de recta desde (−1, 0) a (−2, 3).

9. $\int_C xyz\,ds$, $\quad C$: $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = t$, $z = -2\cos t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

10. $\int_C xyz^2\,ds$, $\quad C$ es el segmento de recta de (−1, 5, 0) a (1, 6, 4).

11. $\int_C xe^{yz}\,ds$, $\quad C$ es el segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 2, 3).

12. $\int_C (2x + 9z)\,ds$, $\quad C$: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

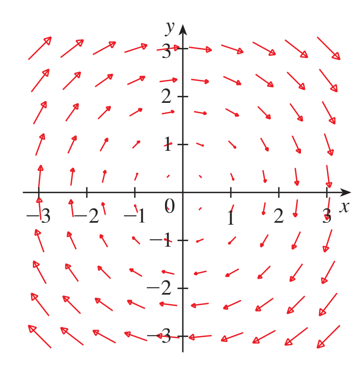
13. $\int_C x^2y\sqrt{z}\,dz$, $\quad C$: $x = t^3$, $y = t$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, $\quad C$: $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

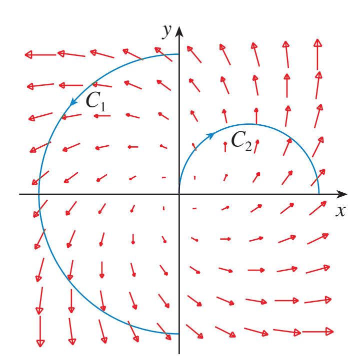
15. $\int_C (x + yz)\,dx + 2x\,dy + xyz\,dz$, $\quad C$ consta de los segmentos de recta de (1, 0, 1) a (2, 3, 1) y de (2, 3, 1) a (2, 5, 2).

16. $\int_C x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, $\quad C$ consta de los segmentos de recta desde (0, 0, 0) hasta (1, 2, −1) y de (1, 2, −1) a (3, 2, 0)

17. Sea **F** el campo vectorial que se ilustra en la figura.
(a) Si C_1 es el segmento de recta vertical desde $(-3, -3)$ a $(-3, 3)$, determine si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positivo, negativo o cero.
(b) Si C_2 es la circunferencia orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con radio 3 y centro en el origen, determine si $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es positiva, negativa o cero.



18. La figura muestra un campo vectorial **F** y dos curvas C_1 y C_2. ¿Las integrales de línea de **F** sobre C_1 y C_2 son positivas, negativas o cero? Explique.



19–22 Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C está definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(t) = 11t^4\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y\ z) = (x + y)\,\mathbf{i} + (y - z)\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

23–26 Use calculadora o un sistema computarizado de álgebra para evaluar la integral de línea correcta a cuatro lugares decimales.

23. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} y\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t^2}\,\mathbf{j}$, $1 \leqslant t \leqslant 2$.

24. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + z \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} 5t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

25. $\int_C x \operatorname{sen}(y + z)$, donde C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^4$, $0 \leqslant t \leqslant 5$

26. $\int_C ze^{-xy}\,ds$, donde C tiene ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

CAS **27–28** Con una gráfica del campo vectorial **F** y la curva C determine si la integral de línea de **F** sobre C es positiva, negativa o cero. Luego evalúe la integral de línea.

27. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, C es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj desde $(2, 0)$ a $(0, -2)$.

28. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathbf{j}$,
C es la parábola $y = 1 + x^2$ desde $(-1, 2)$ a $(1, 2)$.

29. (a) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = e^{x-1}\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ y C está definida por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
(b) Ilustre el inciso (a) mediante una calculadora o por medio de una computadora con la gráfica de C y los vectores del campo vectorial que corresponde a $t = 0$, $1/\sqrt{2}$ y 1 (como en la figura 13).

30. (a) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ y C está definida por $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.
(b) Ilustre el inciso (a) mediante una computadora que trace C y los vectores del campo vectorial correspondiente a $t = \pm 1$ y $\pm\frac{1}{2}$ (como en la figura 13).

CAS **31.** Encuentre el valor exacto de $\int_c x^3y^2z\,ds$, donde C es la curva con ecuaciones paramétricas $x = e^{-t}\cos 4t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} 4t$, $z = e^{-t}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. (a) Calcule el trabajo hecho por el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve una vez alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.
CAS (b) Mediante un sistema algebraico computacional, dibuje el campo de fuerza y la circunferencia en la misma pantalla. Con la gráfica explique su respuesta del inciso (a).

33. Un alambre delgado está doblado en forma de un semicírculo $x^2 + y^2 = 4$, $x \geqslant 0$. Si la densidad lineal es la constante k, calcule la masa y el centro de masa del alambre.

34. Un alambre delgado tiene la forma de la parte del círculo del primer cuadrante con centro en el origen y radio a. Si la función de densidad es $\rho(x, y) = kxy$, encuentre la masa y centro de masa del alambre.

35. (a) Escriba las fórmulas similares a las ecuaciones 4 para el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un alambre delgado cuya función de densidad es $\rho(x, y, z)$ en la forma de una curva C en el espacio.

(b) Encuentre el centro de masa de un alambre en forma de la hélice $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = 2 \cos t$, $z = 3t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, si la densidad es una constante k.

36. Calcule la masa y el centro de masa de un alambre en forma de la hélice $x = t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, si la densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia desde el origen.

37. Si un alambre con densidad lineal $\rho(x, y)$ sigue la curva C, sus **momentos de inercia** con respecto a los ejes x y y están definidos como

$$I_x = \int_C y^2\rho(x, y)\, ds \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x, y)\, ds$$

Determine los momentos de inercia para el alambre del ejemplo 3.

38. Si un alambre con densidad lineal $\rho(x, y, z)$ sigue una curva en el espacio C, sus **momentos de inercia** con respecto a los ejes x, y y z se definen como

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds$$

Determine los momentos de inercia para el alambre del ejemplo 35.

39. Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + (y + 2)\,\mathbf{j}$ al mover un objeto a lo largo de un arco de la cicloide $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\,\mathbf{i} + (1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

40. Calcule el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(2, 4)$.

41. Determine el trabajo que hace el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y + z, x + z, x + y\rangle$ sobre una partícula que se desplaza por el segmento rectilíneo desde $(1, 0, 0)$ a $(3, 4, 2)$.

42. La fuerza que ejerce una carga eléctrica en el origen sobre una partícula cargada en el punto (x, y, z) con vector de posición $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ es $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ donde K es una constante. Véase el ejemplo 5 de la sección 16.1. Encuentre el trabajo realizado cuando la partícula se mueve a lo largo de una recta desde $(2, 0, 0)$ a $(2, 1, 5)$.

43. Un varón que pesa 160 lb sube un bote de pintura de 25 lb por una escalera helicoidal que rodea a un silo con radio de 20 pies. Si el silo es de 90 pies de alto y el hombre da tres revoluciones completas, ¿cuánto trabajo efectúa contra la fuerza de gravedad al subir hasta la parte alta?

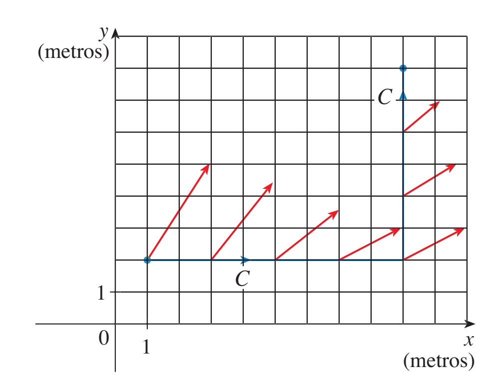
44. Suponga que hay un agujero en el bote de pintura del ejercicio 43 y que se pierden en forma constante 9 lb de pintura mientras el hombre sube por la escalera. ¿Cuánto trabajo efectúa?

45. (a) Demuestre que un campo de fuerzas constante hace trabajo nulo sobre una partícula que se mueve una vez de manera uniforme alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

(b) ¿Esto también es válido para un campo de fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$, donde k es una constante y $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$?

46. La base de una cerca circular de radio 10 m está definida con $x = 10 \cos t$, $y = 10 \operatorname{sen} t$. La altura de la cerca en la posición (x, y) está definida por la función $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$, de modo que la altura varía desde 3 m a 5 m. Suponga que 1 litro de pintura cubre 100 m^2. Dibuje la cerca y determine cuánta pintura necesitará si pinta ambos lados de la cerca.

47. Un objeto se desplaza a lo largo de la curva C que se muestra en la figura, de $(1, 2)$ a $(9, 8)$. Las longitudes de los vectores en el campo de fuerza $\mathbf{F}$ se miden en newtons según las escalas en los ejes. Estime el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ en el objeto.

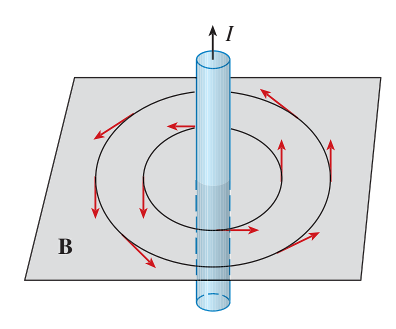


48. Los experimentos demuestran que una corriente estable I en un alambre largo produce un campo magnético $\mathbf{B}$ que es tangente a cualquier circunferencia que quede en el plano perpendicular al alambre y cuyo centro es el eje del alambre (como se ve en la figura). La *ley de Ampère* relaciona la corriente eléctrica con sus efectos magnéticos y establece que

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

donde I es la corriente neta que pasa por cualquier superficie rodeada por una curva cerrada C y μ_0 es una constante que recibe el nombre de permeabilidad de espacio libre. Considere que C es igual a un círculo de radio r, y demuestre que la magnitud $B = |\mathbf{B}|$ del campo magnético a una distancia r del centro del alambre es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



16.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LÍNEA

De acuerdo con la sección 5.3, la parte 2 del teorema fundamental del cálculo se puede expresar como

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F' es continua en $[a, b]$. A la ecuación 1 también se le conoce con el nombre de teorema del cambio neto: La integral de la razón de cambio es el cambio neto.

Si piensa en el vector gradiente ∇f de una función f de dos o tres variables como un tipo de derivada de f, entonces se puede considerar que el teorema siguiente es como una versión del teorema fundamental de las integrales de línea.

2 TEOREMA Sea C una curva uniforme definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Sea f la función derivable de dos o tres variables cuyo vector gradiente ∇f es continuo en C. Entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

NOTA El teorema 2 establece que se puede evaluar la integral de línea de un campo vectorial conservativo (el campo vectorial del gradiente de la función del potencial f) si conoce simplemente el valor de f en los puntos extremos de C. En efecto, el teorema 2 establece que la integral de línea de ∇f es el cambio neto en f. Si f es una función de dos variables y C es una curva plana cuyo punto inicial es $A(x_1, y_1)$ y el final es $B(x_2, y_2)$, como en la figura 1, entonces el teorema 2 se transforma en

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Si f es una función de tres variables y C es una curva en el espacio que une el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ con el punto $B(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Demuestre el teorema 2 para este caso.

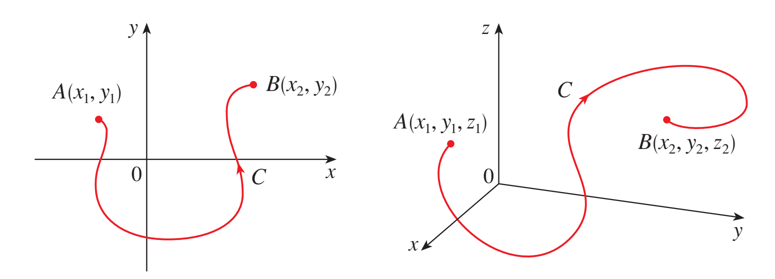


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2 Al aplicar la definición 16.2.13

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt \qquad \text{(según la regla de la cadena)}$$

$$= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

El último paso se infiere del teorema fundamental del cálculo, ecuación 1. □

Aunque se ha demostrado el Teorema para el caso de las curvas suaves, también es válido para curvas uniformes por segmentos. Esto se puede ver al subdividir C en un número finito de curvas suaves y sumar las integrales resultantes.

EJEMPLO 1 Calcule el trabajo que realiza el campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

al mover una partícula de masa m desde el punto (3, 4, 12) hasta el punto (2, 2, 0) a lo largo de la curva C uniforme por segmentos (véase el ejemplo 4 de la sección 16.1).

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 16.1, sabe que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo y, de hecho, $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Por lo tanto, según el teorema 2, el trabajo realizado es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12)$$

$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right)$$ □

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA

Suponga que C_1 y C_2 son dos curvas uniformes por segmentos (denominadas **trayectorias**) que tienen el mismo punto inicial A y el punto final B. Sabe por el ejemplo 4 de la sección 16.2 que, en general, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Pero una consecuencia del teorema 2 es que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

cuando ∇f es continuo. En otras palabras, la integral de línea de un campo vectorial *conservativo* depende sólo del punto inicial y del punto final de la curva.

En general, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo cuyo dominio es D, la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria** si $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para

cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 en D que tienen los mismos puntos iniciales y finales. Con esta terminología, puede decir que las *integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria*.

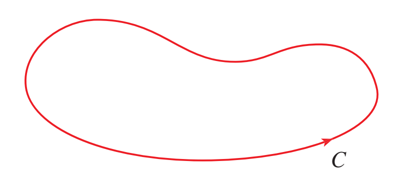


FIGURA 2
Curva cerrada

Se dice que una curva es **cerrada** si su punto final coincide con el punto inicial, es decir, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ (véase figura 2). Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D y C es cualquier trayectoria cerrada en D, puede escoger dos puntos cualquiera A y B sobre la curva C y considerar que ésta está compuesta de la trayectoria C_1 desde A hasta B seguida por la trayectoria C_2 desde B a A (véase figura 3). Luego

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

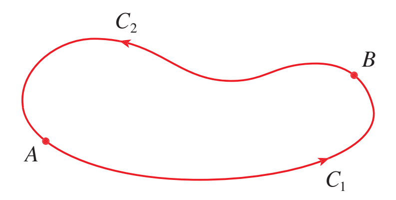


FIGURA 3

puesto que C_1 y $-C_2$ poseen los mismos puntos inicial y final.

En cambio, si es cierto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ cuando C es una trayectoria cerrada en D, entonces se demuestra la independencia de la trayectoria como sigue. Tome dos trayectorias cualesquiera C_1 y C_2 desde A y B en D y defina C como la curva que consta de C_1 seguida de $-C_2$. Entonces

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y de este modo $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Por lo tanto, ha demostrado el teorema siguiente.

3 TEOREMA $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en D.

Puesto que sabe que la integral de línea de cualquier campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ es independiente de la trayectoria, se infiere que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier trayectoria cerrada. La interpretación física es que el trabajo hecho por un campo de fuerza conservativo, como el campo gravitacional o eléctrico estudiados en la sección 16.1, cuando se desplaza un objeto alrededor de una trayectoria cerrada es 0.

El teorema siguiente establece que los *únicos* campos vectoriales que son independientes de la trayectoria son conservativos. Está planteado y demostrado para curvas planas, pero hay una versión similar para las curvas en el espacio. Si supone que D es **abierta**, lo cual significa que para todo punto P en D hay un disco con centro P que está totalmente en D. (De esta manera, D no contiene ninguno de sus puntos límite o frontera.) Además, suponga que D es **conexa**. Esto quiere decir que dos puntos cualesquiera en D se pueden unir mediante una trayectoria que está en D.

4 TEOREMA Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial que es continuo en una región conexa abierta D. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en D, es decir, existe una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

DEMOSTRACIÓN Sea $A(a, b)$ un punto fijo en D. Construya la función de potencial f deseada definiendo

$$f(x, y) = \int_{(a, b)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para cualquier punto (x, y) en D. Puesto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, no importa qué trayectoria C desde (a, b) hasta (x, y) se recorra para evaluar $f(x, y)$. Como D es abierto, existe un disco que está contenido en D cuyo centro es (x, y). Elija cualquier punto (x_1, y) en el disco con $x_1 < x$, y deje que C consista de cualquier trayectoria C_1 desde (a, b) hasta (x_1, y) seguido por el segmento rectilíneo horizontal C_2 desde (x_1, y) a (x, y) (véase figura 4). Entonces,

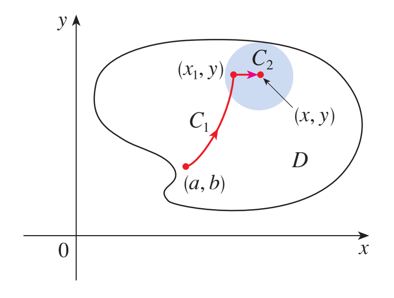


FIGURA 4

$$f(x, y) = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a, b)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Observe que la primera de estas integrales no depende de x, de modo que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Si escribe $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, entonces

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

En C_2, y es constante, de modo que $dy = 0$. Usando t como el parámetro, donde $x_1 \leqslant t \leqslant x$, tiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x} P(t, y)\,dt = P(x, y)$$

FIGURA 5

de acuerdo con la parte 1 del teorema fundamental del cálculo (véase sección 5.3). Al utilizar un segmento vertical (véase figura 5), un razonamiento similar demuestra que

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_1}^{y} Q(x, t)\,dt = Q(x, y)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = \nabla f$$

lo cual establece que $\mathbf{F}$ es conservativa. □

Sigue estando presente la pregunta: ¿Cómo es posible determinar si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo o no? Suponga que ya se sabe que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ es conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden. Entonces, hay una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$, es decir,

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Por lo tanto, según el teorema de Clairaut,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

5 TEOREMA Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo, donde P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden en un dominio D, entonces en la totalidad de D

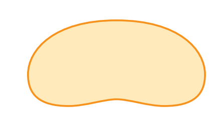
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

simple, no cerrada — no simple, no cerrada — simple, cerrada — no simple, cerrada

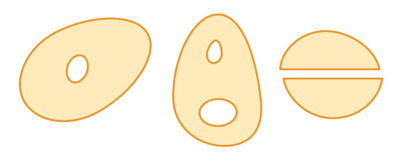
FIGURA 6
Tipos de curvas

El recíproco del teorema 5 es válido sólo para un tipo especial de región. Para explicarlo necesita primero el concepto de una **curva simple**, la cual es una curva que no se corta a sí misma en ninguna parte entre sus puntos extremos. [Véase figura 6; $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ para una curva cerrada simple, pero $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ cuando $a < t_1 < t_2 < b$.]

En el teorema 4 necesita una región conexa abierta. En el caso del teorema siguiente necesita una condición más rigurosa. Una **región simplemente conexa** en el plano



región simplemente conexa



regiones que no son simplemente conexas

FIGURA 7

es una región conexa D tal que toda curva simple cerrada en D abarca sólo puntos que están en D. Observe que, según la figura 7, intuitivamente hablando, una región simplemente conexa no contiene agujeros y no puede consistir en dos partes separadas.

En términos de regiones simplemente conexas, puede ahora enunciar un recíproco parcial del teorema 5 que proporciona un método aceptable para comprobar que el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ es conservativo. La demostración se delinea en la sección siguiente como una consecuencia del teorema de Green.

6 TEOREMA Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ un campo vectorial en una región simplemente conexa D. Suponga que P y Q tienen derivadas continuas de primer orden y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{en toda la región } D$$

Entonces $\mathbf{F}$ es conservativo.

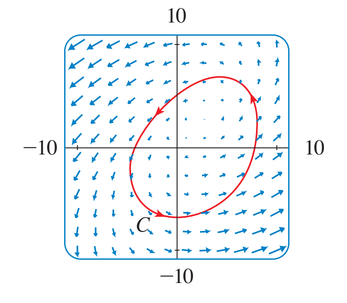


FIGURA 8

■ En las figuras 8 y 9 se ilustran los campos vectoriales de los ejemplo 2 y 3, respectivamente. Los vectores de la figura 8 que inician en la curva cerrada C, parecen señalar aproximadamente la misma dirección que C. De este modo se ve como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} > 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{F}$ no es conservativo. El cálculo del ejemplo 2 confirma esta impresión. Algunos de los vectores cercanos a las curvas C_1 y C_2 de la figura 9 señalan casi la misma dirección que las curvas, pero otros señalan la dirección opuesta. Entonces parece posible que las integrales de línea alrededor de todas las trayectorias cerradas son 0. En el ejemplo 3, se demuestra que, en efecto, $\mathbf{F}$ es conservativo.

EJEMPLO 2 Determine si el siguiente campo vectorial es conservativo o no lo es.

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + (x - 2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = x - y$ y $Q(x, y) = x - 2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, $\mathbf{F}$ no es conservativo según el teorema 5. □

EJEMPLO 3 Determine si el siguiente campo vectorial es conservativo o no lo es.

$$\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

es conservativo.

SOLUCIÓN Sea $P(x, y) = 3 + 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Asimismo, el dominio de $\mathbf{F}$ es todo el plano ($D = \mathbb{R}^2$), el cual es abierto y simplemente conexo. Por lo tanto, puede aplicar el teorema 6 y concluir que $\mathbf{F}$ es conservativo. □

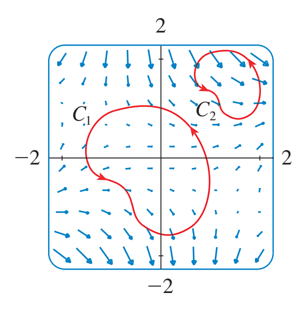


FIGURA 9

En el ejemplo 3, el teorema 6 señala que $\mathbf{F}$ es conservativo, pero no dice cómo determinar la función f (de potencial) tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La demostración del teorema 4 da una pista para encontrar f. Recurra a la "integración parcial", como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4

(a) Si $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$, determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

(b) Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = e^t \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j},\ 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

SOLUCIÓN
(a) De acuerdo con el ejemplo 3, ya sabe que **F** es conservativo y de ese modo existe una función f con $\nabla f = \mathbf{F}$, es decir,

7 $$f_x(x, y) = 3 + 2xy$$

8 $$f_y(x, y) = x^2 - 3y^2$$

Al integrar (7) con respecto a x, obtiene

9 $$f(x, y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Observe que la constante de integración es una constante con respecto a x, es decir, una función de y, la cual se llama $g(y)$. Luego derive ambos miembros de (9) con respecto a y:

10 $$f_y(x, y) = x^2 + g'(y)$$

Al comparar (8) y (10),

$$g'(y) = -3y^2$$

Si integra con respecto a y, tiene

$$g(y) = -y^3 + K$$

donde K es una constante. Al sustituir en (9)

$$f(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + K$$

como la función potencial deseada.

(b) Para aplicar el teorema 2, todo lo que tiene que saber es cuáles son los puntos inicial y final de C, a saber, $\mathbf{r}(0) = (0, 1)$ y $\mathbf{r}(\pi) = (0, -e^{\pi})$. En la expresión para $f(x, y)$ del inciso (a), cualquier valor de la constante K servirá, de modo que seleccione $K = 0$. Luego tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(0, -e^{\pi}) - f(0, 1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

Este método es más corto que el método directo para evaluar las integrales de línea que se trata en la sección 16.2. □

Un criterio para determinar si el campo vectorial **F** sobre $\mathbb{R}^3$ es conservativo o no lo es, se presenta en la sección 16.5. Mientras tanto, el ejemplo siguiente muestra que la técnica para hallar la función potencial es en gran medida la misma que para los campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^2$.

V EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$, determine una función f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Si hay tal función f, entonces

11 $$f_x(x, y, z) = y^2$$

12 $$f_y(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

13 $$f_z(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Al integrar (11) con respecto a x obtiene

14 $$f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

donde $g(y, z)$ es una constante con respecto a x. Luego, al derivar (14) con respecto a y, tiene

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

y la comparación con (12) da

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Por lo tanto, $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ y reescriba (14) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Para terminar, al derivar con respecto a z y comparar con (13), obtiene $h'(z) = 0$ y, entonces, $h(z) = K$, una constante. La función deseada es

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

Se comprueba con facilidad que $\nabla f = \mathbf{F}$. □

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Aplique las ideas de este capítulo a un campo de fuerzas continuo **F** que hace que se desplace un objeto a lo largo de una trayectoria C definida por $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, donde $\mathbf{r}(a) = A$ es el punto inicial y $\mathbf{r}(b) = B$ es el punto final de C. De acuerdo con la segunda ley de Newton del movimiento (véase sección 13.4), la fuerza $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ en un punto sobre C se relaciona con la aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ mediante la ecuación

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$$

De modo que el trabajo que efectúa la fuerza sobre el objeto es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)]\, dt && \text{(teorema 13.2.3, fórmula 4)} \\ &= \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} |\mathbf{r}'(t)|^2\, dt = \frac{m}{2} [|\mathbf{r}'(t)|^2]_a^b && \text{(teorema fundamental del cálculo)} \\ &= \frac{m}{2} \left(|\mathbf{r}'(b)|^2 - |\mathbf{r}'(a)|^2 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

15 $$W = \tfrac{1}{2} m |\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2} m |\mathbf{v}(a)|^2$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ es la velocidad.

La cantidad $\frac{1}{2} m |\mathbf{v}(t)|^2$, es decir, la mitad de la masa por el cuadrado de la velocidad, se llama **energía cinética** del objeto. Por lo tanto, puede volver a escribir la ecuación 15 como

16 $$W = K(B) - K(A)$$

la cual establece que el trabajo hecho por el campo de fuerzas a lo largo de C, es igual al cambio de la energía cinética en los puntos extremos de C.

Suponga además que **F** es un campo de fuerzas conservativo, es decir, puede escribir $\mathbf{F} = \nabla f$. En física, la **energía potencial** de un objeto en el punto (x, y, z) se define como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, de modo que $\mathbf{F} = -\nabla P$. Entonces, según el teorema 2, llega a

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -\,[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a)) = P(A) - P(B)]$$

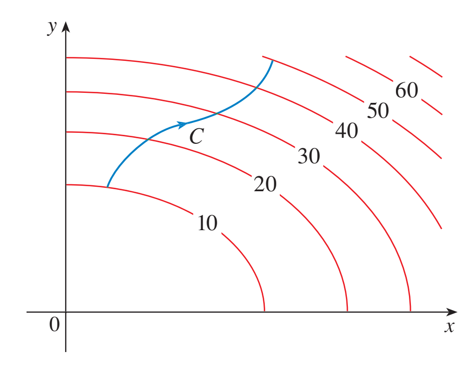
Al comparar esta ecuación con la ecuación 16, encuentra que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

la cual establece que si un objeto se mueve desde un punto A hacia otro punto B bajo la influencia de un campo de fuerzas conservativo, entonces la suma de su energía potencial y de su energía cinética es constante. Este enunciado recibe el nombre de **ley de la conservación de la energía**, y es la razón de que el campo vectorial se llame *conservativo*.

16.3 EJERCICIOS

1. En la figura se observa una curva C y un mapa de curvas de nivel de una función f cuyo gradiente es continuo. Calcule $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. Se proporciona una tabla de valores de una función f con gradiente continuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, donde C tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + 1 \qquad y = t^3 + t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 Determine si **F** es un campo vectorial conservativo o no lo es. Si es así, encuentre una función tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4xy + 3)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x \cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cos xy + \operatorname{sen} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cos xy)\,\mathbf{j}$

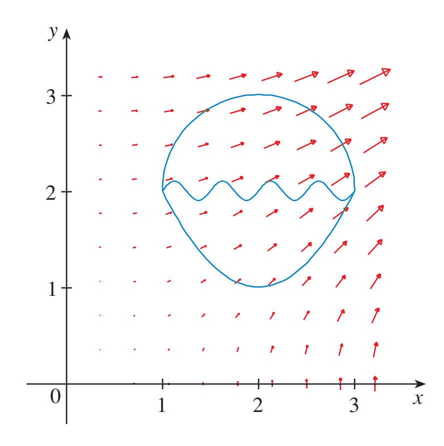
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \operatorname{senh} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\,\mathbf{j}$

11. La figura muestra un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ y tres curvas que inician en (1, 2) y terminan en (3, 2).

(a) Explique por qué $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tiene el mismo valor para las tres curvas.

(b) ¿Cuál es este valor común?



12–18 (a) Determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ y (b) use el inciso (a) para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva dada C.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$,

C es el arco de la parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + 2y \arctan x\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C es el segmento rectilíneo de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (x^2 + 3z^2)\,\mathbf{k}$,
C: $x = t^2$, $y = t + 1$, $z = 2t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z\,\mathbf{i} + 2xy \cos z\,\mathbf{j} - xy^2 \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + (z + 1)e^z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19–20 Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria y evalúe la integral.

19. $\int_C \tan y\,dx + x \sec^2 y\,dy$, C es cualquier trayectoria desde $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$, C es cualquier trayectoria desde $(0, 1)$ a $(1, 2)$

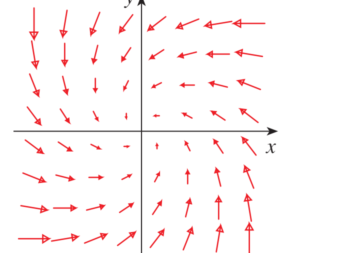
21–22 Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerza $\mathbf{F}$ al desplazar un objeto desde P a Q.

21. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(2, 4)$

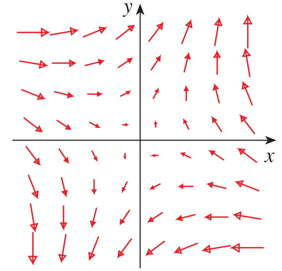
22. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\mathbf{i} - xe^{-y}\mathbf{j}$; $P(0, 1)$, $Q(2, 0)$

23–24 ¿Es conservador el campo vectorial que se muestra en la figura? Explique.

23.



24.



CAS **25.** Si $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x \cos y)\,\mathbf{j}$, use un plano para calcular si $\mathbf{F}$ es conservador. A continuación determine si su cálculo es correcto.

26. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Encuentre unas curvas C_1 y C_2 que no son cerradas y cumplen con la ecuación

(a) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (b) $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

27. Demuestre que si el campo vectorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es conservativo y P, Q y R tienen derivadas parciales continuas de primer orden, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

28. Por medio del ejercicio 27, demuestre que la integral de línea $\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$ no es independiente de la trayectoria.

29–32 Determine si el conjunto dado es o no es (a) abierto, (b) conexo y (c) simplemente conexo.

29. $\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$

30. $\{(x, y) \mid x \neq 0\}$

31. $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

32. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ o } 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

33. Sea $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Demuestre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.

(b) Demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria. [*Sugerencia:* calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ y $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C_1 y C_2 son las mitades superior e inferior del círculo $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ a $(-1, 0)$]. ¿Contradice esto al teorema 6?

34. (a) Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza dado por una relación cuadrática inversa, es decir,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para una constante c, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine el trabajo que realiza $\mathbf{F}$ al mover un objeto desde un punto P_1 a lo largo de una trayectoria hasta el punto P_2 en términos de las distancias d_1 y d_2 desde estos puntos al origen.

(b) Un ejemplo de un campo cuadrático inverso es el campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ analizado en el ejemplo 4 de la sección 16.1. Mediante el inciso (a), calcule el trabajo realizado por el campo gravitacional cuando la Tierra se mueve desde el afelio (a una distancia máxima de 1.52×10^8 km desde el Sol) al perihelio (a una distancia mínima de 1.47×10^8 km). (Utilice los valores $m = 5.97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

(c) Otro ejemplo de un campo cuadrático inverso es el campo eléctrico $\mathbf{E} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ analizado en el ejemplo 5 de la sección 16.1. Suponga que un electrón con carga de -1.6×10^{-19} C está en el origen. Una carga unitaria positiva se localiza a una distancia de 10^{-12} m a partir del electrón y se desplaza a una posición a la mitad de esa distancia desde el electrón. Con el inciso (a) determine el trabajo que efectúa el campo eléctrico. (Use el valor $\varepsilon = 8.985 \times 10^{10}$.)

16.4 TEOREMA DE GREEN

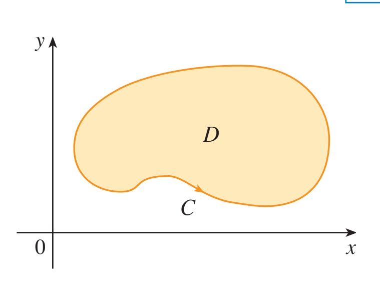
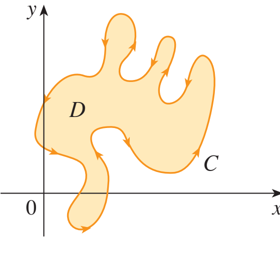
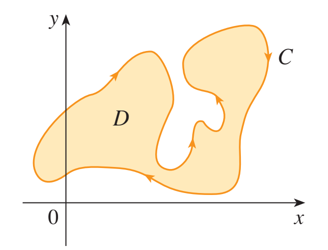


FIGURA 1

El teorema de Green proporciona la correspondencia entre una integral de línea alrededor de una curva simple cerrada C y una integral doble sobre la región plana D limitada por C (véase figura 1. Suponga que la D consta de todos los puntos del interior de C, así como de todos los puntos sobre C.) En el planteamiento del teorema de Green se usa la convención de que la **orientación positiva** de una curva simple cerrada C se refiere a un recorrido sencillo de C *en el sentido contrario al de las manecillas del reloj*. Por lo tanto, si C está definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, entonces la región D está siempre a la izquierda cuando el punto $\mathbf{r}(t)$ recorre C (véase figura 2).



(a) Orientación positiva



(b) Orientación negativa

FIGURA 2

TEOREMA DE GREEN Sea C una curva simple, cerrada, uniforme por segmentos con orientación positiva en el plano, y sea D la región que delimita C. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

■ Recuerde que el primer miembro de esta ecuación es otra forma de escribir $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$.

NOTA Algunas veces, la notación

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o bien} \qquad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

se usa para señalar que la integral de línea se calcula usando la orientación positiva de la curva cerrada C. Otra notación para la curva límite o frontera con orientación positiva de D es ∂D, de modo que la ecuación en el teorema de Green se puede escribir como

1
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

El teorema de Green se debe considerar como el equivalente del teorema fundamental del cálculo para las integrales dobles. Compare la ecuación 1 con el enunciado del teorema fundamental del cálculo, parte 2, en la ecuación siguiente:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

En ambos casos hay una integral que contiene las derivadas (F', $\partial Q/\partial x$ y $\partial P/\partial y$) en el primer miembro de la ecuación. Además, en ambos casos el segundo miembro comprende los valores de las funciones originales (F, Q y P) sólo en la *frontera* del dominio. (En el caso unidimensional, el dominio es un intervalo $[a, b]$ cuyo límite o frontera consiste en sólo dos puntos, a y b.)

El teorema de Green no es fácil de demostrar en general, pero es posible dar una demostración del caso especial donde la región es tanto del tipo I como del tipo II (véase sección 15.3). Llame a dichas regiones **regiones simples**.

■ El teorema de Green recibe este nombre en honor del científico inglés autodidacta George Green (1793-1841). Trabajó de tiempo completo en la panadería de su padre desde que tenía 9 años, y aprendió matemáticas en forma autodidacta en libros de la biblioteca. En 1828 publicó en forma privada *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism,* pero sólo se imprimieron 100 ejemplares, y la mayor parte de ellos fueron para sus amigos. Este librito contenía un teorema que es equivalente al que se conoce como teorema de Green, pero no se conoció ampliamente en ese tiempo. Por fin, cuando Green tenía 40 años, ingresó a la Universidad de Cambridge, pero murió cuatro años después de su graduación. En 1846, William Thomson, Lord Kelvin, encontró un ejemplar del trabajo de Green, se dio cuenta de la importancia y lo hizo reimprimir. Green fue la primera persona en intentar formular una teoría matemática de la electricidad y magnetismo. Su trabajo es la base de las teorías posteriores de Thomson, Stokes, Rayleigh y Maxwell.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE GREEN PARA EL CASO EN EL CUAL *D* ES UNA REGIÓN SIMPLE Observe que el teorema de Green estará demostrado si prueba que

2 $$\int_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

y

3 $$\int_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

Demuestre la ecuación 2 expresando D como una región del tipo I:

$$D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son funciones continuas. Esto permite que calcule la integral doble del segundo miembro de la ecuación 2 como sigue:

4 $$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx$$

donde del último paso se infiere del teorema fundamental del cálculo.

Enseguida calcule el primer miembro de la ecuación 2 descomponiendo C como la unión de cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 mostradas en la figura 3. En C_1 tome x como el parámetro y escriba las ecuaciones paramétricas cuando $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Por lo tanto,

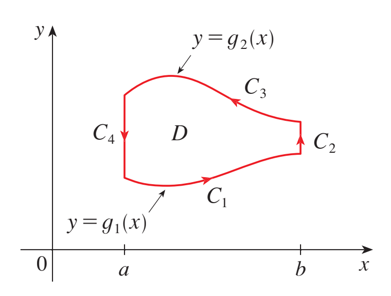


FIGURA 3

$$\int_{C_1} P(x, y)\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx$$

Observe que C_3 va de derecha a izquierda, pero $-C_3$ va de izquierda a derecha, de modo que escriba las ecuaciones paramétricas de $-C_3$ como $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Por lo tanto,

$$\int_{C_3} P(x, y)\,dx = -\int_{-C_3} P(x, y)\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

En C_2 o C_4, cualquiera de las cuales se podría reducir a sólo un punto, x es constante, de modo que $dx = 0$ y

$$\int_{C_2} P(x, y)\,dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y)\,dx$$

De aquí que

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{C_1} P(x, y)\,dx + \int_{C_2} P(x, y)\,dx + \int_{C_3} P(x, y)\,dx + \int_{C_4} P(x, y)\,dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\,dx$$

Al comparar esta expresión con la de la ecuación 4

$$\int_C P(x, y)\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA$$

La ecuación 3 se puede demostrar casi de la misma manera al expresar a D como una región del tipo II (véase ejercicio 28). A continuación, al sumar las ecuaciones 2 y 3, obtiene el teorema de Green. □

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C x^4\,dx + xy\,dy$, donde C es la curva triangular que consta de los segmentos rectilíneos de (0, 0) a (1, 0), de (1, 0) a (0, 1) y de (0, 1) a (0, 0).

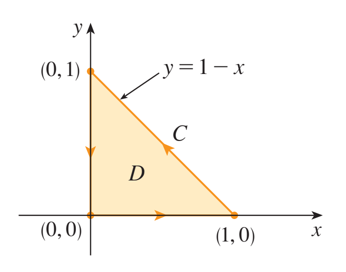


FIGURA 4

SOLUCIÓN Aunque la integral de línea dada se podría evaluar como se acostumbra mediante los métodos de la sección 16.2, eso significaría plantear tres integrales separadas a lo largo de los tres lados del triángulo, de modo que en lugar de eso, aplique el teorema de Green. Observe que la región D encerrada por C es simple y C sigue una orientación positiva (véase figura 4). Si hace $P(x, y) = x^4$ y $Q(x, y) = xy$, entonces

$$\int_C x^4\,dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$ □

V EJEMPLO 2 Evalúe $\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCIÓN La región D acotada por C es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$, de modo que cambie a coordenadas polares después de aplicar el teorema de Green:

$$\oint_C (3y - e^{\operatorname{sen} x})\,dx + \left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(7x + \sqrt{y^4 + 1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}(3y - e^{\operatorname{sen} x})\right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 (7 - 3)\,r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\,dr = 36\pi$$ □

■ En lugar de usar coordenadas polares, podríamos usar simplemente el hecho de que D es un disco de radio 3 y escriba

$$\iint_D 4\,dA = 4 \cdot \pi(3)^2 = 36\pi$$

En los ejemplos 1 y 2, parece que es más fácil evaluar la integral doble que la integral de línea. (¡Trate de empezar la integral de línea del ejemplo 2, y pronto se convencerá!) Pero algunas veces es más fácil evaluar la integral de línea, y se aplica el teorema de Green en la dirección inversa. Por ejemplo, si se sabe que $P(x, y) = Q(x, y) = 0$ en la curva C, entonces el teorema de Green da

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

no importa qué valores tomen P y Q en la región D.

Otra aplicación de la dirección inversa del teorema de Green, es para calcular áreas. Como el área de D es $\iint_D 1\,dA$, seleccione P y Q tal que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Hay varias posibilidades:

$$P(x, y) = 0 \qquad P(x, y) = -y \qquad P(x, y) = -\tfrac{1}{2}y$$
$$Q(x, y) = x \qquad Q(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = \tfrac{1}{2}x$$

Entonces el teorema de Green proporciona las fórmulas siguientes para el área de D:

5
$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \tfrac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

EJEMPLO 3 Determine el área delimitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas de la elipse son $x = a\cos t$ y $y = b \operatorname{sen} t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Al aplicar la tercera fórmula de la ecuación 5

$$A = \tfrac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t)(b\cos t)\,dt - (b\operatorname{sen} t)(-a\operatorname{sen} t)\,dt$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

□

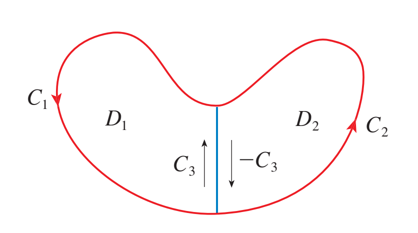


FIGURA 5

Aunque ha demostrado el teorema de Green sólo para el caso donde D es simple, ya puede generalizarlo al caso donde D es una unión finita de regiones simples. Por ejemplo, si D es la región mostrada en la figura 5, entonces puede escribir $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 también son simples. La frontera de D_1 es $C_1 \cup C_3$ y la frontera de D_2 es $C_2 \cup (-C_3)$ entonces, al aplicar el teorema de Green para D_1 y D_2 por separado, llegamos a

$$\int_{C_1\cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$
$$\int_{C_2\cup(-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

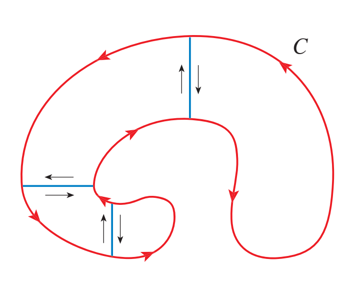


FIGURA 6

Si suma las dos ecuaciones, las integrales de línea a lo largo de C_3 y $-C_3$ se cancelan, de modo que

$$\int_{C_1\cup C_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

que es el teorema de Green para $D = D_1 \cup D_2$, puesto que su frontera es $C = C_1 \cup C_2$.

El mismo tipo de razonamiento permite establecer el teorema de Green para cualquier unión finita de regiones simples que no se traslapan (véase figura 6).

V EJEMPLO 4 Evalúe $\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$, donde C es el límite o frontera de la región semianular D entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ en el semiplano superior.

SOLUCIÓN Observe que aunque D no es simple, el eje y la divide en dos regiones simples (véase figura 7). En coordenadas polares puede escribir

$$D = \{(r, \theta)\mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

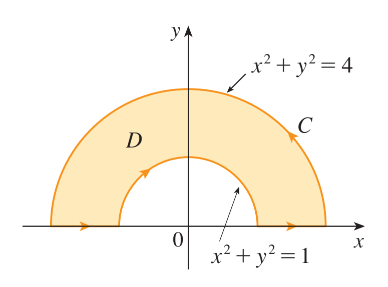


FIGURA 7

Por lo tanto, el teorema de Green proporciona

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA$$

$$= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \big[-\cos\theta\big]_0^{\pi}\big[\tfrac{1}{3}r^3\big]_1^2 = \frac{14}{3}$$ □

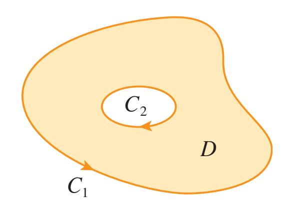


FIGURA 8

El teorema de Green se puede generalizar para aplicarlo a regiones con agujeros, es decir, regiones que no son simplemente conexas. Observe que la frontera C de la región D de la figura 8 consiste en dos curvas simples cerradas C_1 y C_2. Suponga que estas curvas frontera están orientadas de tal modo que la región D siempre está a la izquierda cuando se recorre la curva C. Por lo tanto, la dirección positiva es contraria a la de las manecillas del reloj en el caso de la curva exterior C_1, pero en el sentido de las manecillas del reloj en el caso de la curva interior C_2. Si divide D en dos regiones D' y D'' por medio de las líneas mostradas en la figura 9 y luego aplica el Teorema de Green a D' y D'', obtiene

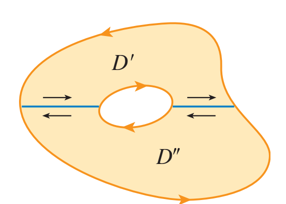


FIGURA 9

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_{\partial D'} P\,dx + Q\,dy + \int_{\partial D''} P\,dx + Q\,dy$$

Como las integrales de línea a lo largo de las rectas frontera comunes siguen direcciones opuestas, se cancelan y entonces

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

la cual es el teorema de Green para la región D.

V EJEMPLO 5 Si $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para toda trayectoria simple, cerrada, orientada positivamente y que encierra el origen.

SOLUCIÓN Como C es una trayectoria cerrada *arbitraria* que encierra el origen, es difícil calcular en forma directa la integral dada. De modo que considere una circunferencia C' orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con centro en el origen y radio a, donde a se escoge de tal manera que sea tan pequeño que C' quede dentro de C (véase figura 10). Sea D la región acotada por C y C'. Entonces su frontera orientada positivamente es $C \cup (-C')$ y de este modo la versión general del teorema de Green proporciona

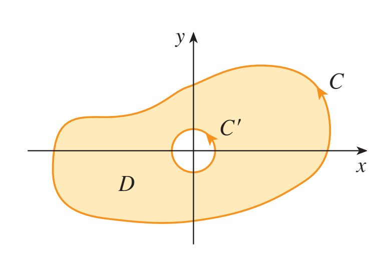


FIGURA 10

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0$$

Por lo tanto,
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

es decir,
$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Ahora calcule con facilidad esta última integral usando la parametrización definida por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Por lo tanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \qquad \square$$

Finaliza esta sección con la aplicación del teorema de Green para analizar un resultado al que se llegó en la sección anterior.

ESBOZO DE LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 16.3.6 Suponga que $\mathbf{F} = P\, \mathbf{i} + Q\, \mathbf{j}$ es un campo vectorial sobre una región D abierta simplemente conexa, que P y Q tienen derivadas parciales continuas de primer orden y que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{en toda la región } D$$

Si C es cualquier trayectoria simple cerrada en D y R es la región que encierra C, entonces el teorema de Green da

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\, dx + Q\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0\, dA = 0$$

Una curva que no es simple se cruza a sí misma en uno o más puntos y se puede descomponer en varias curvas simples. Ya demostró que las integrales de línea de $\mathbf{F}$ alrededor de estas curvas simples son 0, y, al sumar las integrales, observa que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C. Por lo tanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en D según el teorema 16.3.3. Se infiere que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo. $\square$

16.4 EJERCICIOS

1–4 Evalúe la integral de línea mediante dos métodos: (a) directamente y (b) por medio del teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y)dx + (x + y)dy$,
C es el círculo con centro en el origen y radio 2.

2. ,$\oint_C xy\, dx + x^2 dy$
C es el rectángulo con vértices (0, 0), (3, 0), (3, 1), y (0, 1).

3. $\oint_C xy\, dx + x^2 y^3\, dy$,
C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 2).

4. $\oint_C x\, dx + y\, dy$, C consta de los segmentos rectilíneos desde (0, 1) a (0, 0) y de (0, 0) a (1, 0) y la parábola $y = 1 - x^2$ desde (1, 0) a (0, 1).

5–10 Evalúe mediante el teorema de Green la integral de línea a lo largo de la curva con orientación positiva que se proporciona.

5. $\int_C xy^2 dx + 2x^2 y\, dy$,
C es el triángulo con vértices (0, 0), (2, 2), y (2,4).

6. $\int_C \cos y\, dx + x^2 \operatorname{sen} y\, dy$,
C es el rectángulo con vértices (0, 0), (5,0), (5, 2), y (0, 2)

7. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)\, dy$,
C es el límite o frontera de la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$

8. $\int_C xe^{-2x}\, dx + (x^4 + 2x^2 y^2)\, dy$,
C es el límite de la región entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

9. $\int_C y^3\, dx - x^3\, dy$, C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

10. $\int_C \operatorname{sen} y\, dx + x \cos y\, dy$, C es la elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$.

11–14 Evalúe mediante el teorema de Green $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Compruebe la orientación de la curva antes de aplicar el teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \right\rangle$,
C consiste en el arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ desde (0, 0) a $(\pi, 0)$ y el segmento rectilíneo desde $(\pi, 0)$ a (0, 0).

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \operatorname{sen} x\rangle$,
C es el triángulo desde (0, 0) a (2, 6) a (2, 0) a (0, 0).

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^x + x^2 y, e^y - xy^2\rangle$,
C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ orientada en el sentido de las manecillas del reloj.

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \ln(x^2 + y^2), 2 \tan^{-1}(y/x)\rangle$, C es la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

CAS **15–16** Verifique el teorema de Green usando un sistema computarizado de álgebra para evaluar la integral de línea y la integral doble.

15. $P(x, y) = y^2 e^x$, $Q(x, y) = x^2 e^y$,
C consta del segmento de recta de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ seguido por el arco de la parábola $y = 2 - x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$

16. $P(x, y) = 2x - x^3 y^5$, $Q(x, y) = x^3 y^8$,
C es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Mediante el teorema de Green, calcule el trabajo que realiza la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ al desplazar a una partícula desde el origen a lo largo del eje x hasta (1, 0), luego a lo largo del segmento rectilíneo hasta (0, 1) y luego regresa al origen por el eje y.

18. Una partícula parte del punto $(-2, 0)$ se mueve por el eje x hasta (2, 0) y luego por el semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ hasta el punto de inicio. Use el teorema de Green para calcular el trabajo que hace el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2\rangle$ sobre esta partícula.

19. Con una de las fórmulas de (5) para determinar el área bajo un arco del cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Si una circunferencia C de radio 1 gira por el exterior del círculo $x^2 + y^2 = 16$, un punto fijo P sobre C dibuja una curva llamada epicicloide cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$. Trace el epicicloide y con (5) calcule el área que encierra.

21. (a) Si C es el segmento rectilíneo que une el punto (x_1, y_1) con el punto (x_2, y_2), demuestre que

$$\int_C x\,dy - y\,dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Si los vértices de un polígono, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, demuestre que el área del polígono es

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$

(c) Calcule el área del pentágono cuyos vértices son (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) y $(-1, 1)$.

22. Sea D una región acotada por una trayectoria C simple cerrada en el plano xy. Mediante el teorema de Green, demuestre que las coordenadas del centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D son

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

donde A es el área de D.

23. Use el ejercicio 22 para hallar el centroide de una región de cuarto de círculo de radio a.

24. Use el ejercicio 22 para hallar el centroide del triángulo con vértices (0, 0) $(a, 0)$, y (a, b), donde $a > 0$ y $b > 0$.

25. Una lámina plana de densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa una región en el plano xy acotada por una trayectoria C simple cerrada. Demuestre que sus momentos de inercia con respecto a los ejes son

$$I_x = -\frac{\rho}{3}\oint_C y^3\,dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3}\oint_C x^3\,dy$$

26. Por medio del ejercicio 25, determine el momento de inercia de un disco circular de radio a con densidad constante ρ con respecto al diámetro. (Compare con el ejemplo 4 de la sección 15.5.)

27. Si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial del ejemplo 5, demuestre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria simple cerrada que no pase por el origen o que lo encierre.

28. Termine la demostración del caso especial del teorema de Green mediante la demostración de la ecuación 3.

29. Use el teorema de Green para demostrar la fórmula del cambio de variables para una integral doble (fórmula 15.9.9) para el caso donde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\,dy = \iint_S \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

En este caso, R es la región en el plano xy que corresponde a la región S en el plano uv en la transformación definida por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.

[*Sugerencia:* observe que el primer miembro es $A(R)$ y aplique la primera parte de la ecuación 5. Convierta la integral de línea sobre ∂R a una integral de línea sobre ∂S y aplique el teorema de Green en el plano uv.]

16.5 ROTACIONAL Y DIVERGENCIA

En esta sección se definen dos operaciones que se pueden ejecutar con los campos vectoriales y que desempeñan un papel fundamental en las aplicaciones del cálculo vectorial al flujo de fluidos y a la electricidad y magnetismo. Cada operación es similar a la derivación, pero una genera un campo vectorial y la otra proporciona un campo escalar.

ROTACIONAL

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen las derivadas parciales de P, Q y R, entonces el **rotacional** de $\mathbf{F}$ es el campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\boxed{1} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Como un auxiliar nemotécnico, escriba la ecuación usando la notación del operador. Se presenta el operador diferencial vectorial ∇ ("nabla") como

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Tiene significado cuando opera sobre una función escalar para producir el gradiente de f:

$$\nabla f = \mathbf{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

Si piensa que ∇ es un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, también considere el producto cruz formal de ∇ y el campo vectorial $\mathbf{F}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \operatorname{rot} \mathbf{F}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la manera más sencilla de recordar la definición 1 es por medio de la expresión simbólica

$$\boxed{2} \qquad \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, determine el rotacional de $\mathbf{F}$.

SOLUCIÓN Utilizando la ecuación 2

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k} \\
&= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k} \\
&= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}
\end{aligned}$$

□

■ La mayor parte de los sistemas algebraicos computacionales tienen comandos que calculan el rotacional y la divergencia de los campos vectoriales. Si tiene acceso a uno de ellos, use los comandos para comprobar las respuestas de los ejemplos y de los ejercicios de esta sección.

Recuerde que el gradiente de una función f de tres variables es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$, y por eso es posible calcular su rotacional. El teorema siguiente establece que el rotacional de un campo vectorial gradiente es $\mathbf{0}$.

3 TEOREMA Si f es una función de tres variables que tiene derivadas parciales continuas de segundo orden, entonces

$$\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

DEMOSTRACIÓN Tiene

■ Observe la similitud con lo que se trató en la sección 12.4: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para todo vector tridimensional $\mathbf{a}$.

$$\text{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

de acuerdo con el teorema de Clairaut. □

Puesto que un campo vectorial conservativo es uno para el cual $\mathbf{F} = \nabla f$, el teorema 3 se puede volver a enunciar como sigue:

■ Compare esto con el ejercicio 27 de la sección 16.3.

Si $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces el rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Esto proporciona una forma de verificar que un campo vectorial no es conservativo.

V EJEMPLO 2 Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ no es conservativo.

SOLUCIÓN En el ejemplo 1 demostró que

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$$

Esto demuestra que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ y entonces, según el teorema 3, $\mathbf{F}$ no es conservativo. □

El inverso del teorema 3 no es cierto en general, pero el siguiente teorema establece que el inverso es válido si $\mathbf{F}$ está definido dondequiera. (Se puede decir que se cumple si el dominio es simplemente conexo, es decir, "no hay agujeros".) El teorema 4 es la versión tridimensional del teorema 16.3.6. Su demostración requiere el teorema de Stokes y se esboza al final de la sección 16.8.

4 TEOREMA Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en todo $\mathbb{R}^3$ cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo.

V EJEMPLO 3

(a) Demuestre que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

es un campo vectorial conservativo.

(b) Encuentre una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

SOLUCIÓN

(a) Calcule el rotacional de **F**:

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (6xyz^2 - 6xyz^2)\,\mathbf{i} - (3y^2z^2 - 3y^2z^2)\,\mathbf{j} + (2yz^3 - 2yz^3)\,\mathbf{k}$$

$$= \mathbf{0}$$

Puesto que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y el dominio de **F** es $\mathbb{R}^3$, **F** es un campo vectorial conservativo de acuerdo con el teorema 4.

(b) La técnica para determinar f se trata en la sección 16.3. Tiene

5 $$f_x(x, y, z) = y^2z^3$$

6 $$f_y(x, y, z) = 2xyz^3$$

7 $$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2$$

Al integrar (5) con respecto a x obtiene

8 $$f(x, y, z) = xy^2z^3 + g(y, z)$$

Al derivar (8) con respecto a y, obtiene $f_y(x, y, z) = 2xyz^3 + g_y(y, z)$, de modo que al comparar con (6) $g_y(y, z) = 0$. Por lo tanto, $g(y, z) = h(z)$ y

$$f_z(x, y, z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

Entonces (7) da $h'(z) = 0$. Por lo tanto

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$$ □

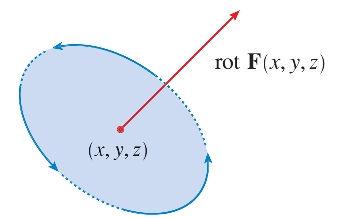


FIGURA 1

La razón del nombre de rotacional es que el vector rotacional se relaciona con rotaciones. Una relación se explica en el ejercicio 37. Hay otra cuando **F** representa el campo de velocidades en el flujo de fluidos (véase ejemplo 3 de la sección 16.1). Las partículas cercanas a (x, y, z) en el fluido tienden a girar alrededor del eje que señala la dirección del rotacional $\mathbf{F}(x, y, z)$, y la longitud de este vector rotacional es una medida de qué tan rápido se desplazan las partículas alrededor del eje (véase figura 1). Si el rotacional $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en un punto P, entonces el fluido no gira en P y **F** se llama **irrotacional** en P. En pocas palabras, no hay remolinos en P. Si el rotacional $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces una pequeñísima rueda de paletas se movería con el fluido, pero no giraría con respecto a su eje. Si el rotacional $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, la rueda de paletas gira alrededor de su eje. Hay una explicación más amplia en la sección 16.8 como consecuencia del teorema de Stokes.

DIVERGENCIA

Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y existen $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ y $\partial R/\partial z$ entonces la **divergencia de F** es la función de tres variables definida por

9
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Observe que el rotacional de **F** es un campo vectorial, pero div **F** es un campo escalar. En términos del operador gradiente $\nabla = (\partial/\partial x)\,\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\,\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\,\mathbf{k}$, la divergencia de **F** se puede expresar simbólicamente como el producto punto de ∇ y **F**:

10
$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$, encuentre div **F**.

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de divergencia (ecuación 9 o 10)

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$ □

Si **F** es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$, entonces rot **F** es también un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$. Si es así, puede calcular su divergencia. El teorema siguiente demuestra que el resultado es 0.

11 **TEOREMA** Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y P, Q y R tienen derivadas parciales de segundo orden, entonces

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

DEMOSTRACIÓN Al aplicar la definición de divergencia y rotacional

■ Observe la analogía con el producto triple escalar: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} \\
&= 0
\end{aligned}$$

porque los términos se anulan en pares según el teorema de Clairaut. □

V **EJEMPLO 5** Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ no se puede expresar como el rotacional de otro campo vectorial, es decir, $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4, demostró que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = z + xz$$

y, por lo tanto, div $\mathbf{F} \neq 0$. Si fuera cierto que $\mathbf{F} = \text{rot}\,\mathbf{G}$, entonces el resultado con el teorema 11 sería

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \text{div rot}\,\mathbf{G} = 0$$

lo cual contradice div $\mathbf{F} \neq 0$. Por lo tanto, $\mathbf{F}$ no es el rotacional de otro campo vectorial. □

■ La razón de esta interpretación de div **F** se explica al final de la sección 16.9 como una consecuencia del teorema de la divergencia.

La razón del nombre de *divergencia* se puede entender en el contexto del flujo de fluidos. Si $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la velocidad de un fluido (o gas), entonces div $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa la razón de cambio neta (con respecto al tiempo) de la masa del fluido (o gas) que fluye desde el punto (x, y, z) por unidad de volumen. En otras palabras, div $\mathbf{F}(x, y, z)$ mide la tendencia del fluido a divergir del punto (x, y, z). Si div $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es **incompresible**.

Se presenta otro operador diferencial cuando calcula la divergencia de un campo vectorial gradiente ∇f. Si f es una función de tres variables

$$\text{div}(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

y esta expresión se presenta con tanta frecuencia que se abrevia $\nabla^2 f$. El operador

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$$

se llama **operador de Laplace** debido a su relación con la **ecuación de Laplace**

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

También se aplica el operador de Laplace ∇^2 a un campo vectorial

$$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$$

en términos de sus componentes:

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

FORMAS VECTORIALES DEL TEOREMA DE GREEN

Los operadores rotacional y divergencia permiten volver a expresar el teorema de Green en versiones que sean útiles en trabajos posteriores. Suponga que la región plana D, su curva frontera C y las funciones P y Q cumplen con las hipótesis del teorema de Green. Entonces considere el campo vectorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Su integral de línea es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

y en cuanto a $\mathbf{F}$, un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ con la tercera componente igual a 0, se tiene

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$(\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y puede volver a expresar la ecuación del teorema de Green en la forma vectorial

12
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\, dA$$

La ecuación 12 expresa la integral de línea de la componente tangencial de **F** a lo largo de C como la integral doble de la componente vertical del rotacional **F** sobre la región D encerrada por C. En seguida se deduce una fórmula similar que contiene la componente *normal* de **F**.

Si C está definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

entonces el vector tangente unitario (véase sección 13.2) es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

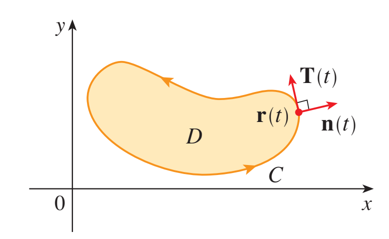


FIGURA 2

Puede verificar que el vector normal unitario exterior a C queda definido por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(Véase figura 2.) Entonces, según la ecuación 16.2.3

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds &= \int_a^b (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})(t)\,|\mathbf{r}'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\, y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\, x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt - Q(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt \\
&= \int_C P\, dy - Q\, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA
\end{aligned}$$

de acuerdo con el teorema de Green. Pero el integrando en esta integral doble es justamente la divergencia de **F**. Entonces una segunda forma vectorial del teorema de Green:

13
$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div }\mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Esta versión establece que la integral de línea de la componente normal de **F** a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de **F** sobre la región D encerrada por C.

16.5 EJERCICIOS

1–8 Determine (a) el rotacional y (b) la divergencia del campo vectorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\,\mathbf{j} + \left(xy - \sqrt{z}\right)\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos xz\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} xy\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + y \tan^{-1}(x/z)\,\mathbf{k}$

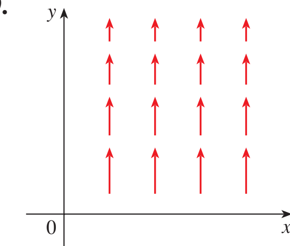
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x, e^{xy}, e^{xyz} \rangle$

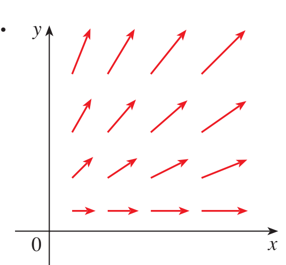
9–11 El campo vectorial $\mathbf{F}$ se muestra en el plano xy y se ve igual en los otros planos horizontales. (En otras palabras, $\mathbf{F}$ es independiente de z y su componente z es 0.)
(a) ¿La div $\mathbf{F}$ es positiva, negativa o cero? Explique.
(b) Determine si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Si no es así, ¿en qué dirección señala rot $\mathbf{F}$?



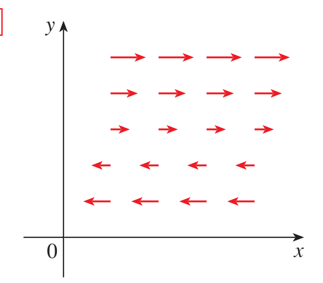
9.



10.



11.



12. Sea f un campo escalar y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Diga si cada una de las expresiones tiene significado. Si no es así, explique la razón. Si tienen significado, diga si es un campo escalar o un campo vectorial.
(a) rot f (b) grad f
(c) div $\mathbf{F}$ (d) rot(grad f)
(e) grad $\mathbf{F}$ (f) grad(div $\mathbf{F}$)
(g) div(grad f) (h) grad(div f)
(i) rot(rot $\mathbf{F}$) (j) div(div $\mathbf{F}$)
(k) (grad f) $\times$ (div $\mathbf{F}$) (l) div(rot(grad f))

13–18 Determine si el campo vectorial es conservativo o no. Si es conservativo, determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + xe^z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x}\,\mathbf{i} + e^{-x}\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = y \cos xy\,\mathbf{i} + x \cos xy\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$

19. ¿Hay un campo vectorial $\mathbf{G}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{G} = \langle x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy \rangle$? Explique.

20. ¿Hay un campo vectorial $\mathbf{G}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{G} = \langle xyz, -y^2z, yz^2 \rangle$? Explique.

21. Demuestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$

donde f, g, h son funciones derivables, es irrotacional.

22. Demuestre que cualquier campo vectorial de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

es incompresible.

23–29 Demuestre la identidad, suponiendo que existen las derivadas parciales y que son continuas. Si f es un campo escalar y $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ son campos vectoriales, entonces $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ y $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ están definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{F}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{G}(x, y, z)$$
$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) \times \mathbf{G}(x, y, z)$$

23. $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}$

24. $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{G}$

25. $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$

26. $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{rot} \mathbf{F} + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

27. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

28. $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$

29. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

30–32 Sea $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique cada una de las identidades.
(a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = 4r$
(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique cada una de las identidades.
(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ (b) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$
(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ (d) $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, determine div $\mathbf{F}$. ¿Hay un valor de p para el cual div $\mathbf{F} = 0$?

---

33. Mediante el teorema de Green en la forma de la ecuación 13, demuestre la **primera identidad de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\, dA = \oint_C f(\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g\, dA$$

donde D y C cumplen la hipótesis del teorema de Green, y existen y son continuas las derivadas parciales adecuadas de f y g. (La cantidad $\nabla g \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{n}}\, g$ se presenta en la integral de línea. Ésta es la derivada direccional en la dirección del vector normal $\mathbf{n}$ y se llama **derivada normal** de g.)

34. Por medio de la identidad de Green (véase ejercicio 33) demuestre la **segunda identidad de Green**:

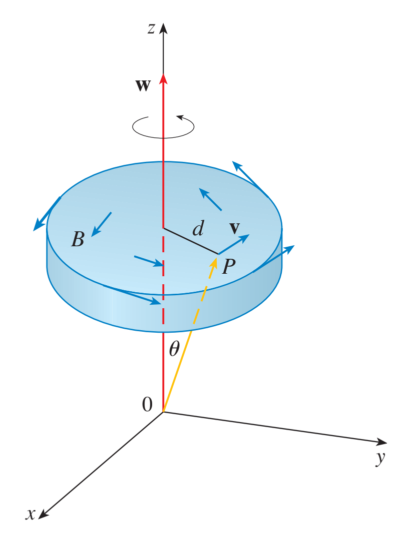
$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, ds$$

donde D y C cumplen la hipótesis del teorema de Green, y existen y son continuas las derivadas parciales adecuadas de f y g.

35. De la sección 14.3 sabe que una función g es llamada armónica en D si satisface la ecuación de Laplace, esto es, $\nabla^2 g = 0$ en D. Utilice la primera identidad de Green (con la misma hipotesis del ejercicio 33) para demostrar que si g es armónica en D, entonces $\oint_c D_n g\, ds =$. Donde $D_n g$ es la derivada normal de g definida en el ejercicio 33.

36. Utilice la primera identidad de Green para demostrar que si f es armónica en D, y si $f(x, y) = 0$ en la frontera de la curva C, entonces $\iint_D |\nabla f|^2\, dA = 0$. (Consdiere la misma hipótesis del ejercico 33.)

37. Este ejercicio demuestra la relación entre el vector rotacional y las rotaciones. Sea B un cuerpo rígido que gira alrededor del eje z. La rotación se puede describir mediante el vector $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$, donde ω es la velocidad angular de B, es decir, la velocidad tangencial de cualquier punto P en B dividido entre la distancia d a partir del eje de rotación. Sea $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$ el vector de posición de P.
(a) Considere el ángulo θ de la figura, y demuestre que el campo de velocidades de B lo define $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$.
(b) Demuestre que $\mathbf{v} = -\omega y\, \mathbf{i} + \omega x\, \mathbf{j}$.
(c) Demuestre que rot $\mathbf{v} = 2\mathbf{w}$.



38. La ecuación de Maxwell que se relaciona con el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{H}$ cuando varían con el tiempo en una región que no contiene ni carga ni corriente se puede formular de la manera siguiente:

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \qquad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

donde c es la velocidad de la luz. Con estas ecuaciones, demuestre lo siguiente:

(a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$

(b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

(c) $\nabla^2 \mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ [*Sugerencia*: utilice el ejercicio 29.]

(d) $\nabla^2 \mathbf{H} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$

39. Ya vio que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} = \nabla g$ cumplen con la ecuación rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y que todos los campos vectoriales de la forma $\mathbf{F} =$ rot $\mathbf{G}$ cumplen la ecuación div $\mathbf{F} = 0$ (si se supone que las derivadas parciales adecuadas son continuas.) Esto lleva a plantear la pregunta: ¿hay algunas ecuaciones que deben cumplir todas las funciones de la forma $f =$ div $\mathbf{G}$? Demuestre que la respuesta a esta pregunta es "No" mediante la demostración que *toda* función continua f sobre $\mathbb{R}^3$ es la divergencia de algún campo vectorial. [*Sugerencia*: sea $\mathbf{G}(x, y, z) = \langle g(x, y, z), 0, 0\rangle$, donde $g(x, y, z) = \int_0^x f(t, y, z)\, dt$.]

16.6 SUPERFICIES PARAMÉTRICAS Y SUS ÁREAS

Hasta este punto se han considerado tipos especiales de superficies: cilindros, superficies cuádricas, gráficas de funciones de dos variables y superficies a nivel de funciones de tres variables. Aquí se usan funciones vectoriales para describir superficies más generales, llamadas *superficies paramétricas,* y se calculan sus áreas. A continuación se toma la fórmula general del área superficial y se ve cómo se aplica a superficies especiales.

SUPERFICIES PARAMÉTRICAS

Casi de la misma manera como se describió una curva en el espacio mediante una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ de un solo parámetro t, puede describir una superficie mediante una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$ de dos parámetros u y v. Suponga que

1 $$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

es una función con valor vectorial definida en una región D en el plano uv. De este modo, x, y y z, las funciones constituyentes de $\mathbf{r}$, son funciones de dos variables u y v con dominio D. El conjunto de todos los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ tal que

2 $$x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$$

y (u, v) varía en todo el dominio D, se llama **superficie paramétrica** S y las ecuaciones 2 se llaman **ecuaciones paramétricas** de S. Cada elección de u y v da un punto en S; luego de efectuar todas las elecciones, obtiene todo S. En otras palabras, la superficie S es delineada por la punta del vector de posición $\mathbf{r}(u, v)$ cuando (u, v) se desplaza por toda la región D (véase figura 1).

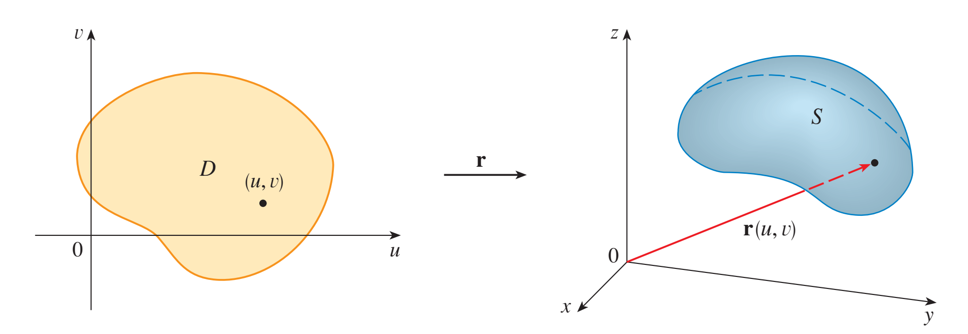


FIGURA 1
Una superficie paramétrica

EJEMPLO 1 Identifique y dibuje la superficie de ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

SOLUCIÓN Las ecuaciones paramétricas de esta superficie son

$$x = 2\cos u \qquad y = v \qquad z = 2\,\mathrm{sen}\,u$$

Entonces, para cualquier punto (x, y, z) sobre la superficie

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\,\mathrm{sen}^2 u = 4$$

Esto quiere decir que las secciones transversales verticales paralelas al plano xy (es decir, con y constante) son todos los círculos de radio 2. Puesto que $y = v$ y no hay restricción sobre v, la superficie es un cilindro circular de radio 2 y su eje es el eje de las y (véase figura 2). □

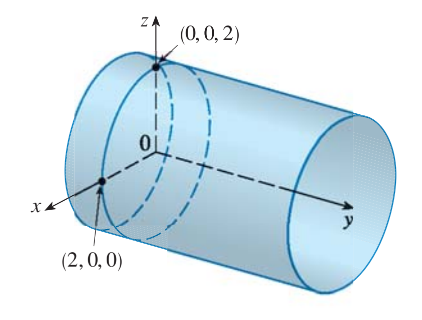


FIGURA 2

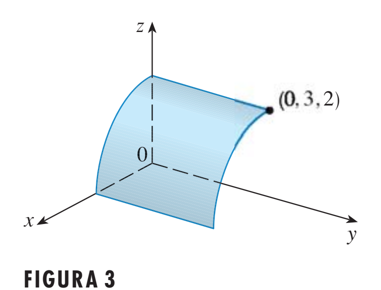


FIGURA 3

En el ejemplo 1 no hubo restricciones a los parámetros u y v, y por eso obtuvo el cilindro completo. Por ejemplo, si restringe u y v expresando el dominio del parámetro como

$$0 \leqslant u \leqslant \pi/2 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 3$$

entonces $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, y obtiene el cuarto de cilindro cuyo largo es 3 y que se ilustra en la figura 3.

Si una superficie paramétrica S está dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces hay dos familias útiles de curvas que están en S, a saber, una familia con u constante y la otra con v constante. Estas familias corresponden a las rectas vertical y horizontal en el plano uv. Si mantiene u constante al hacer $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se vuelve una función vectorial del parámetro v y define una curva C_1 que queda sobre S (véase figura 4).

TEC Visual 16.6 muestra versiones animadas de las figura 4 y 5, con curvas reticuladas que se mueven, para varias superficies paramétricas.

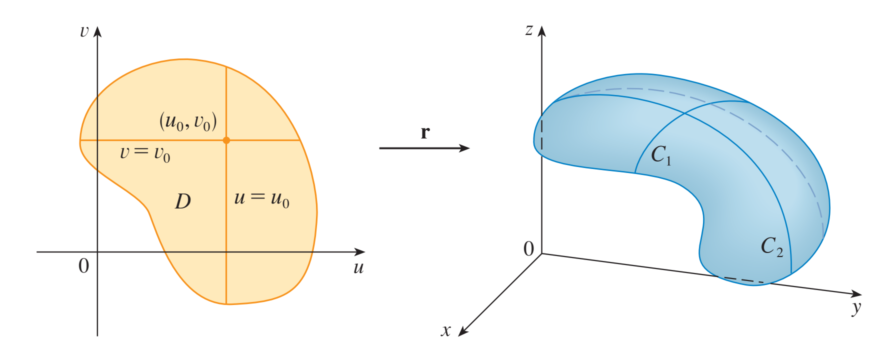


FIGURA 4

En forma similar, si mantiene constante a v haciendo $v = v_0$, obtiene una curva C_2 definida por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que queda sobre S. Estas curvas se denominan **curvas reticulares**. (Por ejemplo, en el ejemplo 1, las curvas reticulares obtenidas al hacer u constante son rectas horizontales, en tanto que las curvas reticulares cuando v es constante son circunferencias.) En efecto, cuando una computadora dibuja una superficie paramétrica, por lo regular delinea una superficie trazando estas curvas reticulares, como ve en el ejemplo siguiente.

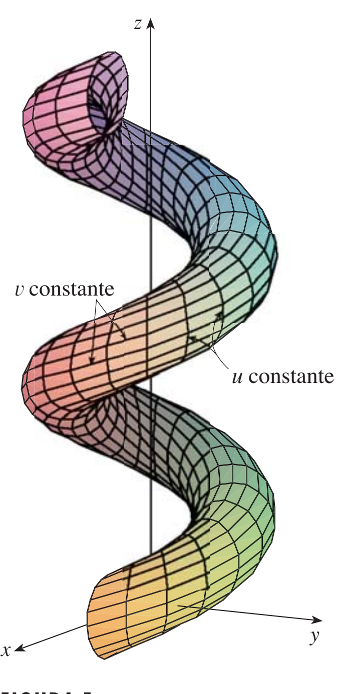


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Utilice un sistema algebraico computacional para dibujar la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle (2 + \operatorname{sen} v) \cos u, (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u, u + \cos v \rangle$$

¿Qué curvas tienen a u como constante? ¿Cuáles tienen a v como constante?

SOLUCIÓN Trace la parte de la superficie con el dominio del parámetro $0 \leqslant u \leqslant 4\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ de la figura 5. Tiene el aspecto de un tubo en espiral. Para identificar las curvas reticulares, escriba las ecuaciones paramétricas correspondientes:

$$x = (2 + \operatorname{sen} v) \cos u \qquad y = (2 + \operatorname{sen} v) \operatorname{sen} u \qquad z = u + \cos v$$

Si v es constante, entonces sen v y cos v son constantes, por lo que las ecuaciones paramétricas son similares a las de la hélice del ejemplo 4 de la sección 13.1. Así, las curvas reticulares con v constante son las curvas de la espiral de la figura 5. Se infiere que las curvas reticulares con u constante deben ser las curvas que se ven como circunferencias en la figura. Más pruebas para esta afirmación es que si u se mantiene constante, $u = u_0$, entonces la ecuación $z = u_0 + \cos v$ demuestra que los valores z varían de $u_0 - 1$ a $u_0 + 1$. □

En los ejemplos 1 y 2, se daba una ecuación vectorial y se pedía dibujar la superficie paramétrica correspondiente. En los ejemplos siguientes se plantea el problema más difícil de hallar una función vectorial que represente una superficie dada. En lo que resta del capítulo, a menudo se necesita hacer exactamente eso.

EJEMPLO 3 Formule una función vectorial que represente el plano que pasa por el punto P_0 y cuyo vector de posición es $\mathbf{r}_0$ y contiene dos vectores no paralelos **a** y **b**.

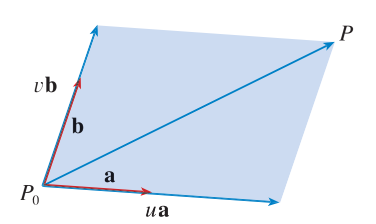


FIGURA 6

SOLUCIÓN Si P es cualquier punto en el plano, puede pasar de P_0 a P desplazándose una cierta distancia en la dirección de **a** y otra distancia en la dirección de **b**. Así que hay escalares u y v tales que $\overrightarrow{P_0P} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. (En la figura 6 se ilustra cómo funciona mediante la ley del paralelogramo en el caso donde u y v son positivas. Véase también el ejercicio 40 de la sección 12.2.) Si **r** es el vector de posición de P, entonces

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

Entonces, la ecuación vectorial del plano se puede expresar como

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$$

donde u y v son números reales.

Si plantea $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces exprese las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) como sigue:

$$x = x_0 + ua_1 + vb_1 \qquad y = y_0 + ua_2 + vb_2 \qquad z = z_0 + ua_3 + vb_3$$ □

V EJEMPLO 4 Determine la representación paramétrica de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

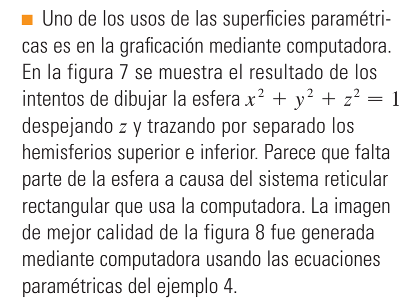
SOLUCIÓN La representación simple de la esfera es $\rho = a$ en coordenadas esféricas, así que escoja los ángulos ϕ y θ en coordenadas esféricas como los parámetros (véase sección 15.8). Luego, al hacer $\rho = a$ en las ecuaciones para la conversión de coordenadas esféricas a rectangulares (ecuaciones 15.8.1) obtiene

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

como las ecuaciones paramétricas de la esfera. La ecuación vectorial correspondiente es

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

Tiene $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, de modo que el dominio del parámetro es el rectángulo $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Las curvas reticulares con ϕ constante son las circunferencias de latitud constante (sin olvidar el ecuador). Las curvas reticulares con θ constante son los meridianos (semicírculos), los cuales unen los polos norte y sur. □


■ Uno de los usos de las superficies paramétricas es en la graficación mediante computadora. En la figura 7 se muestra el resultado de los intentos de dibujar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ despejando z y trazando por separado los hemisferios superior e inferior. Parece que falta parte de la esfera a causa del sistema reticular rectangular que usa la computadora. La imagen de mejor calidad de la figura 8 fue generada mediante computadora usando las ecuaciones paramétricas del ejemplo 4.

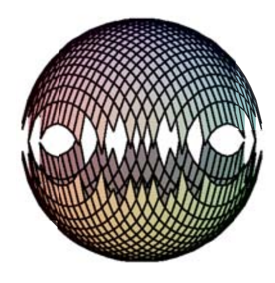


FIGURA 7

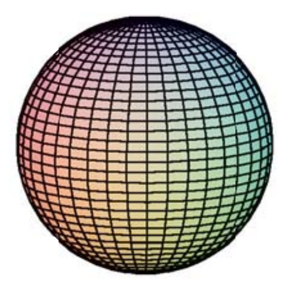


FIGURA 8

EJEMPLO 5 Elabore la representación paramétrica del cilindro

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

SOLUCIÓN El cilindro tiene una representación simple $r = 2$ en coordenadas cilíndricas, de modo que elija como parámetros a θ y z en coordenadas cilíndricas. Entonces las ecuaciones paramétricas del cilindro son

$$x = 2\cos\theta \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z$$

donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant z \leqslant 1$. □

V EJEMPLO 6 Determine una función vectorial que representa el paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$.

SOLUCIÓN Si considera a x y y como parámetros, entonces las ecuaciones paramétricas son simplemente

$$x = x \qquad y = y \qquad z = x^2 + 2y^2$$

y la ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\,\mathbf{k}$$ □

TEC En Module 16.6 puede observar familias de superficies paramétricas.

En general, si se da una superficie como gráfica de una función de x y de y, es decir, con una ecuación de la forma $z = f(x, y)$, siempre se le puede considerar como una superficie paramétrica haciendo a x y y parámetros y expresando las ecuaciones paramétricas como

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

Las representaciones paramétricas, también conocidas como parametrizaciones de superficies, no son únicas. El ejemplo siguiente muestra dos maneras de parametrizar un cono.

EJEMPLO 7 Busque una representación paramétrica para la superficie $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, es decir, la mitad superior del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

SOLUCIÓN 1 Una representación posible se consigue escogiendo a x y y como parámetros:

$$x = x \qquad y = y \qquad z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

De modo que la ecuación vectorial es

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$$

■ Para algunos casos, las representaciones paramétricas de las soluciones 1 y 2 son igualmente buenas, pero la solución 2 es preferible en ciertas situaciones. Si interesara sólo la parte del cono que queda abajo del plano $z = 1$, por ejemplo, todo lo que debe hacer en la solución 2 es cambiar el dominio del parámetro a

$$0 \leqslant r \leqslant \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN 2 Otra representación resulta de escoger como parámetros a las coordenadas polares r y θ. Un punto (x, y, z) del cono satisface $x = r\cos\theta$, $y = \mathrm{sen}\,\theta$ y $z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. De modo que una ecuación vectorial para el cono es

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$$

donde $r \geqslant 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. □

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Estas superficies se pueden representar en forma paramétrica y, por lo tanto, se pueden dibujar mediante una computadora. Por ejemplo, considere la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \geqslant 0$.

Sea θ el ángulo de rotación como se ilustra en la figura 9. Si (x, y, z) es un punto de S, entonces

3 $$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\operatorname{sen}\theta$$

FIGURA 9

Por lo tanto, tome x y θ como parámetros y considere las ecuaciones 3 como ecuaciones paramétricas de S. El dominio del parámetro está definido por $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

EJEMPLO 8 Determine las ecuaciones paramétricas de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, alrededor del eje de las x. Con estas ecuaciones, dibuje la superficie de revolución.

SOLUCIÓN Según las ecuaciones 3, las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = \operatorname{sen} x \cos\theta \qquad z = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\theta$$

y el dominio del parámetro es $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. La figura 10 ilustra una gráfica que se elaboró al trazar estas ecuaciones y girar la imagen con la ayuda de una computadora. □



FIGURA 10

Puede adaptar las ecuaciones 3 para representar una superficie obtenida a partir del giro alrededor del eje y o del eje z (véase ejercicio 30).

PLANOS TANGENTES

A continuación determinará el plano tangente a una superficie paramétrica S delineada por una función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

en un punto P_0 con vector de posición $\mathbf{r}(u_0, v_0)$. Si mantiene a u constante haciendo $u = u_0$, entonces $\mathbf{r}(u_0, v)$ se transforma en una función vectorial del parámetro único v, y define una curva reticular C_1 que queda sobre S (véase figura 11). El vector tangente a C_1 en P_0 se obtiene determinando la derivada parcial de $\mathbf{r}$ con respecto a v:

4 $$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

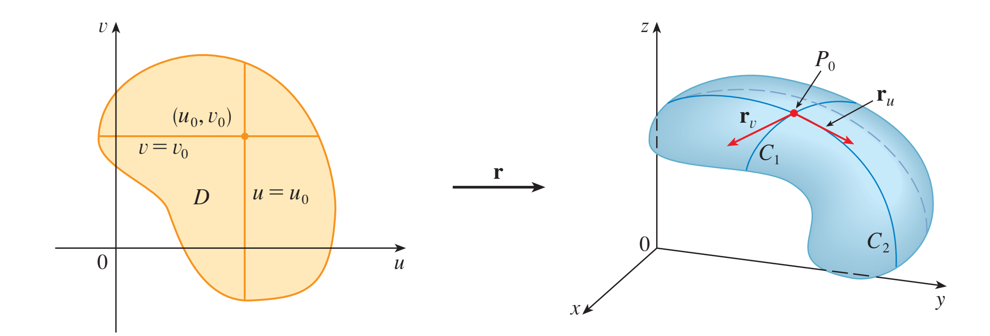


FIGURA 11

De manera similar, si maniene a v constante haciendo $v = v_0$, obtiene una curva reticular C_2 definida por $\mathbf{r}(u, v_0)$ que queda en S, y su vector tangente en P_0 es

5 $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Si $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ no es $\mathbf{0}$, entonces la superficie S se llama **uniforme**, es decir, no tiene "esquinas". En el caso de una superficie uniforme, el plano tangente es el plano que contiene los vectores tangentes $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ y el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es un vector normal al plano tangente.

■ La figura 12 muestra la superficie del ejemplo 9 que se corta a sí misma y su plano tangente en (1, 1, 3).

FIGURA 12

V EJEMPLO 9 Determine el plano tangente a la superficie cuyas ecuaciones paramétricas son $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ en el punto (1, 1, 3).

SOLUCIÓN Primero calcule los vectores tangente:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k} = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto, un vector normal al plano tangente es

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

Observe que el punto (1, 1, 3) corresponde a los valores del parámetro $u = 1$ y $v = 1$, así que el vector normal es

$$-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto, una ecuación del plano tangente en (1, 1, 3) es

$$-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$$

o también
$$x + 2y - 2z + 3 = 0$$
□

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

En seguida se define el área de una superficie paramétrica general definida mediante la ecuación 1. Para simplificar el trabajo, primero se considera una superficie cuyo dominio D del parámetro es un rectángulo, y se subdivide en más rectángulos R_{ij}. Escoge (u_i^*, v_j^*) como el vértice inferior izquierdo de R_{ij} (véase figura 13). La parte S_{ij} de la superficie S que corresponde a R_{ij} se denomina *parche* y el punto P_{ij}, cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$, es uno de sus vértices. Sean

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

los vectores tangente en P_{ij} como lo definen las ecuaciones 4 y 5.

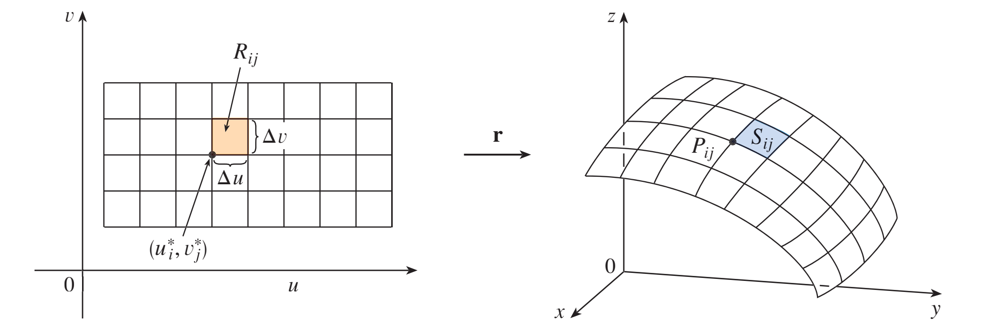
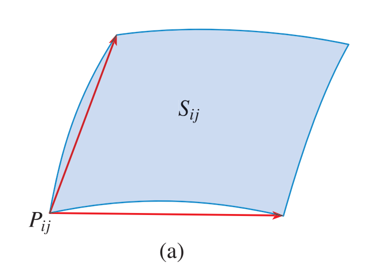
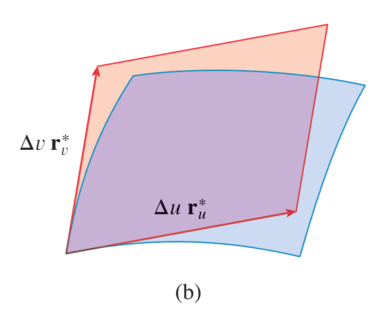


FIGURA 13
La imagen del subrectángulo R_{ij} es el parche S_{ij}.



(a)



(b)

FIGURA 14
Aproximación de un parche mediante un paralelogramo

En la figura 14(a) se ilustra la manera como las dos orillas del parche que se encuentran en P_{ij} se pueden aproximar mediante vectores. A su vez, estos vectores se pueden aproximar por medio de los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$ porque las derivadas parciales se pueden aproximar por cocientes de diferencias. De este modo, aproxime S_{ij} por medio del paralelogramo definido por los vectores $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ y $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$. Este paralelogramo se ilustra en la figura 14(b) y se ubica en el plano tangente a S en P_{ij}. El área de este paralelogramo es

$$|(\Delta u\, \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

y de este modo una aproximación del área de S es

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|\, \Delta u\, \Delta v$$

La intuición dice que esta aproximación es mejor cuando incrementa la cantidad de rectángulos, e identifica la doble suma como una suma de Riemann para la integral doble $\iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv$. Esto da lugar a la definición siguiente.

6 DEFINICIÓN Si la ecuación siguiente define una superficie S paramétrica uniforme

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

y S es cubierta sólo una vez cuando (u, v) varía en todo el dominio del parámetro D, entonces el **área de la superficie** de S es

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 10 Determine el área de la superficie de una esfera de radio a.

SOLUCIÓN En el ejemplo 4, encontró que la representación paramétrica

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = a \cos \phi$$

donde el dominio del parámetro es

$$D = \{(\phi, \theta) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$$

Primero calcule el producto cruz de los vectores tangentes:

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \phi} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \phi \\ -a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta\, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi\, \mathbf{k}$$

Por consiguiente,

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi \cos^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^4\phi \operatorname{sen}^2\theta + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4 \operatorname{sen}^4\phi + a^4 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\phi} = a^2\sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = a^2 \operatorname{sen}\phi$$

puesto que $\operatorname{sen}\phi \geqslant 0$ para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. Por lo tanto, según la definición 6, el área de la esfera es

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = a^2(2\pi)2 = 4\pi a^2$$ □

ÁREA DE LA SUPERFICIE DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

En el caso especial de una superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$, donde (x, y) está en D y f tiene derivadas parciales continuas, tome a x y y como parámetros. Las ecuaciones paramétricas son

$$x = x \qquad y = y \qquad z = f(x, y)$$

de modo que $$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

y

7 $$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Por lo tanto, tiene que

8 $$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

■ Observe que hay similitud entre la fórmula de la ecuación 9 para el área de una superficie y la fórmula de la longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

de la sección 8.1.

y la fórmula del área superficial de la definición 6 se transforma en

9 $$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

V EJEMPLO 11 Determine el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se ubica bajo el plano $z = 9$.

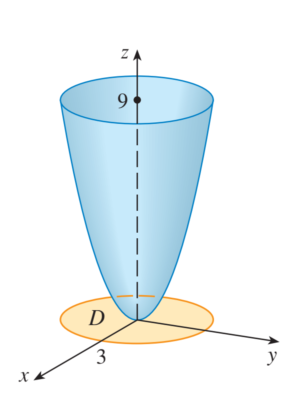


FIGURA 15

SOLUCIÓN El plano corta el paraboloide y forma el círculo $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$. Por lo tanto, la superficie dada está arriba del disco D con centro en el origen y radio 3 (véase figura 15). Al aplicar la fórmula 9

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA$$

Al transformar a coordenadas polares

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\, dr$$

$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big]_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37} - 1\right)$$ □

La pregunta que resta es si la definición de área de una superficie (6) va de acuerdo con la fórmula del área de una superficie a partir del cálculo de una sola variable (8.2.4).

Considere la superficie S que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje de las x, donde $f(x) \geqslant 0$ y f' es continua. De acuerdo con las ecuaciones 3 sabe que las ecuaciones paramétricas de S son

$$x = x \qquad y = f(x)\cos\theta \qquad z = f(x)\,\text{sen}\,\theta \qquad a \leqslant x \leqslant b \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Para calcular el área de la superficie de S, necesita los vectores tangentes

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\,\text{sen}\,\theta \\ 0 & -f(x)\,\text{sen}\,\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k}$$

y entonces $$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{[f(x)]^2[f'(x)]^2 + [f(x)]^2\cos^2\theta + [f(x)]^2\,\text{sen}^2\theta}$$

$$= \sqrt{[f(x)]^2[1 + (f'(x))^2]} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

porque $f(x) \geqslant 0$. De donde, el área de S es

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\, d\theta$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Ésta es precisamente la fórmula que se utilizó para definir el área de una superficie de revolución en el cálculo de una sola variable (8.2.4).

16.6 EJERCICIOS

1–2 Determine si los puntos P y Q están sobre la línea dada.

1. $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v\rangle$
$P(7, 10, 4)$, $Q(5, 22, 5)$

2. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2$
$P(3, -1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$

3–6 Identifique la superficie con la ecuación vectorial dada.

3. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (3 - v)\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(u, v) = 2\,\text{sen}\,u\,\mathbf{i} + 3\cos u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

5. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, t, t^2 - s^2\rangle$

6. $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, \text{sen}\,2t, s^2, s\cos 2t\rangle$

7–12 Con la ayuda de una computadora, dibuje la superficie paramétrica. Imprima la gráfica y sobre ella indique en cuáles curvas reticulares u es constante y en cuáles v es constante.

7. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2 + 1, v^3 + 1, u + v\rangle$ $-1 \leqslant u \leqslant 1, -1 \leqslant v \leqslant 1$

8. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2, v^2\rangle$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2\cos v, u\,\text{sen}\,v, u^5\rangle$, $-1 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

10. $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos u \text{ sen } v, \text{sen } u \text{ sen } v, \cos v + \ln \tan(v/2) \rangle$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $0.1 \leqslant v \leqslant 6.2$

11. $x = \text{sen } v$, $y = \cos u \text{ sen } 4v$, $z = \text{sen } 2u \text{ sen } 4v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$

12. $x = u \text{ sen } u \cos v$, $y = u \cos u \cos v$, $z = u \text{ sen } v$

13–18 Relacione las ecuaciones con la gráfica correspondiente I a VI y exponga las razones de su respuesta. Determine en qué familias de curvas reticulares u es constante y en cuáles v es constante.

13. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \, \mathbf{i} + u \text{ sen } v \, \mathbf{j} + v \, \mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \, \mathbf{i} + u \text{ sen } v \, \mathbf{j} + \text{sen } u \, \mathbf{k}$, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$

15. $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen } v \, \mathbf{i} + \cos u \text{ sen } 2v \, \mathbf{j} + \text{sen } u \text{ sen } 2v \, \mathbf{k}$

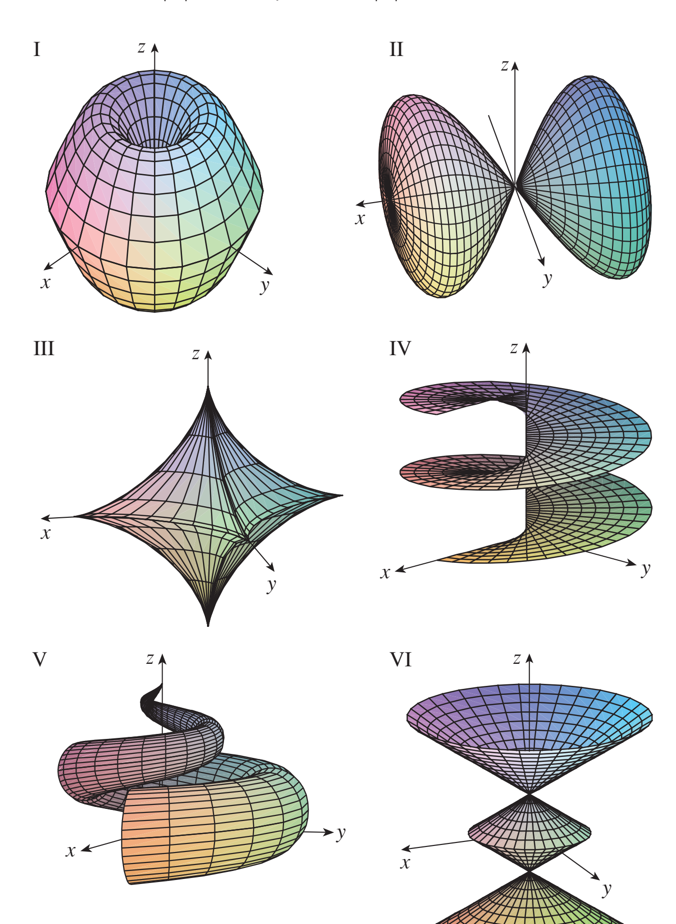
16. $x = (1 - u)(3 + \cos v) \cos 4\pi u$,

$y = (1 - u)(3 + \cos v) \text{ sen } 4\pi u$,

$z = 3u + (1 - u) \text{ sen } v$

17. $x = \cos^3 u \cos^3 v$, $y = \text{sen}^3 u \cos^3 v$, $z = \text{sen}^3 v$

18. $x = (1 - |u|) \cos v$, $y = (1 - |u|) \text{sen } v$, $z = u$



19–26 Encuentre una representación paramétrica de la superficie.

19. El plano que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y contiene los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

20. La mitad inferior del elipsoide $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

21. La parte del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que se encuentra a la derecha del plano xz.

22. La parte del paraboloide elíptico $x + y^2 + 2z^2 = 4$ que está enfrente del plano $x = 0$.

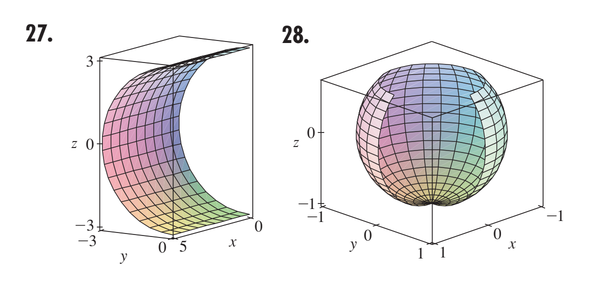
23. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se sitúa arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

24. La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre los planos $z = -2$ y $z = 2$.

25. La parte del cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que está entre los planos $x = 0$ y $x = 5$.

26. La parte del plano $z = x + 3$ que se sitúa en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

CAS **27–28** Mediante un sistema algebraico computacional, genere una gráfica que se parezca a la que se proporciona.



29. Determine las ecuaciones paramétricas de la superficie que se obtiene al hacer girar la curva $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, alrededor del eje de las x y con ellas dibuje la superficie.

30. Determine las ecuaciones paramétricas de la superficie que se obtiene al hacer girar la curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, alrededor del eje de las y y con ellas dibuje la superficie.

31. (a) ¿Qué sucede con el tubo en espiral del ejemplo 2 (véase figura 5) si reemplaza $\cos u$ por $\text{sen } u$ y $\text{sen } u$ por $\cos u$?
(b) ¿Qué ocurre si en lugar de $\cos u$ pone $\cos 2u$ y en lugar de $\text{sen } u$ escribe $\text{sen } 2u$?

32. La superficie con ecuaciones paramétricas

$$x = 2 \cos \theta + r \cos(\theta/2)$$

$$y = 2 \text{ sen } \theta + r \cos(\theta/2)$$

$$z = r \text{ sen}(\theta/2)$$

donde $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se denomina **cinta de Möbius.** Dibuje esta superficie desde varias perspectivas. ¿Qué es lo poco común con ella?

33–36 Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica dada en el punto especificado. Si cuenta con programas de cómputo que dibujen superficies paramétricas, use la computadora para dibujar la superficie y el plano tangente.

33. $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v; \qquad (2, 3, 0)$

34. $x = u^2, \quad y = v^2, \quad z = uv; \quad u = 1, v = 1$

35. $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u \cos v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, v = 0$

36. $\mathbf{r}(u, v) = uv\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v \cos u\,\mathbf{k}; \quad u = 0, v = \pi$

37–47 Determine el área de la superficie.

37. La parte del plano $3x + 2y + z = 6$ que está en el primer octante

38. La parte del plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$

39. La superficie $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

40. La parte del plano con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 1 + v, u - 2v, 3 - 5u + v\rangle$ que está dada por $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$

41. La parte de la superficie $z = xy$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

42. La parte de la superficie $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está arriba del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, 1)$.

43. La parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$

44. La parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$

45. La parte de la superficie $y = 4x + z^2$ que se encuentra entre los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.

46. El *helicoide* (o rampa en espiral) cuya ecuación vectorial es $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

47. La superficie cuyas ecuaciones paramétricas son $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

48–49 Determine el área de la superficie con cuatro cifras decimales de aproximación, expresando el área en términos de una integral sencilla y utilice una calculadora para estimar la integral.

48. La parte de la superficie $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

49. La parte de la superficie $z = e^{-x^2-y^2}$ que está arriba del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

CAS **50.** Calcule con cuatro cifras de aproximación decimal el área de la parte de la superficie $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que queda arriba del cuadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre mediante la gráfica de esta parte de la superficie.

51. (a) Aplique la regla del punto medio para las integrales dobles (véase sección 15.1) con seis cuadrados para estimar el área de la superficie $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

CAS (b) Mediante un sistema algebraico computacional, aproxime el área de la superficie del inciso (a) con cuatro cifras decimales. Compare con la respuesta del inciso (a).

CAS **52.** Calcule el área de la superficie cuya ecuación vectorial es $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$. Dé su respuesta con cuatro cifras decimales.

CAS **53.** Calcule el área exacta de la superficie $z = 1 + 2x + 3y + 4y^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

54. (a) Plantee una integral doble, sin evaluarla, para el área de la superficie cuyas ecuaciones paramétricas son $x = au \cos v$, $y = bu \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

(b) Elimine los parámetros para demostrar que la superficie es un paraboloide elíptico, y proporcione otra integral doble para el área de la superficie.

(c) Mediante las ecuaciones paramétricas del inciso (a) con $a = 2$ y $b = 3$ dibuje la superficie.

CAS (d) Para el caso de $a = 2$ y $b = 3$, aplique un sistema algebraico computacional para determinar el área de la superficie con una aproximación de cuatro cifras decimales.

55. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas $x = a \operatorname{sen} u \cos v$, $y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$, $z = c \cos u$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$, representan un elipsoide.

(b) Aplique las ecuaciones paramétricas del inciso anterior para dibujar el elipsoide para el caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

(c) Plantee pero no evalúe una integral doble para el área de la superficie del elipsoide del inciso (b).

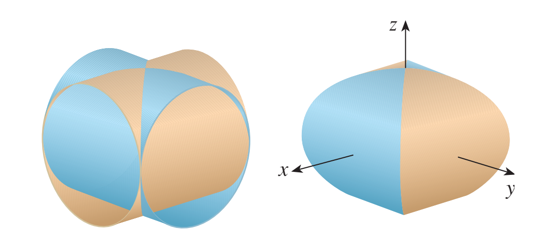
56. (a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas $x = a \cosh u \cos v$, $y = b \cosh u \operatorname{sen} v$, $z = c \operatorname{senh} u$, representan un hiperboloide de una hoja.

(b) Aplique las ecuaciones paramétricas del inciso anterior para dibujar el hiperboloide para el caso $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

(c) Plantee pero no evalúe una integral doble para el área de la parte del hiperboloide del inciso (b) que se ubica entre el plano $z = -3$ y $z = 3$.

57. Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que se encuentra dentro de la paraboloide $z = x^2 + y^2$.

58. La figura muestra la superficie creada cuando el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ interseca al cilindro $x^2 + z^2 = 1$. Calcule el área de esta superficie.



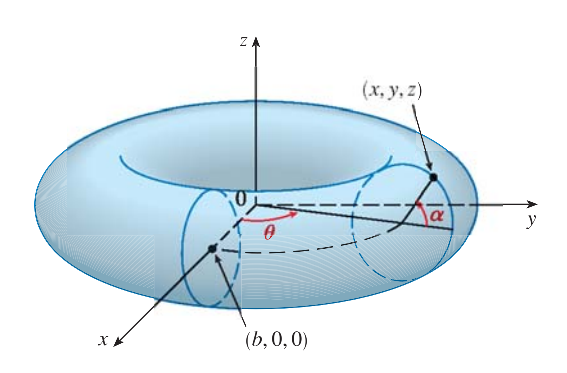
59. Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.

60. (a) Determine una representación paramétrica del toro que se obtiene al hacer girar alrededor del eje z al círculo que se encuentra en el plano xz y cuyo centro es $(b, 0, 0)$ y radio $a < b$. [*Sugerencia*: considere como parámetros los ángulos θ y α mostrados en la figura.]



(b) Utilice las ecuaciones paramétricas determinadas en el inciso anterior para dibujar el toro para varios valores de a y b.

(c) Mediante la representación paramétrica del inciso (a) determine el área de la superficie del toro.



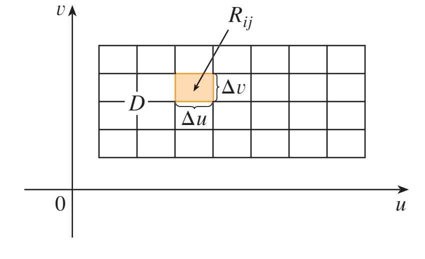
16.7 INTEGRALES DE SUPERFICIE

La correspondencia que existe entre las integrales de superficie y el área de una superficie, es la misma que la relación entre integrales de línea y longitud de arco. Suponga que f es una función de tres variables en cuyo dominio se encuentra la superficie S. Definirá la integral de superficie de f sobre S en tal forma que, en el caso donde $f(x, y, z) = 1$, el valor de la integral de superficie es igual al área superficial de S. Comience con superficies paramétricas y luego se trabaja con el caso especial donde S es la gráfica de una función de dos variables.

SUPERFICIES PARAMÉTRICAS

Suponga que una superficie S tiene una ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$



Primero suponga que el dominio D del parámetro es un rectángulo y lo divide en subrectángulos R_{ij} de dimensiones Δu y Δv. Luego la superficie S se divide en los parches correspondientes S_{ij} como en la figura 1. Evalúe f en un punto P_{ij}^* en cada parche, multiplique por el área ΔS_{ij} del parche, y forme la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

A continuación tome el límite como el número de aumentos de parches y defina la **integral de superficie de f sobre la superficie S** como



$$\boxed{1} \qquad \iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{m,\,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

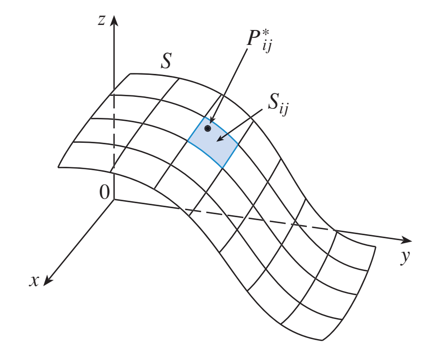


FIGURA 1

Observe la analogía con la definición de una integral de línea (16.2.2) y también la analogía con la definición de una integral doble (15.1.5).

Para evaluar la integral de superficie en la ecuación 1, aproxime el área de parche ΔS_{ij} por el área de un paralelogramo que se aproxima en el plano tangente. En el análisis del área de una superficie de la sección 16.6 hace la aproximación

$$\Delta S_{ij} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v$$

donde $$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$$

son los vectores tangente en el vértice de S_{ij}. Si las componentes son continuas y $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ no son cero y no son paralelas en el interior de D, se puede demostrar por la definición 1, incluso cuando D no es un rectángulo, que

■ Suponga que la superficie se cubre una sola vez cuando (u, v) abarca todo D. El valor de la integral de superficie no depende de la parametrización que se aplique.

2 $$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

Se debe comparar con la fórmula de una integral de línea:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

Observe que

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

La fórmula 2 permite evaluar una integral de superficie convirtiéndola en un integral doble sobre el dominio D del parámetro. Al usar esta fórmula, recuerde que $f(\mathbf{r}(u, v))$ se evalúa escribiendo $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ y $z = z(u, v)$ en la fórmula de $f(x, y, z)$.

EJEMPLO 1 Calcule la integral de superficie $\iint_S x^2\, dS$, donde S es esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 4 de la sección 16.6, se usa la representación paramétrica

$$x = \text{sen}\,\phi \cos\theta \qquad y = \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \qquad z = \cos\phi \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

es decir, $$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \text{sen}\,\phi \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$$

Al igual que en el ejemplo 10 de la sección 16.6, se calcula que

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \text{sen}\,\phi$$

Por lo tanto, de acuerdo con la fórmula 2,

■ Aquí se usan las identidades
$\cos^2\theta = _(1 + \cos 2\theta)$
$\text{sen}^2\phi = 1 - \cos^2\phi$
En lugar de esto, podría usar las fórmulas 64 y 67 de la tabla de integrales.

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\, dS &= \iint_D (\text{sen}\,\phi \cos\theta)^2\,|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} \text{sen}^2\phi \cos^2\theta\,\text{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \text{sen}^3\phi\, d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \int_0^{\pi} (\text{sen}\,\phi - \text{sen}\,\phi \cos^2\phi)\, d\phi \\
&= \tfrac{1}{2}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\Big]_0^{2\pi} \Big[-\cos\phi + \tfrac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$ □

Las integrales de superficie tienen aplicaciones parecidas a las de las integrales que ya trató. Por ejemplo, si una hoja delgada, de aluminio tiene la forma de una superficie

S y la densidad, masa por unidad de área, en el punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, entonces la **masa** total del la lámina es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS$$

y el **centro de masa** es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x, y, z)\, dS \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x, y, z)\, dS$$

Los momentos de inercia se pueden definir como antes (véase ejercicio 39).

GRÁFICAS

Cualquier superficie S con ecuación $z = g(x, y)$ se puede considerar como una superficie paramétrica con ecuaciones paramétricas

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y)$$

y así tiene

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

3 $$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

Por lo tanto, en este caso, la fórmula 2 se convierte en

4 $$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Se aplican fórmulas similares cuando es más conveniente proyectar S en el plano yz o en el xz. Por ejemplo, si S es una superficie cuya ecuación es $y = h(x, z)$ y D es su proyección en el plano xz, entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1}\, dA$$

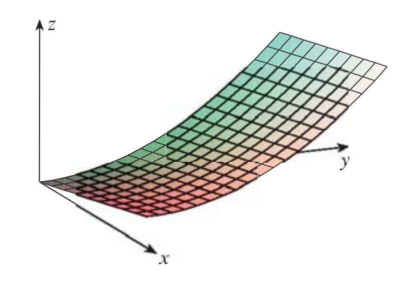


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_S y\, dS$, donde S es la superficie $z = x + y^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$ (véase figura 2).

SOLUCIÓN Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

la fórmula 4 da

$$\iint_S y\, dS = \iint_D y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 y\sqrt{1 + 1 + 4y^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 dx\, \sqrt{2} \int_0^2 y\sqrt{1 + 2y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{4}\right)\tfrac{2}{3}(1 + 2y^2)^{3/2}\Big]_0^2 = \frac{13\sqrt{2}}{3}$$

□

Si S es una superficie uniforme por segmentos, es decir, una unión finita de superficies suaves $S_1, S_2, \ldots, S_n$ que corta sólo a lo largo de sus fronteras, entonces la integral de superficie de f sobre S se define mediante

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\, dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\, dS$$

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_S z\, dS$, donde S es la superficie cuyos lados S_1 los define el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, cuyo fondo S_2 es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ en el plano $z = 0$, y cuya tapa S_3 es la parte del plano $z = 1 + x$ que queda arriba de S_2.

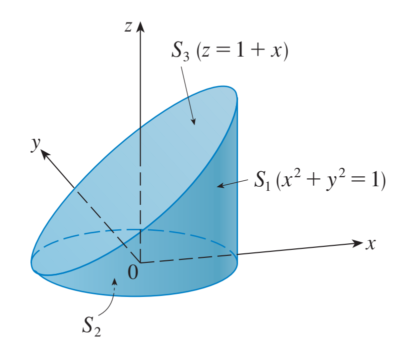
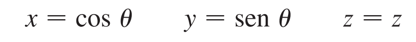


FIGURA 3

SOLUCIÓN La superficie S se ilustra en la figura 3. (Cambie la posición usual de los ejes para tener una mejor visión en S.) Para S_1 use θ y z como parámetros (véase ejemplo 5 de la sección 16.6) y exprese las ecuaciones paramétricas como



$$x = \cos\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta \qquad z = z$$

donde $\qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \qquad$ y $\qquad 0 \leqslant z \leqslant 1 + x = 1 + \cos\theta$

Por lo tanto,

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

y

$$|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Por consiguiente, la integral de superficie sobre S_1 es

$$\iint_{S_1} z\, dS = \iint_D z\,|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} z\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[1 + 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Puesto que S_2 queda en el plano $z = 0$

$$\iint_{S_2} z\, dS = \iint_{S_2} 0\, dS = 0$$

La superficie de la parte superior S_3 está sobre el disco unitario D y es parte del plano $z = 1 + x$. De este modo, si toma $g(x, y) = 1 + x$ de la fórmula 4 y la convierte a coordenadas polares, tiene

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} z\, dS &= \iint_D (1 + x)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\sqrt{1 + 1 + 0}\; r\, dr\, d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r + r^2\cos\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta \\
&= \sqrt{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S z\, dS &= \iint_{S_1} z\, dS + \iint_{S_2} z\, dS + \iint_{S_3} z\, dS \\
&= \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \left(\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\pi
\end{aligned}$$

□

SUPERFICIES ORIENTADAS

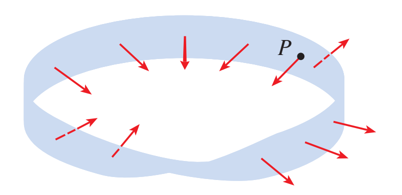
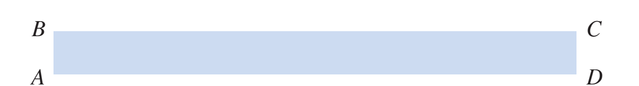


FIGURA 4
Cinta de Möbius

Con objeto de definir integrales de superficie de campos vectoriales, necesita regular las superficies que no se pueden orientar como la cinta de Möbius, que se muestra en la figura 4. Se le dio ese nombre en honor al geómetra alemán August Möbius (1790-1868). Usted mismo puede construir una con una larga tira de papel, luego le da media vuelta y pega los extremos como se indica en la figura 5. Si una hormiga caminara por la cinta de Möbius empezando en el punto P, finalizaría su recorrido en el *otro lado* de la tira (es decir, con su lado superior apuntando en la dirección opuesta). Entonces si la hormiga continúa su recorrido en la misma dirección, terminaría de nuevo en el punto P, pero arriba de él, sin haber brincado al otro lado. (Si usted ya tiene su cinta de Möbius, dibuje una línea por todo el centro de la cinta.) Por lo tanto, una cinta de Möbius tiene sólo un lado. Puede dibujar la cinta de Möbius mediante las ecuaciones paramétricas del ejercicio 32 de la sección 16.6.

TEC En Visual 16.7 se muestra una cinta de Möbius con un vector perpendicular que puede moverse a lo largo de la superficie.



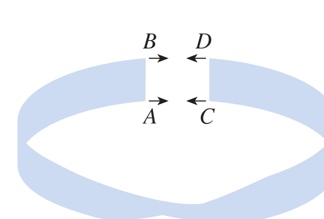
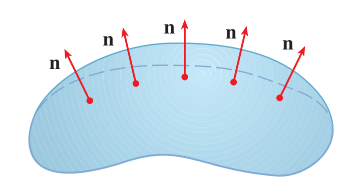


FIGURA 5
Construcción de una cinta de Möbius

FIGURA 6

De aquí en adelante, sólo se consideran superficies susceptibles de ser orientadas, es decir, que tengan dos lados. Inicie con una superficie S que tiene un plano tangente en cada punto (x, y, z) sobre S (excepto en cualquier punto de la frontera). Hay dos vectores unitarios normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$ en (x, y, z) (véase figura 6).

Si es posible elegir un vector unitario normal $\mathbf{n}$ en todos los puntos (x, y, z) de modo que $\mathbf{n}$ varíe continuamente sobre S entonces se dice que S es una **superficie orientada** y la elección dada de $\mathbf{n}$ proporciona a S una **orientación**. Hay dos orientaciones posibles para cualquier superficie que se puede orientar (véase figura 7).



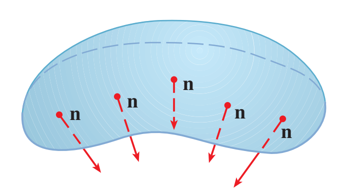


FIGURA 7
Las dos orientaciones de una superficie susceptible de orientar

En el caso de una superficie $z = g(x, y)$ dada como gráfica de g, use la ecuación 3 para asociar con la superficie una orientación natural dada por el vector unitario normal

5
$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

Puesto que la componente $\mathbf{k}$ es positiva, esto proporciona una orientación *hacia arriba* de la superficie.

Si S es una superficie uniforme y orientable dada en la forma paramétrica por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces automáticamente adquiere la orientación del vector unitario normal

6
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

y la orientación opuesta se consigue con $-\mathbf{n}$. Por ejemplo, en el ejemplo 4 de la sección 16.6 se determina la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Luego, en el ejemplo 10 de la sección 16.6, se determinó que

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi \, \mathbf{k}$$

y
$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = a^2 \operatorname{sen} \phi$$

De modo que la orientación inducida por $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ se define por medio del vector unitario normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta|} = \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + \cos \phi \, \mathbf{k} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi, \theta)$$

Observe que $\mathbf{n}$ señala en la misma dirección que el vector de posición, es decir, hacia fuera de la esfera (véase figura 9). La orientación opuesta, es decir (hacia adentro), se obtendría si invierte el orden de los parámetros (véase figura 9) porque $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$.

En el caso de una **superficie cerrada**, es decir, una superficie que es el límite de una región sólida E, la convención es que la **orientación positiva** es aquella para la cual los vectores normales *señalan hacia afuera* de E, y los normales que señalan hacia el interior dan la orientación negativa (véase figuras 8 y 9).

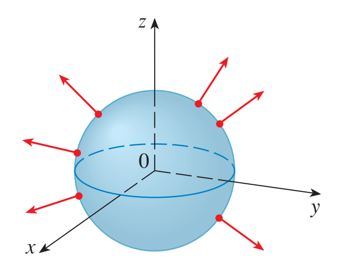


FIGURA 8
Orientación positiva

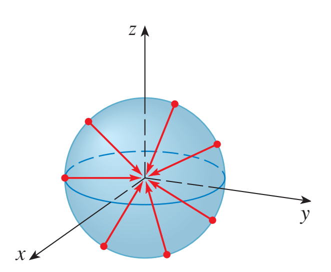


FIGURA 9
Orientación negativa

FIGURA 10

INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES

Suponga que S es una superficie orientada con un vector unitario normal $\mathbf{n}$, e imagine que hay un fluido de densidad $\rho(x, y, z)$ y campo de velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ que circula a través de S. (Piense que S es una superficie imaginaria que no impide el flujo de fluidos, tal como una red para pescar atravesada en un arroyo.) Entonces, el caudal (masa por unidad de tiempo) por unidad de área es $\rho\mathbf{v}$. Si divide S en pequeños parches S_{ij}, como en la figura 10 (compare con la figura 1), entonces S_{ij} es casi plana y puede aproximar la masa del fluido que atraviesa S_{ij} en la dirección de la normal $\mathbf{n}$ por unidad de tiempo mediante la cantidad

$$(\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A(S_{ij})$$

donde ρ, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$ se evalúan en algún punto de S_{ij}. (Recuerde que la componente del vector $\rho\mathbf{v}$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{n}$ es $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$.) Según la definición 1, luego de sumar estas cantidades y obtener el límite, el resultado es la integral de superficie de la función $\rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ sobre S:

7
$$\iint_S \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z)\, dS$$

y la interpretación física es el caudal que atraviesa S.

Si escribe $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{F}$ es también un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y la integral de la ecuación 7 se vuelve

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Una integral de superficie de esta forma se presenta con frecuencia en física, aun cuando $\mathbf{F}$ no es $\rho\mathbf{v}$, y se le llama *integral de superficie* o (*integral de flujo*), de $\mathbf{F}$ sobre S.

8 DEFINICIÓN Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo definido sobre una superficie orientada S con un vector unitario normal $\mathbf{n}$, entonces la **integral de superficie de F sobre *S*** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Esta integral también se denomina **flujo** de $\mathbf{F}$ a través de S.

En lenguaje común, la definición 8 establece que la integral de superficie de un campo vectorial en S es igual a la integral de superficie de su componente normal en S (como se definió antes).

Si S está definida por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$, entonces $\mathbf{n}$ está dada por la ecuación 6, y de acuerdo con la definición 8 y la ecuación 2

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, dS$$

$$= \iint_D \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

donde D es el dominio del parámetro. Por lo tanto

■ Compare la ecuación 9 con la expresión similar para evaluar las integrales de línea de campos vectoriales de la definición 16.2.13:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

9
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

■ En la figura 11 se ilustra el campo vectorial $\mathbf{F}$ del ejemplo 4 en puntos sobre la esfera unitaria.

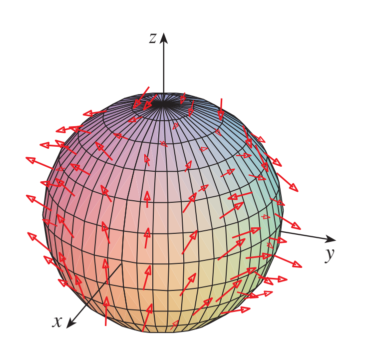


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ a través de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Al utilizar la representación paramétrica

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

tiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{k}$$

y, de acuerdo con el ejemplo 10 de la sección 16.6,

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi, \theta)) \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \cos\phi\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta$$

y, según la fórmula 9, el flujo es

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta)\, d\phi\, d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2\phi\cos\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta + \int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \\
&= 0 + \int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\, d\phi \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \qquad \left(\text{ya que } \int_0^{2\pi}\cos\theta\, d\theta = 0\right) \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

de acuerdo con el mismo cálculo del ejemplo 1. □

Por ejemplo, si el campo vectorial del ejemplo 4 es un campo de velocidades que describe el flujo de un fluido cuya densidad es 1, entonces la respuesta, $4\pi/3$, representa el caudal a través de la esfera unitaria en unidades de masa por unidad de tiempo.

En el caso de una superficie S dada por una gráfica $z = g(x, y)$, puede considerar a x y y como parámetros y use la ecuación 3 para escribir

$$\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (p\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

Entonces la fórmula 9 se convierte en

10
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA$$

Esta fórmula toma la orientación hacia arriba de S; para una orientación hacia abajo multiplique por -1. Es posible resolver fórmulas similares si S está dada por $y = h(x, z)$ o $x = k(y, z)$. (Véase ejercicios 35 y 36.)

V EJEMPLO 5 Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la frontera de la región sólida E encerrada por el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

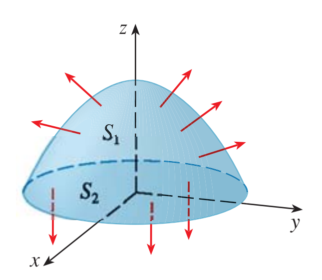


FIGURA 12

SOLUCIÓN La superficie S consiste en una superficie S_1 parabólica en la parte superior y una superficie S_2 circular en el fondo (véase figura 12). Como S es una superficie cerrada, use la convención de la orientación positiva (hacia afuera). Esto quiere decir que S_1 está orientada hacia arriba y que puede usar la ecuación 10 en donde D es la proyección de S_1 en el plano xy, a saber, el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Puesto que

$$P(x, y, z) = y \qquad Q(x, y, z) = x \qquad R(x, y, z) = z = 1 - x^2 - y^2$$

sobre S_1 y

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -2y$$

tiene

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \left(-P \frac{\partial g}{\partial x} - Q \frac{\partial g}{\partial y} + R \right) dA \\
&= \iint_D [-y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2]\, dA \\
&= \iint_D (1 + 4xy - x^2 - y^2)\, dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 4r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - r^2)\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3 + 4r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4} + \cos\theta \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \tfrac{1}{4}(2\pi) + 0 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

El disco S_2 está orientado hacia abajo, de modo que su vector normal unitario es $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ y tiene

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k})\, dS = \iint_D (-z)\, dA = \iint_D 0\, dA = 0$$

puesto que $z = 0$ sobre S_2. Finalmente, calcule por definición $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como la suma de las integrales de superficie de $\mathbf{F}$ sobre las piezas S_1 y S_2:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$ □

Aunque se introdujo la integral de superficie de un campo vectorial usando el ejemplo de flujo de fluidos, este concepto surge también en otras situaciones físicas. Por ejemplo, si $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico (véase ejemplo 5 de la sección 16.1), entonces la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

recibe el nombre de **flujo eléctrico** de $\mathbf{E}$ a través de la superficie S. Una de las leyes importantes de la electrostática es la **ley de Gauss**, la cual establece que la carga neta encerrada por medio de una superficie cerrada S es

11 $$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

donde ε_0 es una constante (que se denomina permitividad del espacio libre), y que depende de las unidades que se utilicen. (En el sistema SI, $\varepsilon_0 \approx 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N{\cdot}m^2}$.) Por lo tanto, si el campo vectorial **F** del ejemplo 4 representa un campo eléctrico, puede concluir que la carga encerrada por S es $Q = 4\pi\varepsilon_0/3$.

Otra aplicación de las integrales de superficie se encuentra en el estudio del flujo de calor. Suponga que la temperatura en un punto (x, y, z) de un cuerpo es $u(x, y, z)$. Entonces el **flujo de calor** se define como el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

donde K es una constante determinada en forma experimental que se llama **conductividad** de la sustancia. El flujo de calor a través de la superficie S en el cuerpo entonces lo define la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

V EJEMPLO 6 La temperatura u de una bola de metal es proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro de la misma. Determine el flujo de calor a través de una esfera S de radio a con centro en el centro de la bola.

SOLUCIÓN Tome el centro de la bola como el origen, entonces

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

donde C es la constante de proporcionalidad. Luego, el flujo de calor es

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

donde K es la conductividad del metal. En lugar de usar la parametrización usual de la esfera como en el ejemplo 4, observe que la normal unitaria hacia afuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el punto (x, y, z) es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

y entonces $$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Pero sobre S tiene $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, de modo que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Por lo tanto, el flujo de calor a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = -2aKC \iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$ □

16.7 EJERCICIOS

1. Sea S la superficie de frontera de la caja encerrada por los planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, y $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0.1(x+y+z)}\,dS$ usando una suma de Riemann como en la definición 1, tomando los parches S_{ij} como los rectángulos que son las caras de la caja S y los puntos P_{ij}^* como los centros de los rectángulos.

2. Una superficie S consiste en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, junto con sus discos de la parte superior y de la parte inferior. Suponga que f es una función continua con $f(\pm 1, 0, 0) = 2$, $f(0, \pm 1, 0) = 3$ y $f(0, 0, \pm 1) = 4$. Estime el valor de $\iint_S f(x, y, z)\,dS$ mediante una suma de Riemann; tome los parches S_{ij} como los cuatro cuartos de cilindro y los discos de la tapa y el fondo.

3. Sea H el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, y suponga que f es una función continua con $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ y $f(-3, -4, 5) = 12$. Dividiendo H entre cuatro parches estime el valor de $\iint_H f(x, y, z)\,dS$.

4. Suponga que $f(x, y, z) = g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, donde g es una función de una variable tal que $g(2) = -5$. Evalúe $\iint_S f(x, y, z)\,dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5–18 Evalúe la integral de superficie.

5. $\iint_S x^2yz\,dS$,
S es la parte del plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está situada encima del rectángulo $[0, 3] \times [0, 2]$.

6. $\iint_S xy\,dS$,
S es la región triangular con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$.

7. $\iint_S yz\,dS$,
S es la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante.

8. $\iint_S y\,dS$,
S es la superficie $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

9. $\iint_S yz\,dS$
S es la superficie con ecuaciones paramétricas $x = u^2$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u \cos v$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

10. $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dS$,
S es el helicoide con ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

11. $\iint_S x^2z^2\,dS$,
S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre los planos $z = 1$ y $z = 3$

12. $\iint_S z\,dS$,
S es la superficie $x = y + 2z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

13. $\iint_S y\,dS$,
S es la parte del paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 4$

14. $\iint_S y^2\,dS$
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba del plano xy

15. $\iint_S (x^2z + y^2z)\,dS$,
S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

16. $\iint_S xz\,dS$,
S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $x = 0$ y $x + y = 5$

17. $\iint_S (z + x^2y)\,dS$,
S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está entre los planos $x = 0$ y $x = 3$ en el primer octante

18. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$,
S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre los planos $z = 0$ y $z = 2$, junto con sus discos de arriba y de abajo.

19–28 Evalúe la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ y la superficie S orientada. En otras palabras, calcule el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S. En el caso de superficies cerradas, use la orientación positiva (hacia afuera).

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$, S es la parte del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está situado arriba del cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, y tiene orientación hacia arriba.

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, S es el helicoide del ejercicio 10 con orientación hacia arriba.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = xze^y\,\mathbf{i} - xze^y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S es la parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante y tiene orientación hacia abajo.

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^4\,\mathbf{k}$,
S es la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abajo del plano $z = 1$ con orientación hacia abajo.

23. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con orientación hacia el origen.

24. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geqslant 0$, orientadas en la dirección del eje y positivo.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$,
S consiste en el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, y el disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 4x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$, S es la superficie $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, con orientación hacia arriba

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$,
S es el cubo con vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$, S es la frontera de la región encerrada por el cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y los planos $y = 0$ y $x + y = 2$

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S es la frontera del semicilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del tetraedro con vértices (0,0, 0), (1, 0, 0), (0, 1,0), y (0, 0, 1)

CAS **31.** Evalúe $\iint_S xyz\,dS$ con cuatro cifras decimales, donde S es la superficie $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

CAS **32.** Calcule el valor exacto de $\iint_S x^2yz\,dS$, donde S es la superficie del ejercicio 31.

CAS **33.** Calcule el valor de $\iint_S x^2y^2z^2\,dS$ con una aproximación de cuatro cifras decimales, donde S es la parte del paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que queda por arriba del plano xy.

CAS **34.** Encuentre el flujo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{i} + z^2e^{x/5}\,\mathbf{k}$$

a través de la parte del cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que se localiza arriba del plano xy y entre los planos $x = -2$ y $x = 2$ con orientación hacia arriba. Dibuje el cilindro y el campo vectorial en la misma pantalla mediante un sistema algebraico computacional.

35. Plantee una fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ similar a la fórmula 10 para el caso donde S está dada por $y = h(x, z)$ y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria que señala hacia la izquierda.

36. Encuentre una fórmula $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ similar a la fórmula 10 para el caso donde S está dada por $x = k(y, z)$ y $\mathbf{n}$ es la normal unitaria que señala hacia adelanta (el espectador cuando los ejes sedibujan en la manera usual.)

37. Determine el centro de masa del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, si tiene densidad constante.

38. Determine la masa de un embudo delgado con forma de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, si la función de densidad es $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

39. (a) Plantee una integral para el momento de inercia I_z con respecto al eje z de una lámina en la forma de una superficie S si la función de densidad es ρ.
(b) Calcule el momento de inercia con respecto al eje z del embudo del ejercicio 38.

40. Sea S la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está arriba del plano $z = 4$. Si S tiene densidad constante k, encuentre (a) el centro de masa y (b) el momento de inercia alrededor del eje z.

41. Un fluido tiene densidad de 870 kg/m^3 y fluye con velocidad $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, donde x, y, y z se miden en metros y las componentes de $\mathbf{v}$ en metros por segundo. Encuentre el gasto hacia afuera a través del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

42. El agua de mar tiene densidad de 1 025 kg/m^3 y fluye con un campo de velocidad $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, donde x, y, y z se miden en metros y las componentes de $\mathbf{v}$ en metros por segundo. Encuentre el gasto hacia fuera por la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$.

43. Aplique la ley de Gauss para calcular la carga contenida en el hemisferio sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

44. Mediante la ley de Gauss, calcule la carga encerrada en el cubo de vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ si el campo eléctrico es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}.$$

45. La temperatura en el punto (x, y, z) en una sustancia con conductividad $K = 6.5$ es $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Calcule el flujo de calor hacia adentro a través de la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

46. La temperatura en un punto de una bola cuya conductividad K es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola. Calcule el flujo de calor a través de una esfera S de radio a con centro en el centro de la bola.

47. Sea $\mathbf{F}$ un campo cuadrado inverso, es decir, $\mathbf{F}(r) = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ para alguna constante c, donde $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Demuestre que el flujo de $\mathbf{F}$ por una esfera S con centro en el origen es independiente del radio de S.

16.8 TEOREMA DE STOKES

Se puede considerar que el teorema de Stokes es una versión para varias dimensiones del teorema de Green. Éste relaciona una integral doble en una región D plana con una integral de línea alrededor de su curva frontera plana, y el teorema de Stokes relaciona una integral de superficie sobre una superficie S con una integral de línea alrededor de la curva

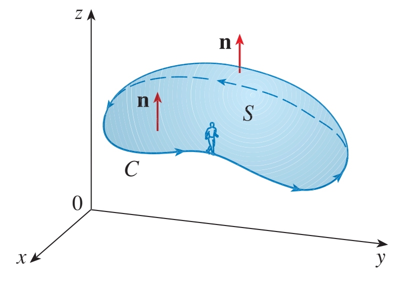
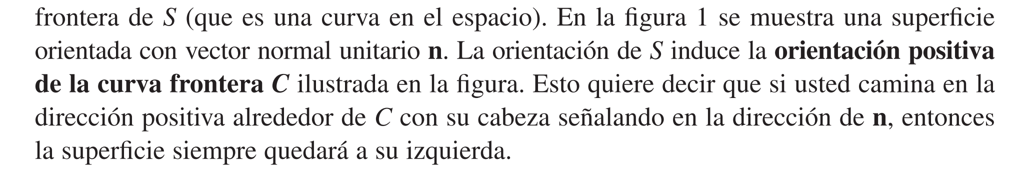


FIGURA 1

■ El teorema de Stokes lleva este nombre en honor al fisicomatemático irlandés sir George Stokes (1819-1903). Stokes era maestro en la Universidad de Cambridge (de hecho, tuvo el mismo puesto que Newton, Profesor Lucasiano de Matemática; fue notable su trabajo sobre flujo de fluidos y sobre la luz. Lo que ahora se conoce teorema de Stokes, fue descubierto en realidad por el físico escocés sir William Thomson (1824-1907, conocido mejor como Lord Kelvin). Stokes supo de este teorema por una carta de Thomson de 1850, y pidió a sus alumnos que lo demostraran en un examen en la Universidad de Cambridge en 1854. No se sabe si alguno de los estudiantes fue capaz de hacerlo.


frontera de S (que es una curva en el espacio). En la figura 1 se muestra una superficie orientada con vector normal unitario $\mathbf{n}$. La orientación de S induce la **orientación positiva de la curva frontera C** ilustrada en la figura. Esto quiere decir que si usted camina en la dirección positiva alrededor de C con su cabeza señalando en la dirección de $\mathbf{n}$, entonces la superficie siempre quedará a su izquierda.

TEOREMA DE STOKES Sea S una superficie uniforme por segmentos y orientada que está acotada por una curva C suave por segmentos, simple y cerrada con orientación positiva. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta en $\mathbb{R}^3$ que contiene a S. Entonces,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Puesto que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad \text{y} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

El teorema de Stokes establece que la integral de línea alrededor de la curva frontera de S de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de $\mathbf{F}$.

La curva orientada en forma positiva de la superficie orientada S se escribe a menudo como ∂S, de modo que el teorema de Stokes se puede expresar como

$$\boxed{1} \qquad \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Hay una analogía entre el teorema de Stokes, el teorema de Green y el teorema fundamental del cálculo. Como antes, hay una integral con derivadas en el primer miembro de la ecuación 1 (recuerde que rot $\mathbf{F}$ es una clase de derivada de $\mathbf{F}$) y el segundo miembro contiene los valores de $\mathbf{F}$ sólo en la *frontera* de S.

En efecto, en el caso especial donde la superficie S es plana y queda en el plano xy con orientación hacia arriba, la normal unitaria es $\mathbf{k}$, la integral de superficie se vuelve una integral doble, y el teorema de Stokes se transforma en

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Esto es precisamente la forma vectorial del teorema de Green dado en la ecuación 16.5.12. Por lo tanto, el teorema de Green es realmente un caso especial del teorema de Stokes.

Aunque es muy difícil demostrar totalmente el teorema de Stokes, puede dar una demostración cuando S es una gráfica y $\mathbf{F}$, S y C se comportan muy bien.

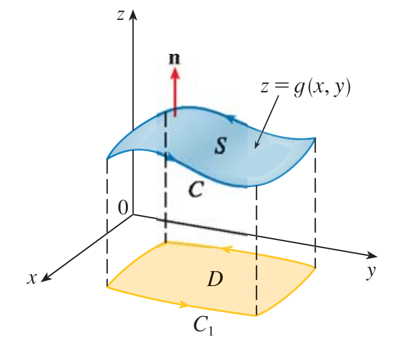


FIGURA 2

DEMOSTRACIÓN DE UN CASO ESPECIAL DEL TEOREMA DE STOKES Suponga que la ecuación de S es $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde g tiene derivadas parciales continuas de segundo orden y D es una región simple del plano cuya curva frontera C_1 corresponde a C. Si la orientación de S es hacia arriba, entonces la orientación positiva de C corresponde a la orientación positiva de C_1 (véase figura 2). Sabe que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, donde las derivadas parciales de P, Q y R son continuas.

Puesto que S es una gráfica de una función, puede aplicar la fórmula 16.7.10 en donde **F** está reemplazado por rot **F**. El resultado es

2
$$\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA$$

donde las derivadas parciales de P, Q y R se evalúan en $(x, y, g(x, y))$. Si

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

es una representación paramétrica de C_1, entonces una representación paramétrica de C es

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = g(x(t), y(t)) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Con ayuda de la regla de la cadena, esto permite evaluar la integral de línea como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right) dt \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \\
&= \int_a^b \left[\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right] dt \\
&= \int_{C_1} \left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] dA
\end{aligned}$$

donde se aplica el teorema de Green en el último paso. Luego, al aplicar otra vez la regla de la cadena y al recordar que P, Q y R son funciones de x, y y z y que la misma z es una función de x y y, obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Bigg[&\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + R\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) \\
&- \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + R\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right)\Bigg] dA
\end{aligned}$$

Cuatro de los términos en esta integral doble se cancelan y los restantes seis términos se pueden acomodar para que coincida el segundo miembro de la ecuación 2. Por lo tanto,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

□

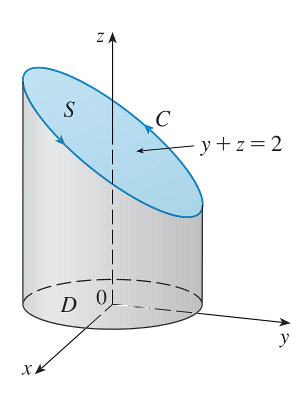


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ y C es la curva de intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (La orientación de C es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde arriba.)

SOLUCIÓN La curva C (una elipse) se ilustra en la figura 3. Aunque $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se puede evaluar en forma directa, es más fácil aplicar el Teorema de Stokes. Primero calcule

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\,\mathbf{k}$$

Aunque hay muchas superficies cuyo límite es C, la elección más conveniente es la región elíptica S en el plano $x + z = 2$ que está acotada por C. Si orienta a S hacia arriba, entonces C tiene la orientación positiva inducida. La proyección D de S en el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ por lo que al aplicar la ecuación 16.7.10 con $z = g(x, y) = 2 - y$, tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1 + 2y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + 2r \operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + 2\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}(2\pi) + 0 = \pi$$

□

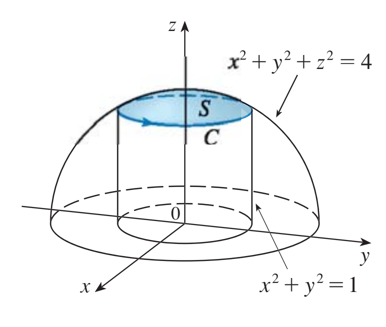


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Mediante el teorema de Stokes, calcule la integral $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está situada en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y encima del plano xy (véase figura 4).

SOLUCIÓN Para determinar la curva frontera C resuelva las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 1$. Al efectuar una diferencia, obtiene $z^2 = 3$ y entonces $z = \sqrt{3}$ porque $z > 0$. Por lo tanto, C es el ciclo dado por las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$. Una ecuación vectorial de C es

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

de este modo, $\qquad \mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$

Además, tiene

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t \cos t\right) dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$$

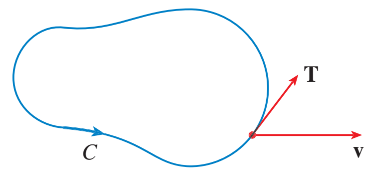
□

Observe que en el ejemplo 2 se evaluó una integral de superficie simplemente con el conocimiento de los valores de **F** en la curva frontera C. Esto significa que otra superficie orientada con la misma curva frontera C, entonces ¡obtiene exactamente el mismo valor para la integral de superficie!

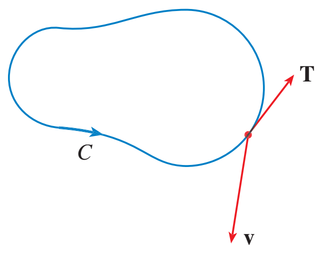
En general, si S_1 y S_2 son superficies orientadas con la misma curva frontera orientada C, y ambas cumplen con las hipótesis del teorema de Stokes, entonces

3
$$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Este hecho es útil cuando es difícil integrar sobre una superficie, pero es fácil integrar en la otra.



(a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulación positiva



(b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulación negativa

FIGURA 5

Enseguida aplique el teorema de Stokes para dilucidar el significado del vector rotacional. Suponga que C es una curva cerrada orientada y **v** representa el campo de velocidad en un flujo de fluidos. Considere la integral de línea

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \, ds$$

y recuerde que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$ es la componente de **v** en la dirección del vector unitario tangente **T**. Esto quiere decir que, a medida que es más cercana la dirección de **v** a la dirección de **T**, es más grande el valor de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$. Por lo tanto, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ es una medida de la tendencia del fluido a moverse alrededor de C y se llama **circulación** de **v** alrededor de C (véase figura 5).

Ahora, sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el fluido y sea S_a un disco pequeño con radio a y centro P_0. Entonces $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos los puntos P en S_a porque rot **F** es continua. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de Stokes, obtiene la aproximación siguiente a la circulación alrededor del círculo frontera C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

■ Imagine una pequeñísima rueda de paletas en el fluido en un punto P, como en la figura 6; la rueda gira más rápido cuando su eje es paralelo a rot **v**.

Esta aproximación es mejor cuando $a \to 0$ y entonces

4
$$\text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

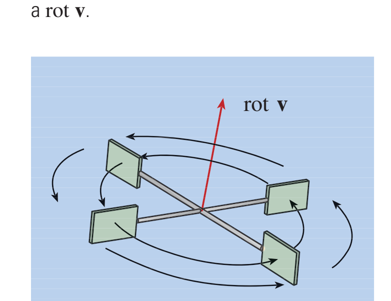


FIGURA 6

La ecuación 4 da la relación entre el rotacional y la circulación. Se demuestra que $\text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ es una medida del efecto de giro del fluido con respecto al eje **n**. El efecto de rotación es mayor con respecto al eje paralelo a rot **v**.

Por último, el teorema de Stokes se puede usar para demostrar el teorema 16.5.4 (que establece que si $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre la totalidad de $\mathbb{R}^3$, entonces **F** es conservativo). A partir del trabajo anterior (teoremas 16.3.3 y 16.3.4) sabe que **F** es conservativo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C. Dada C, suponga que puede determinar una superficie orientable S cuya frontera es C. (Esto se puede hacer, pero la demostración requiere técnicas avanzadas.) Entonces, el teorema de Stokes da como resultado

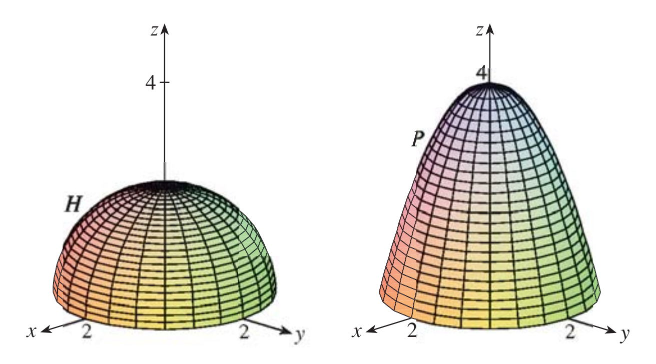
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Una curva que no es simple se puede descomponer en una cantidad de curvas simples, y las integrales alrededor de estas curvas simples son todas iguales a 0. Al sumar las integrales obtiene $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cualquier curva cerrada C.

16.8 EJERCICIOS

1. Se presentan un hemisferio H y una parte P de un paraboloide. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas. Explique por qué

$$\iint_H \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$



2–6 Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \text{rot}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\cos z\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + xe^y\,\mathbf{k}$, S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$, orientada hacia arriba.

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^2\,\mathbf{i} + y^2z^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada hacia arriba

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y^3z\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, S es la parte del cono $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre los planos $y = 0$ y $y = 3$, orientada en la dirección del eje y positivo.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$, S consiste en la parte superior o tapa y los cuatro lados (pero no el fondo) del cubo, con vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, orientado hacia afuera [*Sugerencia*: Use ecuaciones 3.]

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\cos z\,\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, S es el hemisferio $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, orientado en la dirección del eje x positivo [*Sugerencia*: aplique la ecuación 3.]

7–10 Mediante el teorema de Stokes evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. En cada caso C está orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj como si se viera desde arriba.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$, C es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x}\,\mathbf{i} + e^x\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$, C es la frontera de la parte del plano $2x + y + 2z = 2$ en el primer octante.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$, C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$, C es la curva de intersección del plano $x + z = 5$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

y C es la curva de la intersección entre el plano $x + y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ con orientación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj como si se viera desde arriba.

(b) Dibuje tanto el plano como el cilindro con dominios elegidos de tal modo que pueda ver la curva C y la superficie que usó en el inciso (a).

(c) Plantee ecuaciones paramétricas para C, y con ellas dibuje C.

12. (a) Mediante el teorema de Stokes evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ y C es la curva de la intersección entre el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con orientación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj como si se viera desde arriba.

(b) Dibuje tanto el paraboloide hiperbólico como el cilindro con dominios elegidos de tal modo que pueda ver la curva C y la superficie que usó en el inciso (a).

(c) Plantee ecuaciones paramétricas para C, y con ellas dibuje C.

13–15 Verifique que se cumple el teorema de Stokes en el caso del campo vectorial dado $\mathbf{F}$ y la superficie S.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$, S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se localiza abajo del plano $z = 1$, con orientación hacia arriba.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, S es la parte del plano $2x + y + z = 2$ que se encuentra en el primer octante con orientación hacia arriba.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$, S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$, orientado en la dirección del eje positivo x.

16. Sea C una curva suave, cerrada y sencilla que está en el plano $x + y + z = 1$. Demuestre que la integral de línea

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

depende sólo del área de la región encerrada por C y no de la forma de C o su ubicación en el plano.

17. Una partícula se mueve a lo largo de segmentos de recta desde el origen hasta los puntos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$, y regresa al origen bajo la influencia del campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

Encuentre el trabajo realizado.

18. Evalúe

$$\int_C (y + \text{sen}\, x)\, dx + (z^2 + \cos y)\, dy + x^3\, dz,$$

donde C es la curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, t, \cos t, \text{sen}\, 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

[*Sugerencias:* observe que C queda en la superficie $z = 2xy$.]

19. Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ satisface la hipótesis del teorema de Stokes, demuestre que $\iint_S \text{rot}\, \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponga que S y C cumplen con las hipótesis del teorema de Stokes y f, g tienen derivadas parciales continuas de segundo orden. Mediante los ejercicios 24 y 26 de la sección 16.5, demuestre lo siguiente.

(a) $\int_C (f\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

REDACCIÓN DE PROYECTO

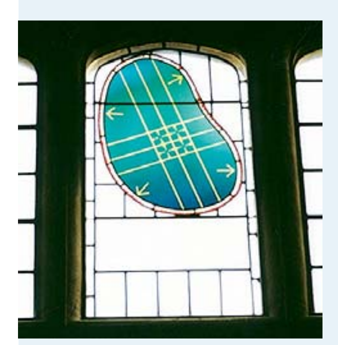
TRES HOMBRES Y DOS TEOREMAS

Dos de los teoremas más importantes del cálculo vectorial llevan el nombre de George Green y George Stokes, pero hubo un tercer hombre, William Thomson, conocido como Lord Kelvin, que desempeñó un gran papel en la formulación, difusión y aplicación de ambos teoremas. Los tres hombres estuvieron interesados en cómo los dos teoremas podrían ayudar a explicar y predecir el fenómeno físico de la electricidad y el magnetismo y el flujo de fluidos. Los hechos básicos de la historia se proporcionan en las notas al margen de las páginas 1056 y 1093.

Escriba un trabajo sobre los orígenes históricos del teorema de Green y el teorema de Stokes. Explique las similitudes y las correspondencias entre los teoremas. Analice el papel que Green, Thomson y Stokes desempeñaron en el descubrimiento de estos teoremas y en la difusión amplia de ellos. Muestre la manera como ambos teoremas surgieron de la investigación sobre la electricidad y el magnetismo, y cómo fueron usados posteriormente como un medio para estudiar una gran variedad de problemas físicos.

El diccionario que compiló Gillispie [2] es una buena fuente tanto de información biográfica como científica. El libro de Hutchinson [5] proporciona un recuento de la vida de Stokes, y el libro de Thompson [8] es una biografía de Lord Kelvin. Los artículos de Grattan-Guinness [3] y Gray [4] y el libro de Cannell [1] dan el panorama de la extraordinaria vida y obras de Green. Más información histórica y matemática se encuentra en los libros de Katz [6] y Kline [7].

■ En la fotografía se muestra una ventana de vidrio coloreado de la Cambridge University en honor a George Green.



Cortesía de Masters and Fellows of Gonville and Caius College, University of Cambridge, Inglaterra

1. D. M. Cannell, *George Green, Mathematician and Physicist 1793-1841: The Background to His Life and Work* (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001).
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Green que preparó P. J. Wallis en el volumen XV y los artículos sobre Thomson que elaboró Jed Buchwald y acerca de Stokes que escribió E. M. Parkinson en el volumen XIII.
3. I. Grattan-Guinness, "Why did George Green write his essay of 1828 on electricity and magnetism?" *Amer. Math. Monthly*, Vol. 102 (1995), pp. 387-396.
4. J. Gray, "There was a jolly miller". *The New Scientist*, Vol. 139 (1993), pp. 24–27.
5. G. E. Hutchinson, *The Enchanted Voyage and Other Studies* (Westport Conn.: Greenwood Press, 1978).
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: HarperCollins, 1993), pp. 678-680.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 683-685.
8. Sylvanus P. Thompson, *The Life of Lord Kelvin* (Nueva York: Chelsea, 1976).

www.stewartcalculus.com
La internet es otra fuente de información para este proyecto. Dé clic en *History of Mathematics*, siga las ligas hasta el sitio de St. Andrew's y de ahí a la British Society for History of Mathematics.

16.9 TEOREMA DE LA DIVERGENCIA

En la sección 16.5 está expresado el teorema de Green en la versión vectorial como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y)\, dA$$

donde C es la curva frontera orientada en la dirección positiva de la región D del plano. Si estuviera tratando de generalizar este teorema a los campos vectoriales sobre $\mathbb{R}^3$, podría plantear la conjetura de que

1
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z)\, dV$$

donde S es la superficie frontera de la región sólida E. Resulta que la ecuación 1 es cierta, con las hipótesis adecuadas, y se llama teorema de la divergencia. Observe su similitud con el teorema de Green y el teorema de Stokes: este teorema relaciona la integral de una derivada de una función (div $\mathbf{F}$ en este caso) en una región con la integral de la función original $\mathbf{F}$ en la frontera de la región.

En esta etapa usted podría querer revisar los distintos tipos de regiones en las cuales es capaz de evaluar integrales triples de la sección 15.6. Plantee y demuestre el teorema de divergencia para regiones E que son simultáneamente de los tipos 1, 2 y 3 llamadas **regiones sólidas simples**. (Por ejemplo, las regiones acotadas por elipsoides o cajas rectangulares son de este tipo.) La frontera de E es una superficie cerrada, y use la convención de la sección 16.7, según la cual la orientación positiva es hacia afuera, es decir, el vector normal unitario $\mathbf{n}$ se dirige hacia afuera desde E.

■ El teorema de la divergencia se llama a veces teorema de Gauss en honor al matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien descubrió este teorema durante su investigación sobre electrostática. En Europa del Este, el teorema de la divergencia se conoce con el nombre de teorema de Ostrogradsky, en honor al matemático ruso Mikhail Ostrogradsky (1801-1862), quien publicó este resultado en 1826.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA Sea E una región sólida simple y S la superficie frontera de E, definida con orientación positiva (hacia afuera). Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene E. Entonces,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$$

Por consiguiente, el teorema de la divergencia plantea que bajo las condiciones dadas, el flujo de $\mathbf{F}$ en el límite de la superficie es igual a la integral triple de la divergencia de $\mathbf{F}$ sobre E.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$. Entonces

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

de modo que $$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Si $\mathbf{n}$ es el normal unitario hacia afuera de S, entonces la integral de superficie en el lado izquierdo o del teorema de la divergencia es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Por lo tanto, para demostrar el teorema de la divergencia, es suficiente demostrar las tres ecuaciones siguientes:

2 $$\iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV$$

3 $$\iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV$$

4 $$\iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV$$

Para demostrar la ecuación 4, recurra al hecho de que E es una región tipo 1:

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y)\}$$

donde D es la proyección de E en el plano xy. De acuerdo con la ecuación 15.6.6, tiene

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)\, dz \right] dA$$

y, por tanto, según el teorema fundamental del cálculo,

5 $$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))]\, dA$$

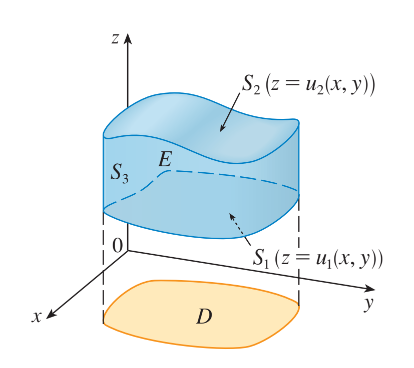


FIGURA 1

La superficie frontera S consiste en tres partes: la superficie del fondo S_1, la superficie de la tapa S_2 y posiblemente una superficie vertical S_3, la cual se ubica encima de la curva frontera de D (véase figura 1. Podría ocurrir que S_3 no aparezca, como en el caso de una esfera). Observe que en S_3 tiene $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, porque $\mathbf{k}$ es vertical y $\mathbf{n}$ es horizontal, y así

$$\iint_{S_3} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_3} 0\, dS = 0$$

Por esto, sin que importe si hay una superficie vertical, puede escribir

6 $$\iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

La ecuación de S_2 es $z = u_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, y la normal $\mathbf{n}$ hacia afuera señala hacia arriba, de modo que de la ecuación 16.7.10 (en la que $R\,\mathbf{k}$ reemplaza a $\mathbf{F}$), tiene

$$\iint_{S_2} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\, dA$$

En S_1 tiene $z = u_1(x, y)$, pero en este caso la normal $\mathbf{n}$ hacia afuera señala hacia abajo, de modo que multiplique por -1:

$$\iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_D R(x, y, u_1(x, y))\,dA$$

Por lo tanto, la ecuación 6 da como resultado

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D [R(x, y, u_2(x, y)) - R(x, y, u_1(x, y))]\,dA$$

Al comparar con la ecuación 5 llega a que

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$$

■ Observe que este método de demostración del teorema de la divergencia es muy parecido al del teorema de Green.

Las ecuaciones 2 y 3 se demuestran en forma similar usando las expresiones para E como una región tipo 2 o tipo 3, respectivamente. □

V EJEMPLO 1 Determine el flujo del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ sobre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

SOLUCIÓN Primero calcule la divergencia de $\mathbf{F}$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$$

La esfera unitaria S es la frontera de la bola unitaria B definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$. En estos términos, el teorema de la divergencia da el flujo como

■ La solución del ejemplo 1 se debe comparar con la solución del ejemplo 4 de la sección 16.7.

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iiint_B 1\,dV = V(B) = \tfrac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$ □

V EJEMPLO 2 Evalúe $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\mathbf{j} + \text{sen}(xy)\,\mathbf{k}$$

y S es la superficie de la región E acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ y $y + z = 2$ (véase figura 2).

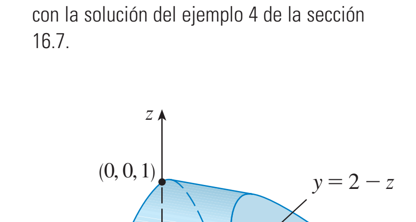


FIGURA 2

SOLUCIÓN Sería difícil en extremo evaluar en forma directa la integral de superficie. (Tendría que evaluar cuatro integrales de superficie correspondientes a las cuatro partes de S.) Además, la divergencia de $\mathbf{F}$ es mucho menos complicada que la misma $\mathbf{F}$:

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\text{sen}\,xy) = y + 2y = 3y$$

Por lo tanto, aplique el teorema de la divergencia para transformar la integral de superficie dada en una integral triple. La manera más fácil de evaluar la integral triple, es expresar E como una región tipo 3:

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - x^2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\}$$

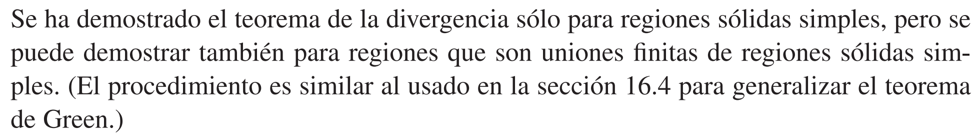
En tal caso

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_E 3y\, dV$$

$$= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} y\, dy\, dz\, dx = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\frac{(2-z)^2}{2}\, dz\, dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx = -\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right] dx$$

$$= -\int_{0}^{1}(x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)\, dx = \tfrac{184}{35}$$ □


Se ha demostrado el teorema de la divergencia sólo para regiones sólidas simples, pero se puede demostrar también para regiones que son uniones finitas de regiones sólidas simples. (El procedimiento es similar al usado en la sección 16.4 para generalizar el teorema de Green.)

Por ejemplo, considere la región E que se ubica entre las superficies cerradas S_1 y S_2, donde S_1 queda en el interior de S_2. Sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ las normales hacia afuera de S_1 y S_2. Por lo tanto, la superficie frontera de E es $S = S_1 \cup S_2$ y su normal $\mathbf{n}$ es $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ sobre S_1 y $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ sobre S_2 (véase figura 3). Al aplicar el teorema de la divergencia a S obtiene

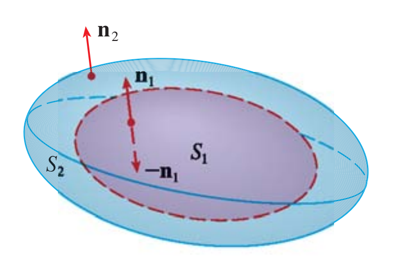


FIGURA 3

7
$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2\, dS$$

$$= -\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

Aplique lo anterior al campo eléctrico (véase ejemplo 5 de la sección 16.1):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$$

donde S_1 es una esfera pequeña de radio a y centro en el origen. Usted puede comprobar que div $\mathbf{E} = 0$ (véase ejercicio 23). Por lo tanto, la ecuación 7 da como resultado

$$\iint_{S_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Lo importante de este cálculo es que podemos evaluar la integral de superficie sobre S_1 porque S_1 es una esfera. El vector unitario normal en $\mathbf{x}$ es $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Por lo tanto,

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

ya que la ecuación de S_1 es $|\mathbf{x}| = a$. Debido a eso

$$\iint_{S_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS$$

$$= \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Esto muestra que el flujo eléctrico de $\mathbf{E}$ es $4\pi\varepsilon Q$ a través de *cualquier* superficie cerrada S_2 que contiene el origen. [Es un caso especial de la ley de Gauss (ecuación 16.7.11) para una carga sencilla. La correspondencia entre ε y ε_0 es $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Otro campo en el que se puede aplicar el teorema de la divergencia, es en el flujo de fluidos. Sea $\mathbf{v}(x, y, z)$ el campo de velocidad de un fluido con densidad constante ρ. Por lo tanto, $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ es el caudal por unidad de área. Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto en el fluido y B_a es una bola con centro P_0 y radio muy pequeño a, en tal caso $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ para todos los puntos en B_a porque div **F** es continua. El valor del flujo sobre la esfera S_a frontera se aproxima como sigue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)\, dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Esta aproximación es mejor cuando $a \to 0$ y hace pensar que

$$\boxed{8} \qquad \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

La ecuación 8 establece que div $\mathbf{F}(P_0)$ es el flujo neto que sale por unidad de volumen en P_0. (Ésta es la razón del nombre *divergencia*.) Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$, el flujo neto cerca de P es hacia afuera y se dice entonces que P es una **fuente**. Si $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$, el flujo neto es hacia adentro en la vecindad de P y se dice que éste es un **sumidero**.

Al parecer, en el caso del campo vectorial de la figura 4, los vectores que terminan en las cercanías de P_1 son más cortos que los vectores que empiezan cerca de P_1. Por esto, el flujo neto es hacia afuera en la vecindad de P_1, de modo que $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_1) > 0$, por lo que P_1 es una fuente. Por lo contrario, las flechas que entran cerca de P_2 son más largas que las flechas que salen. En este caso, el flujo neto es hacia adentro, de modo que $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_2) < 0$ y P_2 es un sumidero. Puede utilizar la fórmula para **F** con el fin se confirmar esta impresión. Puesto que $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2x + 2y$, la cual es positiva cuando $y > -x$. Por eso los puntos por arriba de la recta $y = -x$ son fuentes, y los que se encuentran abajo son sumideros.

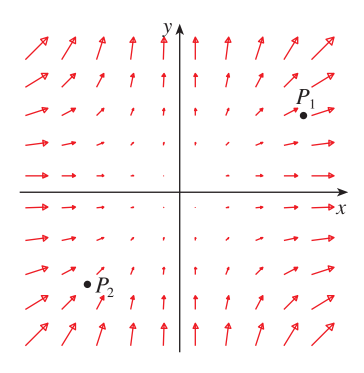


FIGURA 4
El campo vectorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

16.9 EJERCICIOS

1–4 Compruebe que el teorema de la divergencia es válido para el campo vectorial **F** de la región E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$,
E es el cubo limitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
E es el sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
E es el cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
E es la bola unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

5–15 Mediante el teorema de la divergencia, calcule la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; es decir, calcule el flujo de **F** a través de S.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$,
S es la superficie de la caja delimitada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 2$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + xz^4\,\mathbf{k}$,
S es la superficie de la caja con vértices $(\pm1, \pm2, \pm3)$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = -1$ y $x = 2$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y\,\mathbf{i} - x^2y^2\,\mathbf{j} - x^2yz\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido delimitado por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y los planos $z = -2$ y $z = 2$.

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \operatorname{sen} z\,\mathbf{i} + \cos(xz)\,\mathbf{j} + y \cos z\,\mathbf{k}$,
S es el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del tetraedro limitado por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + 2y + z = 2$

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2z)\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$,
S es la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = x + 2$ y $z = 0$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x^3z\,\mathbf{i} + 4y^3z\,\mathbf{j} + 3z^4\,\mathbf{k}$,
S es la esfera con radio R y centro en el origen.

14. $\mathbf{F} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, donde $r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, S está formado por la semiesfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ en el plano xy.

CAS **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \tan z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$, S es la superficie del sólido que se sitúa por arriba del plano xy y abajo de la superficie $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

CAS **16.** Con ayuda de un sistema algebraico computacional, dibuje el campo vectorial
$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$
en el cubo cortado en el primer octante por los planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ y $z = \pi/2$. Luego calcule el flujo que pasa a través de la superficie del cubo.

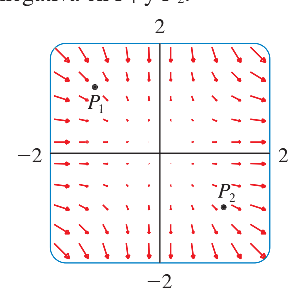
17. Mediante el teorema de la divergencia, evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 x\,\mathbf{i} + \left(\tfrac{1}{3}y^3 + \tan z\right)\mathbf{j} + (x^2 z + y^2)\,\mathbf{k}$$

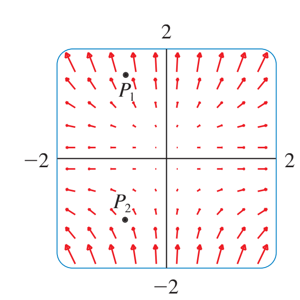
y S es la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Sugerencia:* observe que S no es una superficie cerrada. Primero determine las integrales sobre S_1 y S_2, donde S_1 es el disco $x^2 + y^2 \leq 1$, con orientación hacia abajo, y $S_2 = S \cup S_1$.]

18. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = z \tan^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine el flujo de $\mathbf{F}$ que pasa a través del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que se sitúa encima del plano $z = 1$ y está orientado hacia arriba.

19. Se muestra un campo vectorial $\mathbf{F}$. Utilice la interpretación de divergencia deducida en esta sección para determinar si div $\mathbf{F}$ es positiva o negativa en P_1 y P_2.



20. (a) ¿Son fuentes o sumideros los puntos P_1 y P_2 para el campo vectorial $\mathbf{F}$ mostrado en la figura? Proporcione una explicación con base sólo en la figura.
(b) Puesto que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, aplique la definición de divergencia para comprobar su respuesta al inciso (a).



CAS **21–22** Trace el campo vectorial y calcule div $\mathbf{F} > 0$ y donde div $\mathbf{F} < 0$. A continuación calcule div $\mathbf{F}$ para verificar su cálculo.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$

22. $F(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

23. Compruebe que div $\mathbf{E} = 0$ para el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}$.

24. Mediante el teorema de la divergencia evalúe $\iint_S (2x + 2y + z^2)\,dS$ donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25–30 Demuestre cada una de las identidades, suponiendo que S y E cumplen con las condiciones del Teorema de la Divergencia y que las funciones escalares y las componentes de los campos vectoriales tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante

26. $V(E) = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

28. $\iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS = \iiint_E \nabla^2 f\,dV$

29. $\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV$

30. $\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV$

31. Suponga que S y E cumplen con las condiciones del teorema de la divergencia y f es una función escalar cuyas derivadas parciales son continuas. Demuestre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

Esta superficie y las integrales triples de funciones vectoriales son vectores definidos por la integración de cada una de las funciones componentes. [*Sugerencia:* inicie aplicando el Teorema de la Divergencia a $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario.]

32. Un sólido ocupa una región E, su superficie es S y está inmerso en un líquido de densidad constante ρ. Prepare un sistema de coordenadas de modo que el plano xy coincida con la superficie del líquido y los valores positivos de z se midan hacia abajo dentro del líquido. Luego, la presión a la profundidad z es $p = \rho g z$, donde g es la aceleración de la gravedad (véase sección 6.5). La fuerza de flotación total sobre el sólido debido a la distribución de la presión se define con la integral de superficie

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\mathbf{n}\,dS$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior. Use el resultado del ejercicio 31 para demostrar que $\mathbf{F} = -W\mathbf{k}$, donde W es el peso del líquido que desplaza el sólido. (Observe que $\mathbf{F}$ se dirige hacia arriba porque z se dirige hacia abajo.) El resultado es el *principio de Arquímedes*: la fuerza de flotación sobre un objeto es igual al peso del líquido desplazado.

16.10 RESUMEN

Los resultados principales de este capítulo son todas las versiones para dimensiones de orden superior del teorema fundamental del cálculo. Para que pueda recordar, aparecen reunidas aquí (sin las hipótesis) de modo que puede ver con más facilidad su similitud esencial. Observe que en cada caso hay una integral de una "derivada" sobre una región en el lado izquierdo, y el lado derecho contiene los valores de la función original sólo en la *frontera* de la región.

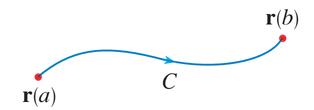
Teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



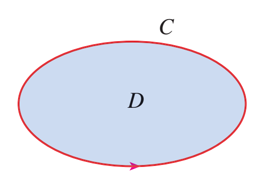
Teorema fundamental para las integrales

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$



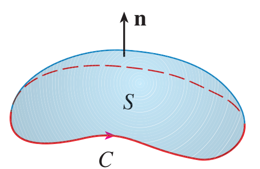
Teorema de Green

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_C P\,dx + Q\,dy$$



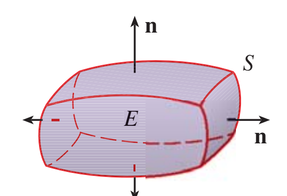
Teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$



Teorema de la divergencia

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



16 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. ¿Qué es un campo vectorial? Proporcione tres ejemplos que contengan significado físico.

2. (a) ¿Qué es un campo vectorial conservativo?
(b) ¿Qué es una función potencial?

3. (a) Escriba la definición de la integral de línea de una función escalar f a lo largo de una curva uniforme C con respecto a la longitud de arco.
(b) ¿Cómo evalúa dicha integral de línea?
(c) Escriba expresiones para la masa y el centro de masa de un alambre fino que tiene forma de una curva C si la función de densidad lineal del alambre es $\rho(x, y)$.
(d) Escriba la definiciones de las integrales de línea a lo largo de C de una función escalar f con respecto a x, y y z.
(e) ¿Cómo evaluaría estas integrales de línea?

4. (a) Defina la integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C uniforme definida por una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.
(b) Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza, ¿qué representa esta integral de línea?
(c) Si $\mathbf{F} = \langle P, Q, R\rangle$, ¿cuál es la relación entre la integral de línea de $\mathbf{F}$ y las integrales de línea de las funciones de las componentes P, Q y R?

5. Enuncie el teorema fundamental de las integrales de línea.

6. (a) ¿Qué significa decir que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria?
(b) Si usted sabe que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, ¿qué puede decir con respecto a $\mathbf{F}$?

7. Enuncie el teorema de Green.

8. Escriba expresiones para el área delimitada por la curva C en términos de las integrales de línea alrededor de C.

9. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$.
(a) Defina rot $\mathbf{F}$.
(b) Defina div $\mathbf{F}$.
(c) Si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad en flujo de fluidos, ¿cuáles son las interpretaciones físicas de rot $\mathbf{F}$ y div $\mathbf{F}$?

10. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, ¿qué prueba utilizaría para determinar si $\mathbf{F}$ es conservativo? ¿Qué sucede si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$?

11. (a) ¿Qué es una superficie paramétrica? ¿Qué son sus curvas reticulares?
(b) Escriba una expresión para el área de una superficie paramétrica.
(c) ¿Cuál es el área de una superficie definida por una ecuación $z = g(x, y)$?

12. (a) Escriba la definición de la integral de superficie de una función escalar f sobre una superficie S.
(b) ¿Cómo evaluaría dicha integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?
(c) ¿Qué sucede si S está definida por la ecuación $z = g(x, y)$?
(d) Si una lámina tiene la forma de una superficie S, y la densidad en (x, y, z) es $\rho(x, y, z)$, escriba expresiones para la masa y el centro de masa de la lámina.

13. (a) ¿Qué es una superficie orientada? Proporcione un ejemplo de una superficie no orientable.
(b) Defina la integral de superficie, o flujo, de un campo vectorial $\mathbf{F}$ sobre una superficie orientada S con vector unitario normal $\mathbf{n}$.
(c) ¿Cómo evaluaría tal integral si S es una superficie paramétrica dada por una función vectorial $\mathbf{r}(u, v)$?
(d) ¿Qué sucede si S está definida por una ecuación $z = g(x, y)$?

14. Enuncie el teorema de Stokes.

15. Enuncie el teorema de la divergencia.

16. ¿En qué se parecen el teorema fundamental de las integrales de línea, teorema de Green, teorema de Stokes y el teorema de la divergencia?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué; si es falso explique las razones, o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, en tal caso div $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.

2. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, por lo tanto rot $\mathbf{F}$ es un campo vectorial.

3. Si las derivadas parciales de f de todos los órdenes son continuas en $\mathbb{R}^3$, entonces $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \nabla f) = 0$.

4. Si las derivadas parciales de f son continuas en $\mathbb{R}^3$ y C es cualquier círculo, por eso $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$.

5. Si $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ y $P_y = Q_x$ en una región abierta D, en consecuencia $\mathbf{F}$ es conservativo.

6. $\int_{-C} f(x, y)\, ds = -\int_C f(x, y)\, ds$

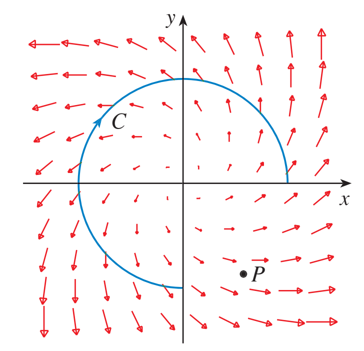
7. Si S es una esfera y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial constante, por lo tanto $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

8. Hay un campo vectorial $\mathbf{F}$ tal que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

EJERCICIOS

1. Se proporcionan un campo vectorial **F**, una curva C y un punto P.
(a) Es $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ positivo, negativo o cero? Explique.
(b) Es div $\mathbf{F}(P)$ positivo, negativo o cero? Explique.



2–9 Evalúe la integral de línea.

2. $\int_C x\, ds$,
C es el arco de la parábola $y = x^2$ desde (0, 0) a (1, 1)

3. $\int_C yz \cos x\, ds$,
C: $x = t$, $y = 3\cos t$, $z = 3 \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

4. $\int_C y\, dx + (x + y^2)\, dy$, C es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ con orientación en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj

5. $\int_C y^3\, dx + x^2\, dy$, C es el arco de la parábola $x = 1 - y^2$ de $(0, -1)$ a $(0, 1)$

6. $\int_C \sqrt{xy}\, dx + e^y\, dy + xz\, dz$,
C está definida por $\mathbf{r}(t) = t^4\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

7. $\int_C xy\, dx + y^2\, dy + yz\, dz$,
C es el segmento de línea de $(1, 0, -1)$, a $(3, 4, 2)$

8. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = xy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$ y C está definida por $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

9. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$ y C está definida por $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

10. Determine el trabajo que efectúa el campo de fuerza

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$$

al mover una partícula desde el punto (3, 0, 0) al punto $(0, \pi/2, 3)$ por
(a) Una recta
(b) La hélice $x = 3\cos t$, $y = t$, $z = 3 \operatorname{sen} t$

11–12 Demuestre que **F** es un campo vectorial conservativo. Luego determine una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + (e^y + x^2 e^{xy})\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x \cos y\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$

13–14 Demuestre que **F** es conservativo, y con base en este hecho, evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva dada.

13. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^2 - 2xy^3)\,\mathbf{i} + (2x^4y - 3x^2y^2 + 4y^3)\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t + \operatorname{sen} \pi t)\,\mathbf{i} + (2t + \cos \pi t)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + (xe^y + e^z)\,\mathbf{j} + ye^z\,\mathbf{k}$,
C es el segmento rectilíneo desde (0, 2, 0) a (4, 0, 3)

15. Compruebe que el teorema de Green es válido para la integral de línea $\int_C xy^2\, dx - x^2y\, dy$, donde C consiste en la parábola $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ y el segmento rectilíneo desde $(1, 1)$ a $(-1, 1)$.

16. Mediante el teorema de Green evalúe $\int_C \sqrt{1 + x^3}\, dx + 2xy\, dy$
donde C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 3).

17. Aplique el teorema de Green para evaluar $\int_C x^2y\, dx - xy^2\, dy$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y orientación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

18. Determine rot **F** y div **F** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x} \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^{-y} \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + e^{-z} \operatorname{sen} x\,\mathbf{k}$$

19. Demuestre que no hay campo vectorial **G** tal que

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = 2x\,\mathbf{i} + 3yz\,\mathbf{j} - xz^2\,\mathbf{k}$$

20. Demuestre que en condiciones que se establecerán en los campos vectoriales **F** y **G**.

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

21. Si C es una curva plana, cerrada, simple y uniforme por segmentos y f y g son funciones derivables, demuestre que

$$\int_C f(x)\, dx + g(y)\, dy = 0$$

22. Si f y g son funciones derivables dobles, demuestre que

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2\nabla f \cdot \nabla g$$

23. Si f es una función armónica, es decir, $\nabla^2 f = 0$, demuestre que la integral de línea $\int f_y\, dx - f_x\, dy$ es independiente de la trayectoria en cualquier región simple D.

24. (a) Elabore un esquema de la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad z = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

(b) Calcule $\int_C 2xe^{2y}\, dx + (2x^2e^{2y} + 2y \cot z)\, dy - y^2 \csc^2 z\, dz$.

25. Calcule el área de la parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ que se ubica por arriba del triángulo cuyos vértices son (0, 0), (1, 0) y (1, 2).

26. (a) Plantee una ecuación del plano tangente, en el punto $(4, -2, 1)$, a la superficie paramétrica S definida por

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2\,\mathbf{i} - uv\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k} \qquad 0 \leqslant u \leqslant 3,\ -3 \leqslant v \leqslant 3$$

(b) Dibuje con la ayuda de una computadora la superficie S y el plano tangente que determinó en el inciso (a).

(c) Plantee sin evaluar una integral para el área de la superficie de S.

CAS (d) Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + \frac{x^2}{1 + y^2}\,\mathbf{j} + \frac{y^2}{1 + z^2}\,\mathbf{k}$$

determine $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ con una aproximación de cuatro cifras decimales.

27–30 Evalúe la integral de superficie.

27. $\iint_S z\, dS$, donde S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que queda abajo del plano $z = 4$.

28. $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$, donde S es la parte del plano $z = 4 + x + y$ que se ubica dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

29. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$ y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con orientación hacia afuera.

30. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ abajo del plano $z = 1$ con orientación hacia arriba.

---

31. Compruebe que el teorema de Stokes es válido para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ donde S es la parte del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ que se encuentra arriba del plano xy y S tiene orientación hacia arriba.

32. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + z^3e^{xy}\,\mathbf{k}$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que queda arriba del plano $z = 1$, y S está orientada hacia arriba.

33. Aplique el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ y C es el triángulo de vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), orientado en el sentido contrario al de las manecillas del reloj como si se viera desde arriba.

34. Aplique el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ y S es la superficie del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 2$.

35. Compruebe que el teorema de la divergencia es válido para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ donde E es una bola unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

36. Calcule el flujo

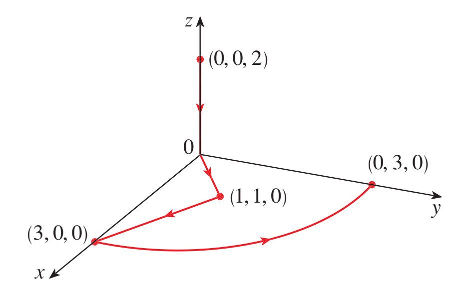
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

que sale a través del elipsoide $4x^2 + 9y^2 + 6z^2 = 36$.

37. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2yz - 3y)\,\mathbf{i} + (x^3z - 3x)\,\mathbf{j} + (x^3y + 2z)\,\mathbf{k}$$

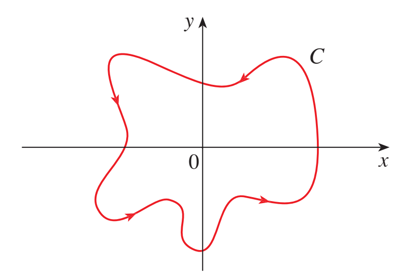
Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es la curva cuyo punto inicial (0, 0, 2) y el punto final (0, 3, 0) se ilustran en la figura.



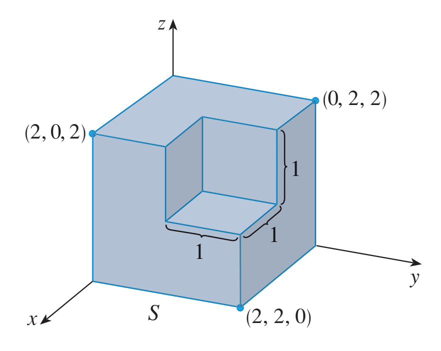
38. Sea

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{(2x^3 + 2xy^2 - 2y)\,\mathbf{i} + (2y^3 + 2x^2y + 2x)\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

Evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C se muestra en la figura.



39. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y S es la superficie orientada hacia afuera que se muestra en la figura (la superficie frontera de un cubo al que se le ha retirado un cubo unitario de un vértice).



40. Si las componentes de $\mathbf{F}$ tienen segundas derivadas parciales continuas y S es la superficie frontera de una región sólida simple, demuestre que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

41. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, y S es una superficie orientada y lisa con una curva C de frontera sencilla, cerrada, suave y positivamente orientada, demuestre que

$$\iint_S 2\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \int_C (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

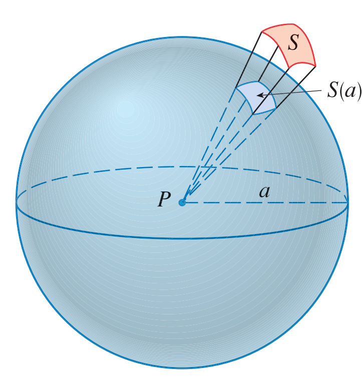


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

1. Sea S una superficie paramétrica uniforme, y sea P un punto tal que cada una de las rectas que inician en P cortan a S más de una vez. El **ángulo sólido** $\Omega(S)$ que subtiende S en P, es el conjunto de rectas que inician en P y pasan por S. Sea $S(a)$ la intersección de $\Omega(S)$ con la superficie de la esfera con centro P y radio a. Por lo tanto, la medida del ángulo sólido (en *estereorradianes*) se define como

$$|\Omega(S)| = \frac{\text{área de } S(a)}{a^2}$$

Mediante el teorema de la divergencia aplicado a la parte de $\Omega(S)$ entre $S(a)$ y S demuestre que

$$|\Omega(S)| = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector del radio desde P a cualquier punto sobre S, $r = |\mathbf{r}|$, y el vector normal unitario $\mathbf{n}$ se aleja de P.

Esto demuestra que la definición de la medida de un ángulo sólido es independiente del radio a de la esfera. Así, la medida del ángulo sólido es igual al área subtendida sobre una esfera *unitaria*. Observe la analogía con la definición de la medida en radianes. El ángulo sólido total subtendido por una esfera en su centro es entonces 4π estereorradianes.

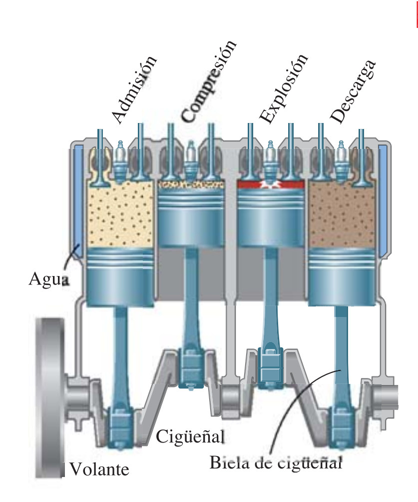
2. Determine la curva C cerrada simple orientada positivamente para la cual el valor de la integral de línea $\int_C (y^3 - y)\, dx - 2x^3\, dy$ es un máximo.

3. Sea C una curva simple, cerrada, suave por segmentos, en el espacio que se sitúa en un plano con un vector normal unitario $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$ su orientación es positiva con respecto a $\mathbf{n}$. Demuestre que el área del plano delimitada por C es $\frac{1}{2}\int_C (bz - cy)\, dx + (cx - az)\, dy + (ay - bx)\, dz$.

4. Investigue la forma de la superficie con ecuaciones paramétricas $y = \operatorname{sen} u$, $y = \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen}(u + v)$. Empiece por graficar la superficie desde varios puntos de vista. Explique el aspecto de las gráficas al determinar los trazos en los planos horizontales $z = 0$, $z = \pm 1$, y $z = \pm\frac{1}{2}$.

5. Demuestre la siguiente identidad:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{rota} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{rota} \mathbf{F}$$



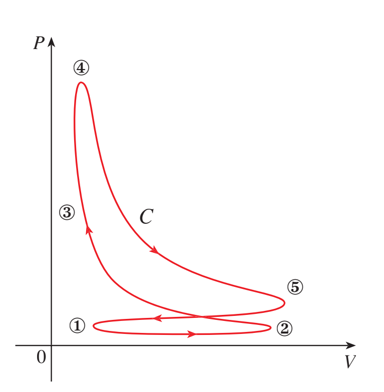


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. En la figura se ilustra la sucesión de eventos en cada cilindro de un motor de combustión interna de cuatro cilindros. Cada uno de los émbolos se desplaza hacia arriba y hacia abajo, y está conectado mediante un brazo con pivotes a un cigüeñal giratorio. Sea $P(t)$ y $V(t)$ la presión y el volumen dentro de un cilindro en el tiempo t, donde $a \leqslant t \leqslant b$ proporciona el tiempo necesario para un ciclo completo. La gráfica muestra cómo P y V varían en todo el ciclo de un motor de cuatro tiempos. Durante la carrera de admisión (de ① a ②) una mezcla de aire y gasolina a la presión atmosférica, es forzada a entrar a un cilindro a través de la válvula de admisión cuando el émbolo se desplaza hacia abajo. Después el émbolo comprime rápidamente la mezcla con las válvulas cerradas en la carrera de compresión (de ② a ③) durante la cual la presión aumenta y el volumen disminuye. En ③ la bujía de encendido provoca la ignición del combustible, se elevan la temperatura y la presión a casi volumen constante de ④. Después, con las válvulas cerradas, la expansión rápida fuerza al émbolo hacia abajo durante la carrera de potencia (desde ④ a ⑤). La válvula de descarga se abre, la temperatura y la presión caen, y la energía mecánica almacenada en el volante giratorio empuja al émbolo hacia arriba, forzando a los productos de desecho a salir de la válvula en la carrera de descarga. La válvula de descarga se cierra y la válvula de admisión se abre. Está de nuevo en ① y el ciclo inicia una vez más.

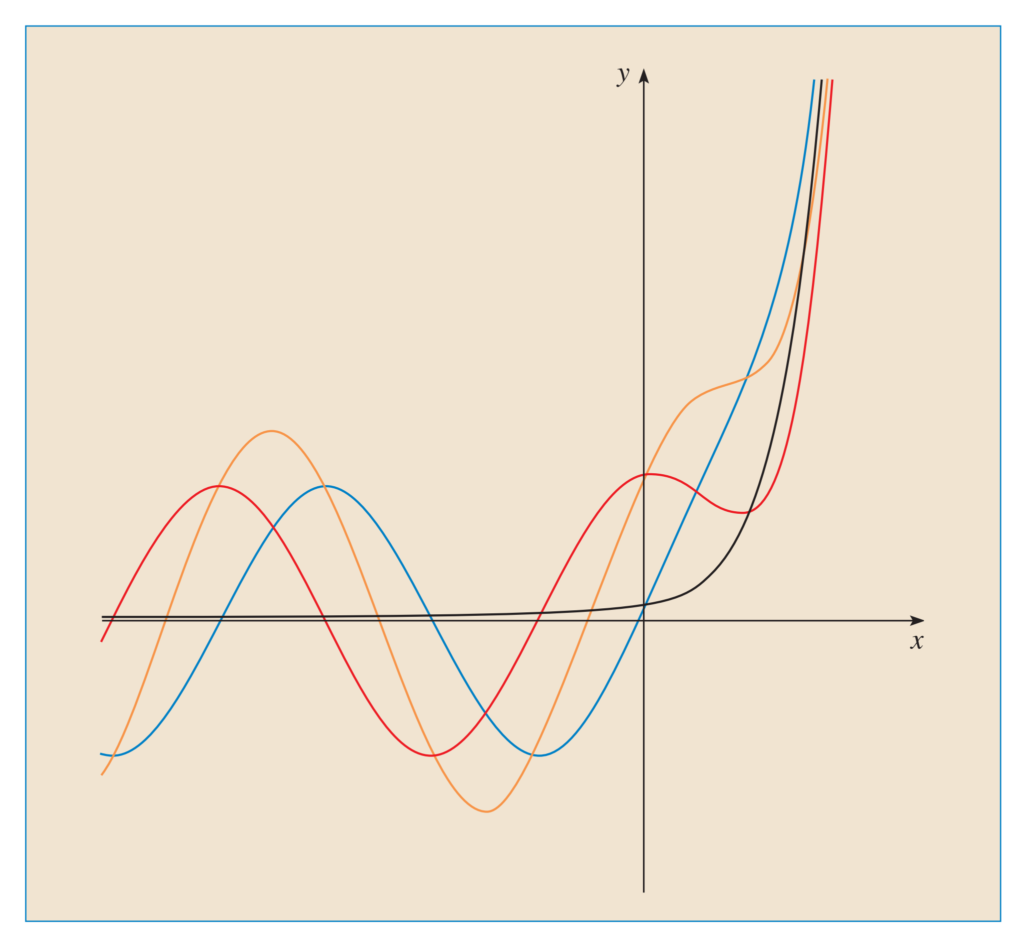
(a) Demuestre que el trabajo hecho sobre el émbolo durante un ciclo de un motor de cuatro tiempos es $W = \int_C P\, dV$, donde C es la curva en el plano PV mostrado en la figura.

[*Sugerencia:* Sea $x(t)$ la distancia desde el émbolo a la parte superior del cilindro y observe que la fuerza sobre el émbolo es $\mathbf{F} = AP(t)\mathbf{i}$, donde A es el área de la parte superior del émbolo. Luego, $W = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C_1 está definido mediante $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i}$, $a \leqslant t \leqslant b$. Otro enfoque optativo es trabajar en forma directa con sumas de Riemann.

(b) Use las fórmulas 16.4.5 para demostrar que el trabajo es la diferencia de las áreas delimitadas por los dos ciclos de C.

17

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN



La mayor parte de las soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 4y = e^{3x}$ se asemejan a funciones senoidales cuando x es negativa, pero todas se ven como funciones exponenciales cuando x es grande.

Las ideas básicas acerca de las ecuaciones diferenciales se explicaron en el capítulo 9; allí se centró la atención en las ecuaciones de primer orden. En este capítulo se estudian ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, y se aprende cómo se pueden aplicar para resolver problemas en relación con vibraciones de resortes y circuitos eléctricos. Se verá también cómo se pueden usar las series infinitas para resolver ecuaciones diferenciales.

17.1 ECUACIONES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN

Una **ecuación diferencial lineal de segundo orden** tiene la forma

$$\boxed{1} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

donde P, Q, R y G son funciones continuas. Se vio en la sección 9.1 que las ecuaciones de este tipo surgen en el estudio del movimiento de un resorte. En la sección 17.3 se continúa con esta aplicación, así como con la aplicación a circuitos eléctricos.

En esta sección se estudia el caso donde $G(x) = 0$, para toda x, en la ecuación 1. Esta clase de ecuaciones se llaman ecuaciones lineales **homogéneas**. Así, la forma de una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden es

$$\boxed{2} \qquad P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

Si $G(x) \neq 0$ para alguna x, la ecuación 1 es **no homogénea** y se analiza en la sección 17.2.

Dos hechos básicos permiten resolver ecuaciones lineales homogéneas. El primero de éstos dice que si se conocen dos soluciones y_1 y y_2 de tal ecuación, en tal caso la **combinación lineal** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es también una solución.

3 TEOREMA Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2) y c_1 y c_2 son constantes cualesquiera, entonces la función

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

es también una solución de la ecuación 2.

DEMOSTRACIÓN Puesto que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación 2, se tiene

$$P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1 = 0$$

y

$$P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2 = 0$$

Por lo tanto, al usar las reglas básicas para derivación, se tiene

$$\begin{aligned} &P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\ &\qquad = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\qquad = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\qquad = c_1[P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1] + c_2[P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2] \\ &\qquad = c_1(0) + c_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Así, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación 2. □

El otro hecho que se necesita está dado por el siguiente teorema, que se demuestra en cursos más avanzados. Establece que la solución general es una combinación lineal de dos soluciones **linealmente independientes** y_1 y y_2. Esto significa que ni y_1 ni y_2 son un múltiplo constante del otro. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x^2$ son linealmente dependientes, pero $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$ son linealmente independientes.

4 TEOREMA Si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación 2, y $P(x)$ nunca es 0, entonces la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

El teorema 4 es muy útil porque dice que si se conocen *dos* soluciones particulares linealmente independientes, en tal caso se conoce *toda* solución.

En general, no es fácil descubrir soluciones particulares para una ecuación lineal de segundo orden. Pero siempre es posible hacerlo si las funciones de coeficientes P, Q y R son funciones constantes, es decir, si la ecuación diferencial tiene la forma

5 $$ay'' + by' + cy = 0$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

No es difícil pensar en algunos candidatos probables para soluciones particulares de la ecuación 5 si se expresa verbalmente la ecuación. Se busca una función y tal que una constante multiplicada por su segunda derivada y'' más otra constante multiplicada por y' más una tercera constante multiplicada por y sea igual a cero. Se sabe que la función exponencial $y = e^{rx}$ (donde r es una constante) tiene la propiedad de que su derivada es un múltiplo constante de sí mismo: $y' = re^{rx}$. Además, $y'' = r^2e^{rx}$. Si se sustituyen estas expresiones en la ecuación 5, se ve que $y = e^{rx}$ es una solución si

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

o bien

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Pero e^{rx} nunca es 0. Así, $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación 5 si r es una raíz de la ecuación

6 $$ar^2 + br + c = 0$$

La ecuación 6 se llama **ecuación auxiliar** (o **ecuación característica**) de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Observe que es una ecuación algebraica que se obtiene de la ecuación diferencial al remplazar y'' por r^2, y' por r y y por 1.

Algunas veces las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar se determinan por factorización. En otros casos, se obtienen mediante la fórmula cuadrática:

7 $$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se distinguen tres casos de acuerdo con el signo del discriminante $b^2 - 4ac$.

■ **CASO I** $b^2 - 4ac > 0$

En este caso, las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son reales y distintas, así que $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación 5. (Note que $e^{r_2 x}$ no es un múltiplo constante de $e^{r_1 x}$. Por lo tanto, por el teorema 4, se tiene el siguiente hecho.

8 Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son reales y distintas, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

■ En la figura 1, las gráficas de las soluciones básicas $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-3x}$ de la ecuación diferencial en el ejemplo 1 se muestran en negro y rojo, respectivamente. Se muestran en azul algunas de las otras soluciones, combinaciones lineales de f y g.

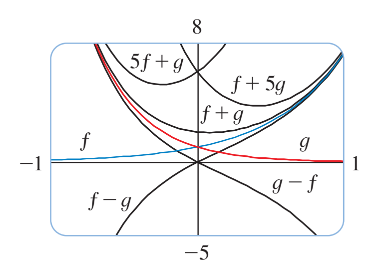


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y' - 6y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^2 + r - 6 = (r - 2)(r + 3) = 0$$

cuyas raíces son $r = 2, -3$. Por lo tanto, por (8) la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Se podría comprobar que ésta es de hecho una solución al derivar y sustituir en la ecuación diferencial. □

EJEMPLO 2 Resuelva $3\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - y = 0$.

SOLUCIÓN Para resolver la ecuación auxiliar $3r^2 + r - 1 = 0$ se emplea la fórmula cuadrática:

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Puesto que las raíces son reales y distintas, la solución general es

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2 e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$ □

■ **CASO II** $b^2 - 4ac = 0$

En este caso $r_1 = r_2$; es decir, las raíces de la ecuación auxiliar son reales e iguales. Se denotará con r el valor común de r_1 y r_2. En tal caso, de las ecuaciones 7, se tiene

9 $$r = -\frac{b}{2a} \qquad \text{de modo que} \qquad 2ar + b = 0$$

Se sabe que $y_1 = e^{rx}$ es una solución de la ecuación 5. Ahora se comprueba que $y_2 = xe^{rx}$ es también una solución:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + 0(xe^{rx}) = 0 \end{aligned}$$

El primer término es 0 por las ecuaciones 9; el segundo término es 0 porque r es una raíz de la ecuación auxiliar. Puesto que $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = xe^{rx}$ son soluciones linealmente independientes, el teorema 4 provee la solución general.

10 Si la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ tiene sólo una raíz real r, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

■ En la figura 2 se muestran las soluciones básicas $f(x) = e^{-3x/2}$ y $g(x) = xe^{-3x/2}$ del ejemplo 3 y algunos otros miembros de la familia de soluciones. Observe que no todas se aproximan a 0 cuando $x \to \infty$.

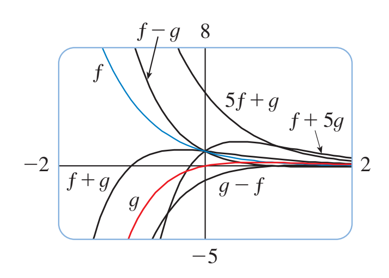


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $4y'' + 12y' + 9y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar $4r^2 + 12r + 9 = 0$ se puede factorizar como

$$(2r + 3)^2 = 0$$

así que la única raíz es $r = -\frac{3}{2}$. Por (10) la solución general es

$$y = c_1 e^{-3x/2} + c_2 x e^{-3x/2}$$ □

■ **CASO III $b^2 - 4ac < 0$**

En este caso, las raíces r_1 y r_2 de la ecuación auxiliar son números complejos. (Véase en el apéndice H la información acerca de números complejos.) Se puede escribir

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

donde α y β son números reales. [De hecho, $\alpha = -b/(2a)$, $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.] En seguida, por medio de la ecuación de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

del apéndice H, se escribe la solución de la ecuación diferencial como

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - i\beta)x} \\ &= C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

donde $c_1 = C_1 + C_2$, $c_2 = i(C_1 - C_2)$. Ésta da las soluciones (reales o complejas) de la ecuación diferencial. Las soluciones son reales cuando las constantes c_1 y c_2 son reales. Se resume la descripción como sigue.

11 Si las raíces de la ecuación auxiliar $ar^2 + br + c = 0$ son números complejos $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, entonces la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$ es

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$$

■ En la figura 3 se muestran las gráficas de las soluciones del ejemplo 4, $f(x) = e^{3x} \cos 2x$ y $g(x) = e^{3x} \operatorname{sen} 2x$, junto con algunas combinaciones lineales. Todas las soluciones tienden a 0 cuando $x \to -\infty$.

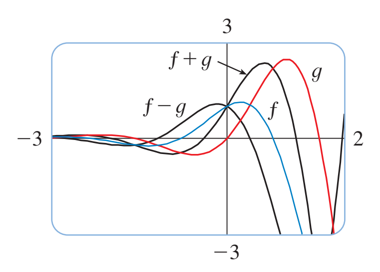


FIGURA 3

V EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $y'' - 6y' + 13y = 0$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 - 6r + 13 = 0$. Por la fórmula cuadrática, las raíces son

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = 3 \pm 2i$$

Por (11) la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$$ □

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES Y VALORES EN LA FRONTERA

Un **problema de valor inicial** para la ecuación de segundo orden 1 o 2, consiste en hallar una solución y de la ecuación diferencial que satisface también las condiciones iniciales de la forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_1$$

donde y_0 y y_1 son constantes dadas. Si P, Q, R y G son continuas en un intervalo y $P(x) \neq 0$ ahí, en seguida un teorema hallado en libros más avanzados garantiza la existencia y unicidad de una solución para este problema de valores iniciales. En los ejemplos 5 y 6, se ilustra la técnica para resolver tal problema.

EJEMPLO 5 Resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

SOLUCIÓN Del ejemplo 1, se sabe que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

Al derivar esta solución, se obtiene

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

■ En la figura 4, se muestra la gráfica de la solución del problema de valores iniciales del ejemplo 5. Compare con la figura 1.

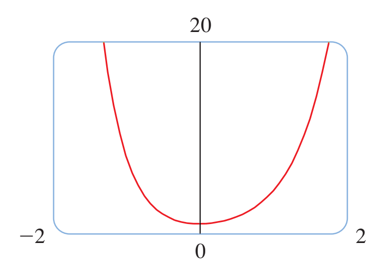


FIGURA 4

Para satisfacer las condiciones iniciales, se requiere que

12 $$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

13 $$y'(0) = 2c_1 - 3c_2 = 0$$

De (13) se tiene $c_2 = \frac{2}{3}c_1$ y, por lo tanto, (12) da

$$c_1 + \tfrac{2}{3}c_1 = 1 \qquad c_1 = \tfrac{3}{5} \qquad c_2 = \tfrac{2}{5}$$

En estos términos, la solución requerida del problema de valores iniciales es

$$y = \tfrac{3}{5}e^{2x} + \tfrac{2}{5}e^{-3x}$$ □

EJEMPLO 6 Resuelva el problema de valores iniciales

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ o $r^2 = -1$, cuyas raíces son $\pm i$. Así, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, y puesto que $e^{0x} = 1$, la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

Puesto que $$y'(x) = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

■ En la figura 5 está la gráfica de la solución del ejercicio 6. Tiene la forma de una función seno desfasada y, de hecho, es posible verificar que otra forma de escribir la solución es:

$y = \sqrt{13}\,\text{sen}(x + \phi)$ donde $\tan\phi = \frac{2}{3}$

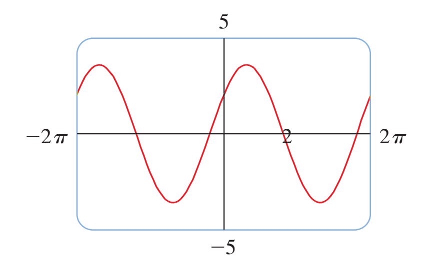


FIGURA 5

las condiciones iniciales se convierten en

$$y(0) = c_1 = 2 \qquad y'(0) = c_2 = 3$$

Por lo tanto, la solución del problema de valores iniciales es

$$y(x) = 2\cos x + 3\,\text{sen}\,x$$ □

Un **problema de valores en la frontera** para la ecuación 1 o 2 consiste en hallar una solución y de la ecuación diferencial que satisface también las condiciones en la frontera de la forma

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

En contraste con la situación para problemas de valores iniciales, un problema de valores en la frontera no siempre tiene solución. Este método se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelva el problema de valores en la frontera

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad (r + 1)^2 = 0$$

cuya única raíz es $r = -1$. Por lo tanto, la solución general es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$$

Las condiciones de frontera se satisfacen si

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

■ En la figura 6 se muestra la gráfica de la solución del problema de valores en la frontera del ejemplo 7.

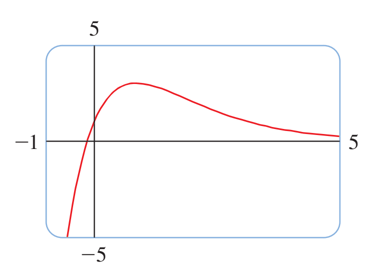


FIGURA 6

La primera condición da $c_1 = 1$, así que la segunda condición se convierte en

$$e^{-1} + c_2e^{-1} = 3$$

Al despejar c_2 de esta ecuación multiplicando primero por e, se obtiene

$$1 + c_2 = 3e \qquad \text{de modo que} \qquad c_2 = 3e - 1$$

Así, la solución del problema de valores en la frontera es

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$ □

RESUMEN: SOLUCIONES DE $ay'' + by' + c = 0$

Raíces de $ar^2 + br + c = 0$	Solución general
r_1, r_2 reales y distintas	$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$
r_1, r_2 complejas: $\alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\,\text{sen}\,\beta x)$

17.1 EJERCICIOS

1–13 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $y'' - y' - 6y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 16y = 0$
4. $y'' - 8y' + 12y = 0$
5. $9y'' - 12y' + 4y = 0$
6. $25y'' + 9y = 0$
7. $y' = 2y''$
8. $y'' - 4y' + y = 0$
9. $y'' - 4y' + 13y = 0$
10. $y'' + 3y' = 0$
11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - y = 0$
12. $8\dfrac{d^2y}{dt^2} + 12\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$
13. $100\dfrac{d^2P}{dt^2} + 200\dfrac{dP}{dt} + 101P = 0$

14–16 Grafique las dos soluciones básicas de la ecuación diferencial y varias soluciones más. ¿Qué características tienen en común las soluciones?

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 20y = 0$
15. $5\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$
16. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

17–24 Resuelva el problema de valores iniciales.

17. $2y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4$
18. $y'' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$
19. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.5$
20. $2y'' + 5y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$
21. $y'' + 16y = 0, \quad y(\pi/4) = -3, \quad y'(\pi/4) = 4$
22. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2$
23. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
24. $y'' + 12y' + 36y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$

25–32 Resuelva el problema de valores en la frontera, si es posible.

25. $4y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\pi) = -4$
26. $y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$
27. $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(3) = 0$
28. $y'' + 100y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi) = 5$
29. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$
30. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$
31. $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(\pi/2) = 1$
32. $9y'' - 18y' + 10y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$

33. Sea L un número real diferente de cero.
    (a) Demuestre que el problema de valores en la frontera $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y(L) = 0$ tiene sólo la solución trivial $y = 0$ para los casos $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$
    (b) Para el caso $\lambda > 0$, encuentre los valores de λ para los cuales el problema tiene una solución no trivial y dé la solución correspondiente.

34. Si a, b y c son constantes positivas y $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$, demuestre que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

17.2 ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS

En esta sección se aprende cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes, es decir, ecuaciones de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes y G es una función continua. La ecuación homogénea relacionada

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

se llama **ecuación complementaria** y juega un papel importante en la solución de la ecuación no homogénea original (1).

3 TEOREMA La solución general de la ecuación diferencial no homogénea (1) se puede escribir como

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

donde y_p es una solución particular de la ecuación 1 y y_c es la solución general de la ecuación complementaria 2.

DEMOSTRACIÓN Todo lo que se tiene que hacer es comprobar que si y es alguna solución de la ecuación 1, por lo tanto $y - y_p$ es una solución de la ecuación complementaria 2. De hecho,

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= ay'' - ay_p'' + by' - by_p' + cy - cy_p \\ &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$ □

Se sabe de la sección 17.1 cómo resolver la ecuación complementaria. (Recuerde que la solución es $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación 2.) Por lo tanto, el teorema 3 dice que se conoce la solución general de la ecuación no homogénea tan pronto como se conoce una solución particular y_p. Hay dos métodos para hallar una solución particular: el método de los coeficientes indeterminados es directo, pero funciona sólo para una clase restringida de funciones G. El método de variación de parámetros funciona para toda función G, pero por lo general es más difícil aplicarlo en la práctica.

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Se ilustra primero el método de los coeficientes indeterminados para la ecuación

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

donde $G(x)$ es un polinomio. Es razonable suponer que hay una solución particular y_p que es un polinomio del mismo grado que G, porque si y es un polinomio, en tal caso $ay'' + by' + cy$ también es un polinomio. Por lo tanto, se sustituye $y_p(x) =$ un polinomio (del mismo grado que G) en la ecuación diferencial y se determinan los coeficientes.

V EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar de $y'' + y' - 2y = 0$ es

$$r^2 + r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0$$

donde las raíces $r = 1, -2$. De este modo, la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

Puesto que $G(x) = x^2$ es un polinomio de grado 2, se busca una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Por lo tanto $y_p' = 2Ax + B$ y $y_p'' = 2A$ así que, al sustituir en la ecuación diferencial, se tiene

$$(2A) + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

o bien, $$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) = x^2$$

Los polinomios son iguales cuando sus coeficientes son iguales. Así,

$$-2A = 1 \qquad 2A - 2B = 0 \qquad 2A + B - 2C = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$A = -\tfrac{1}{2} \qquad B = -\tfrac{1}{2} \qquad C = -\tfrac{3}{4}$$

Por lo tanto, una solución particular es

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$

y, por el teorema 3, la solución general es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{4}$$ □

■ En la figura 1 se muestran las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1 en términos de la solución particular y_p y las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-2x}$.

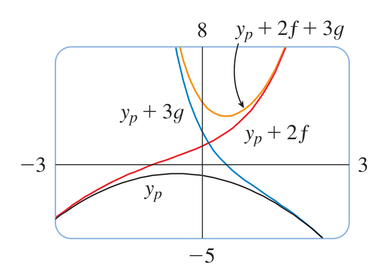


FIGURA 1

Si $G(x)$ (el lado derecho de la ecuación 1) es de la forma Ce^{kx}, donde C y k son constantes, por lo tanto se toma como una solución de prueba una función de la misma forma, $y_p(x) = Ae^{kx}$, porque las derivadas de e^{kx} son múltiplos constantes de e^{kx}.

EJEMPLO 2 Resuelva $y'' + 4y = e^{3x}$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 4 = 0$ con raíces $\pm 2i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

Para una solución particular se prueba $y_p(x) = Ae^{3x}$. Después $y_p' = 3Ae^{3x}$ y $y_p'' = 9Ae^{3x}$. Al sustituir en la ecuación diferencial, se tiene

$$9Ae^{3x} + 4(Ae^{3x}) = e^{3x}$$

por lo tanto, $13Ae^{3x} = e^{3x}$ y $A = \frac{1}{13}$. Así, la solución particular es

$$y_p(x) = \tfrac{1}{13}e^{3x}$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{13}e^{3x}$$ □

■ En la figura 2 se muestran las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2 en términos de y_p y las funciones $f(x) = \cos 2x$ y $g(x) = \operatorname{sen} 2x$. Observe que las soluciones se aproximan a ∞ cuando $x \to \infty$ y todas las soluciones se asemejan a funciones seno cuando x es negativa.

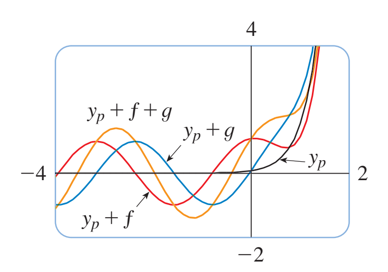


FIGURA 2

Si $G(x)$ es $C \cos kx$ o $C \operatorname{sen} kx$, por lo tanto, como resultado de las reglas para derivar las funciones seno y coseno, se tomó como solución particular una función de la forma

$$y_p(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$$

V EJEMPLO 3 Resuelva $y'' + y' - 2y = \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Se prueba una solución particular

$$y_p(x) = A \cos x + B \operatorname{sen} x$$

Por lo tanto, $\quad y_p' = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \qquad y_p'' = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$

de este modo la sustitución en la ecuación diferencial da

$$(-A \cos x - B \operatorname{sen} x) + (-A \operatorname{sen} x + B \cos x) - 2(A \cos x + B \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x$$

o bien,

$$(-3A + B) \cos x + (-A - 3B) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$$

Esto se cumple si

$$-3A + B = 0 \qquad \text{y} \qquad -A - 3B = 1$$

La solución de este sistema es

$$A = -\tfrac{1}{10} \qquad B = -\tfrac{3}{10}$$

por eso, una solución particular es

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{10} \cos x - \tfrac{3}{10} \operatorname{sen} x$$

En el ejemplo 1 se determinó que la solución de la ecuación complementaria es $y_c = c_1e^x + c_2e^{-2x}$. Así, la solución general de la ecuación dada es

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{10}(\cos x + 3 \operatorname{sen} x)$$ □

Si $G(x)$ es un producto de funciones de los tipos precedentes, en tal caso se toma la solución de prueba como un producto de funciones del mismo tipo. Por ejemplo, para resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 4y = x \cos 3x$$

se probaría

$$y_p(x) = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \operatorname{sen} 3x$$

Si $G(x)$ es una suma de funciones de estos tipos, se usa el *principio de sobreposición* comprobado fácilmente, que dice que si y_{p_1} y y_{p_2} son soluciones de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) \qquad ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

respectivamente, después $y_{p_1} + y_{p_2}$ es una solución de

$$ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$$

V EJEMPLO 4 Resuelva $y'' - 4y = xe^x + \cos 2x$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 - 4 = 0$ con raíces ± 2, de este modo la solución de la ecuación complementaria es $y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$. Para la ecuación $y'' - 4y = xe^x$ se prueba

$$y_{p_1}(x) = (Ax + B)e^x$$

En tal caso $y'_{p_1} = (Ax + A + B)e^x$, $y''_{p_1} = (Ax + 2A + B)e^x$, de modo que la sustitución en la ecuación da

$$(Ax + 2A + B)e^x - 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

o bien,

$$(-3Ax + 2A - 3B)e^x = xe^x$$

Así, $-3A = 1$ y $2A - 3B = 0$, de manera que $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}$, y

$$y_{p_1}(x) = \left(-\tfrac{1}{3}x - \tfrac{2}{9}\right)e^x$$

Para la ecuación $y'' - 4y = \cos 2x$, se prueba

$$y_{p_2}(x) = C\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x$$

■ En la figura 3 se muestra la solución particular $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ de la ecuación diferencial del ejemplo 4. Las otras soluciones se dan en términos de $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^{-2x}$.

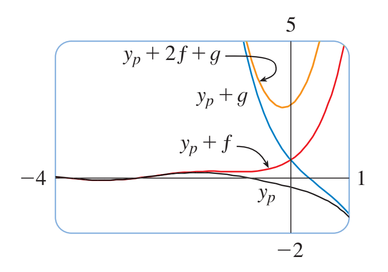


FIGURA 3

La sustitución da

$$-4C\cos 2x - 4D\,\text{sen}\,2x - 4(C\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x) = \cos 2x$$

o bien, $$-8C\cos 2x - 8D\,\text{sen}\,2x = \cos 2x$$

Por lo tanto, $-8C = 1$, $-8D = 0$ y

$$y_{p_2}(x) = -\tfrac{1}{8}\cos 2x$$

Por el principio de sobreposición, la solución general es

$$y = y_c + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \left(\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}\right)e^x - \tfrac{1}{8}\cos 2x$$ □

Por último, se nota que la solución de prueba recomendada y_p a veces resulta ser una solución de la ecuación complementaria y, debido a eso, no puede ser una solución de la ecuación no homogénea. En tales casos, se multiplica por x (o por x^2 si es necesario) la solución de prueba recomendada de modo que ningún término de $y_p(x)$ sea una solución de la ecuación complementaria.

EJEMPLO 5 Resuelva $y'' + y = \text{sen}\,x$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ con las raíces $\pm i$, de modo que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x$$

De ordinario, se usa la solución de prueba

$$y_p(x) = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$$

pero se observa que es una solución de la ecuación complementaria, así que en cambio se prueba

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\,\text{sen}\,x$$

Por lo tanto $$y_p'(x) = A\cos x - Ax\,\text{sen}\,x + B\,\text{sen}\,x + Bx\cos x$$

$$y_p''(x) = -2A\,\text{sen}\,x - Ax\cos x + 2B\cos x - Bx\,\text{sen}\,x$$

La sustitución en la ecuación diferencial da

$$y_p'' + y_p = -2A\,\text{sen}\,x + 2B\cos x = \text{sen}\,x$$

■ Las gráficas de cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 5 se muestran en la figura 4.

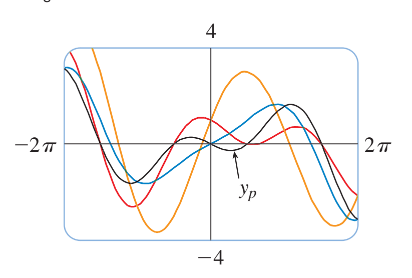


FIGURA 4

por lo tanto $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$ y

$$y_p(x) = -\tfrac{1}{2}x \cos x$$

La solución general es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{2}x \cos x$$ □

Se resume el método de los coeficientes indeterminados como sigue:

RESUMEN DEL MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

1. Si $G(x) = e^{kx}P(x)$, donde P es un polinomio de grado n, entonces intente $y_p(x) = e^{kx}Q(x)$, donde $Q(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado (cuyos coeficientes están determinados por sustitución en la ecuación diferencial).
2. Si $G(x) = e^{kx}P(x) \cos mx$ o si $G(x) = e^{kx}P(x) \operatorname{sen} mx$, donde P es un polinomio de n-ésimo grado, entonces intente

$$y_p(x) = e^{kx}Q(x) \cos mx + e^{kx}R(x) \operatorname{sen} mx$$

donde Q y R son polinomios de n-ésimo grado.

Modificación: Si cualquier término de y_p es una solución de la ecuación complementaria, multiplique y_p por x (o por x^2 si es necesario).

EJEMPLO 6 Determine la forma de la solución de prueba para la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cos 3x$.

SOLUCIÓN Aquí $G(x)$ tiene la forma de la parte 2 del resumen, donde $k = 2$, $m = 3$ y $P(x) = 1$. Así, a primera vista, la forma de la solución de prueba sería

$$y_p(x) = e^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$

Pero la ecuación auxiliar es $r^2 - 4r + 13 = 0$, con raíces $r = 2 \pm 3i$, así que la solución de la ecuación complementaria es

$$y_c(x) = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$$

Esto significa que se tiene que multiplicar por x la solución de prueba sugerida. Así, en cambio, se usa

$$y_p(x) = xe^{2x}(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x)$$ □

MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Suponga que ya se ha resuelto la ecuación homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ y escrito la solución como

4 $$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes. Se remplazarán las constantes (o parámetros) c_1 y c_2 en la ecuación 4 por funciones arbitrarias $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Se busca

una solución particular de la ecuación no homogénea $ay'' + by' + cy = G(x)$ de la forma

5 $$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

(Este método se llama **variación de parámetros** porque se han variado los parámetros c_1 y c_2 para hacerlos funciones.) Al derivar la ecuación 5, se obtiene

6 $$y_p' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Puesto que u_1 y u_2 son funciones arbitrarias, se puede imponer dos condiciones sobre ellas. Una condición es que y_p es una solución de la ecuación diferencial; se puede elegir la otra condición para simplificar los cálculos. En vista de la expresión en la ecuación 6, se impone la condición de que

7 $$u_1'y_1' + u_2'y_2' = 0$$

En consecuencia $$y_p'' = u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2''$$

Al sustituir en la ecuación diferencial, se obtiene

$$a(u_1'y_1' + u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2y_2'') + b(u_1y_1' + u_2y_2') + c(u_1y_1 + u_2y_2) = G$$

o bien,

8 $$u_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + u_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Pero y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación complementaria, de este modo

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$$

y la ecuación 8 se simplifica

9 $$a(u_1'y_1' + u_2'y_2') = G$$

Las ecuaciones 7 y 9 forman un sistema de dos ecuaciones de las funciones desconocidas u_1' y u_2'. Después de resolver este sistema se puede integrar para hallar u_1 y u_2 y por lo tanto la solución particular está dada por la ecuación 5.

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación $y'' + y = \tan x$, $0 < x < \pi/2$.

SOLUCIÓN La ecuación auxiliar es $r^2 + 1 = 0$ con raíces $\pm i$, así que la solución de $y'' + y = 0$ es $c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$. Con la variación de parámetros, se busca una solución de la forma

$$y_p(x) = u_1(x) \operatorname{sen} x + u_2(x) \cos x$$

En tal caso $$y_p' = (u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x) + (u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x)$$

Se establece

10 $$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0$$

Después $$y_p'' = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Para que y_p sea una solución se debe tener

$$\boxed{11} \qquad y_p'' + y_p = u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \tan x$$

Al resolver las ecuaciones 10 y 11, se obtiene

$$u_1'(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \tan x$$

$$u_1' = \operatorname{sen} x \qquad u_1(x) = -\cos x$$

(Se busca una solución particular, así que no se necesita una constante de integración aquí.) En tal caso, de la ecuación 10, se obtiene

$$u_2' = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} u_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \sec x$$

Así, $$u_2(x) = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)$$

■ En la figura 5 se muestran cuatro soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 7.

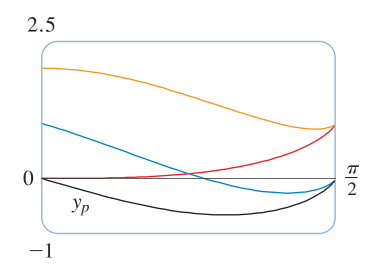


FIGURA 5

(Note que $\sec x + \tan x > 0$ para $0 < x < \pi/2$.) Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -\cos x \operatorname{sen} x + [\operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \tan x)]\cos x \\ &= -\cos x \ln(\sec x + \tan x) \end{aligned}$$

y la solución general es

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \tan x)$$ □

17.2 EJERCICIOS

1–10 Resuelva la ecuación diferencial o el problema de valores iniciales con el método de coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = x^2$

2. $y'' + 9y = e^{3x}$

3. $y'' - 2y' = \operatorname{sen} 4x$

4. $y'' + 6y' + 9y = 1 + x$

5. $y'' - 4y' + 5y = e^{-x}$

6. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$

7. $y'' + y = e^x + x^3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' - 4y = e^x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

9. $y'' - y' = xe^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

10. $y'' + y' - 2y = x + \operatorname{sen} 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

11–12 Grafique la solución particular y otras cuantas soluciones. ¿Qué características tienen en común estas soluciones?

11. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$ **12.** $y'' + 4y = e^{-x}$

13–18 Escriba una solución de prueba para el método de coeficientes indeterminados. No determine los coeficientes.

13. $y'' + 9y = e^{2x} + x^2 \operatorname{sen} x$

14. $y'' + 9y' = xe^{-x} \cos \pi x$

15. $y'' + 9y' = 1 + xe^{9x}$

16. $y'' + 3y' - 4y = (x^3 + x)e^x$

17. $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

18. $y'' + 4y = e^{3x} + x \operatorname{sen} 2x$

19–22 Resuelva la ecuación diferencial utilizando (a) coeficientes indeterminados y (b) la variación de parámetros.

19. $4y'' + y = \cos x$

20. $y'' - 2y' - 3y = x + 2$

21. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$

22. $y'' - y' = e^x$

23–28 Resuelva la ecuación diferencial con el método de variación de parámetros.

23. $y'' + y = \sec^2 x,\ 0 < x < \pi/2$

24. $y'' + y = \sec^3 x,\ 0 < x < \pi/2$

25. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$

26. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

27. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

28. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

17.3 APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden tienen diversas aplicaciones en ciencia e ingeniería. En esta sección se exploran dos de ellas: la vibración de resortes y circuitos eléctricos.

RESORTES VIBRATORIOS

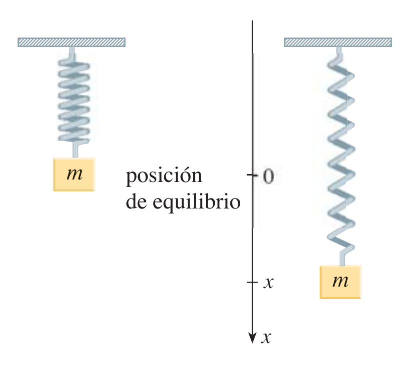


FIGURA 1

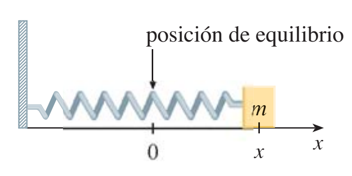


FIGURA 2

Se considera el movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte que es vertical (como en la figura 1) u horizontal sobre una superficie nivelada (como en la figura 2).

En la sección 6.4 se explicó la ley de Hooke, que dice que si el resorte es estirado (o comprimido) x unidades desde su longitud natural, en consecuencia ejerce una fuerza que es proporcional a x

$$\text{fuerza de restauración} = -kx$$

donde k es una constante positiva (llamada **constante del resorte**). Si se ignoran las fuerzas de resistencia (debido a la resistencia del aire o a la fricción) entonces, por la segunda ley de Newton (la fuerza es igual a la masa por la aceleración), se tiene



1 $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \text{o bien,} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden. Su ecuación auxiliar es $mr^2 + k = 0$ con raíces $r = \pm\omega i$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$. Así, la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t$$

que se puede escribir también como

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \text{(frecuencia)}$$

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{(amplitud)}$$

$$\cos \delta = \frac{c_1}{A} \qquad \operatorname{sen} \delta = -\frac{c_2}{A} \quad (\delta \text{ es el ángulo de fase})$$

(Véase el ejercicio 17.) Este tipo de movimiento se llama **movimiento armónico simple**.

V EJEMPLO 1 Un resorte con masa de 2 kg tiene una longitud natural de 0.5 m. Se requiere una fuerza de 25.6 N para mantenerlo estirado hasta una longitud de 0.7 m. Si el resorte se estira a una longitud de 0.7 m y luego se suelta con velocidad inicial 0, encuentre la posición final de la masa en cualquier tiempo t.

SOLUCIÓN De la ley de Hooke, la fuerza requerida para estirar el resorte es

$$k(0.2) = 25.6$$

así que $k = 25.6/0.2 = 128$. Usando este valor de la constante k, junto con $m = 2$ en la ecuación 1, se tiene

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 128x = 0$$

Como en la descripción general anterior, la solución de esta ecuación es

2 $$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t$$

Se da la condición inicial de que $x(0) = 0.2$. Pero, de la ecuación 2, $x(0) = c_1$. Por lo tanto, $c_1 = 0.2$. La derivación de la ecuación 2, produce

$$x'(t) = -8c_1 \operatorname{sen} 8t + 8c_2 \cos 8t$$

Puesto que la velocidad inicial está dada como $x'(0) = 0$, se tiene $c_2 = 0$ y, por lo tanto, la solución es

$$x(t) = \tfrac{1}{5}\cos 8t$$ □

VIBRACIONES AMORTIGUADAS

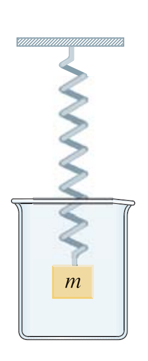


FIGURA 3



Schwinn Cycling and Fitness

Se considera a continuación el movimiento de un resorte que está sujeto a una fuerza de fricción (en el caso del resorte horizontal de la figura 2) o una fuerza de amortiguación (en el caso donde un resorte vertical se mueve por un fluido como en la figura 3). Un ejemplo es la fuerza de amortiguación que suministra un amortiguador en un automóvil o una bicicleta.

Se supone que la fuerza de amortiguación es proporcional a la velocidad de la masa y actúa en la dirección opuesta al movimiento. (Esto ha sido confirmado, al menos de forma aproximada, por algunos experimentos físicos.) Así,

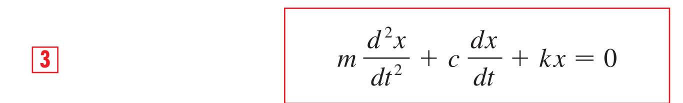
$$\text{fuerza de amortiguamiento} = -c\frac{dx}{dt}$$

donde c es una constante positiva, llamada **constante de amortiguamiento**. Así, en este caso, la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguamiento} = -kx - c\frac{dx}{dt}$$

o bien,

3



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

La ecuación 3 es una ecuación diferencial de segundo orden y su ecuación auxiliar es $mr^2 + cr + k = 0$. Las raíces son

$$\boxed{4} \qquad r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

De acuerdo con la sección 17.1 se necesita analizar tres casos.

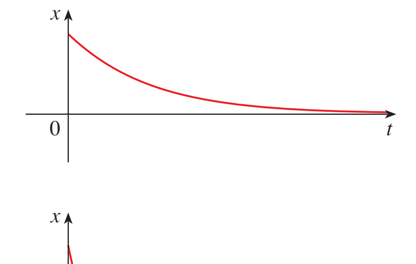


FIGURA 4
Sobreamortiguamiento

■ **CASO I** $c^2 - 4mk > 0$ **(sobreamortiguamiento)**
En este caso r_1 y r_2 son raíces reales y distintas y

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Puesto que c, m y k son positivas, se tiene $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$, así que las raíces r_1 y r_2 dadas por las ecuaciones 4 deben ser negativas. Esto muestra que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$. Las gráficas representativas de x como una función de t se muestran en la figura 4. Observe que no ocurren oscilaciones. (Es posible que la masa pase por la posición de equilibrio una vez, pero sólo una vez.) Esto es porque $c^2 > 4mk$ significa que hay una fuerte fuerza de amortiguamiento (aceite o grasa de alta viscosidad) en comparación con un resorte débil o masa pequeña.

■ **CASO II** $c^2 - 4mk = 0$ **(amortiguamiento crítico)**
Este caso corresponde a raíces iguales

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

y la solución está dada por

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-(c/2m)t}$$

Es similar al caso I, y las gráficas representativas se asemejan a las de la figura 4 (véase el ejercicio 12), pero el amortiguamiento es sólo suficiente para suprimir vibraciones. Cualquier disminución de la viscosidad del fluido conduce a las vibraciones del caso siguiente.

■ **CASO III** $c^2 - 4mk < 0$ **(subamortiguamiento)**
Aquí las raíces son complejas:

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

donde

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

La solución está dada por

$$x = e^{-(c/2m)t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Se ve que hay oscilaciones que son amortiguadas por el factor $e^{-(c/2m)t}$. Puesto que $c > 0$ y $m > 0$, se tiene $-(c/2m) < 0$ de modo que $e^{-(c/2m)t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Esto significa que $x \to 0$ cuando $t \to \infty$; es decir, el movimiento decae a 0 cuando se incrementa el tiempo. En la figura 5 se muestra una gráfica representativa.

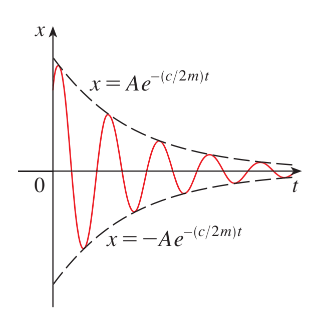


FIGURA 5
Subamortiguamiento

EJEMPLO 2 Suponga que el resorte del ejemplo 1 se sumerge en un líquido con constante de amortiguamiento $c = 40$. Encuentre la posición de la masa en cualquier tiempo t si empieza desde la posición de equilibrio y recibe un empujón para empezar con una velocidad inicial de 0.6 m/s.

SOLUCIÓN Del ejemplo 1 la masa es $m = 2$ y la constante del resorte es $k = 128$, así que la ecuación diferencial (3) se convierte en

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 40\frac{dx}{dt} + 128x = 0$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 20\frac{dx}{dt} + 64x = 0$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 20r + 64 = (r + 4)(r + 16) = 0$ con raíces -4 y -16, así que el movimiento es sobreamortiguado y la solución es

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{-16t}$$

■ En la figura 6, se muestra la gráfica de la función de posición para el movimiento sobreamortiguado del ejemplo 2.

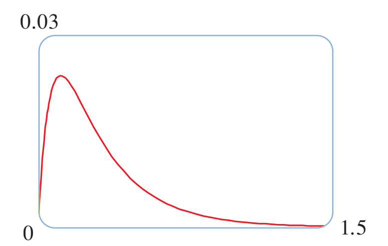


FIGURA 6

Se tiene que $x(0) = 0$, así que $c_1 + c_2 = 0$. Al derivar, se obtiene

$$x'(t) = -4c_1e^{-4t} - 16c_2e^{-16t}$$

de tal manera, $$x'(0) = -4c_1 - 16c_2 = 0.6$$

Puesto que $c_2 = -c_1$, esto da $12c_1 = 0.6$ o $c_1 = 0.05$. Debido a eso,

$$x = 0.05(e^{-4t} - e^{-16t})$$ □

VIBRACIONES FORZADAS

Suponga que, además de la fuerza de restauración y la fuerza de amortiguamiento, el movimiento del resorte es afectado por una fuerza externa $F(t)$. Por lo tanto, la segunda ley de Newton da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \text{fuerza de restauración} + \text{fuerza de amortiguamiento} + \text{fuerza externa}$$

$$= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Por esto, en lugar de la ecuación homogénea (3), el movimiento del resorte ahora está gobernado por la siguiente ecuación diferencial no homogénea

5 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

El movimiento del resorte se puede determinar por los métodos de la sección 17.2.

Un tipo de fuerza externa que ocurre con frecuencia es una función de fuerza periódica

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t \qquad \text{donde} \quad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{k/m}$$

En este caso, y en ausencia de una fuerza de amortiguamiento ($c = 0$), se pide en el ejercicio 9 usar el método de los coeficientes indeterminados para mostrar que

6 $$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

Si $\omega_0 = \omega$, entonces la frecuencia aplicada refuerza la frecuencia natural y el resultado son vibraciones de gran amplitud. Éste es el fenómeno de **resonancia** (véase el ejercicio 10).

CIRCUITOS ELÉCTRICOS

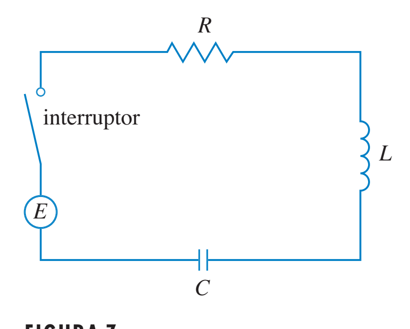


FIGURA 7

En las secciones 9.3 y 9.6, se pudieron usar ecuaciones lineales y ecuaciones separables de primer orden para analizar circuitos eléctricos que contienen un resistor y un inductor (véase figura 5 en la página 582 o la figura 4 de la página 605) o un resistor y capacitor (véase el ejercicio 29 en la página 607). Ahora que se sabe cómo resolver ecuaciones lineales de segundo orden, está en posición de analizar el circuito de la figura 7. Contiene una fuerza electromotriz E (suministrada por una batería o generador), un resistor R, un inductor L y un capacitor C, en serie. Si la carga en el capacitor en el tiempo t es $Q = Q(t)$, en seguida la corriente es la tasa de cambio de Q con respecto a t: $I = dQ/dt$. Como en la sección 9.5, se sabe por la física que las caídas de voltaje en el resistor, inductor y capacitor son

$$RI \qquad L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{Q}{C}$$

respectivamente. La ley del voltaje de Kirchhoff dice que la suma de estas caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Puesto que $I = dQ/dt$, esta ecuación se convierte en

7 $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. Si la carga Q_0 y la corriente I_0 se conocen para el tiempo 0, por lo tanto se tienen las condiciones iniciales

$$Q(0) = Q_0 \qquad Q'(0) = I(0) = I_0$$

y el problema de valores iniciales se puede resolver por los métodos de la sección 17.2.

Una ecuación diferencial para la corriente se obtiene al derivar la ecuación 7 con respecto a t y recordar que $I = dQ/dt$

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

V EJEMPLO 3 Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t en el circuito de la figura 7 si $R = 40\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 16 \times 10^{-4}$ F, $E(t) = 100\cos 10t$, y la carga inicial y la corriente son cero.

SOLUCIÓN Con los valores dados de L, R, C y $E(t)$, la ecuación 7 se convierte en

8 $$\frac{d^2Q}{dt^2} + 40\frac{dQ}{dt} + 625Q = 100\cos 10t$$

La ecuación auxiliar es $r^2 + 40r + 625 = 0$ con raíces

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

de modo que la solución de la ecuación complementaria es

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2\,\text{sen}\,15t)$$

Para el método de coeficientes indeterminados se prueba la solución particular

$$Q_p(t) = A\cos 10t + B\,\text{sen}\,10t$$

Entonces $$Q_p'(t) = -10A\,\text{sen}\,10t + 10B\cos 10t$$

$$Q_p''(t) = -100A\cos 10t - 100B\,\text{sen}\,10t$$

Al sustituir en la ecuación 8, se tiene

$$(-100A\cos 10t - 100B\,\text{sen}\,10t) + 40(-10A\,\text{sen}\,10t + 10B\cos 10t)$$
$$+ 625(A\cos 10t + B\,\text{sen}\,10t) = 100\cos 10t$$

o bien, $$(525A + 400B)\cos 10t + (-400A + 525B)\,\text{sen}\,10t = 100\cos 10t$$

Al igualar los coeficientes, se tiene

$$\begin{aligned} 525A + 400B &= 100 \\ -400A + 525B &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 21A + 16B &= 4 \\ -16A + 21B &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A = \frac{84}{697}$ y $B = \frac{64}{697}$, así que una solución particular es

$$Q_p(t) = \tfrac{1}{697}(84\cos 10t + 64\,\text{sen}\,10t)$$

y la solución general es

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_c(t) + Q_p(t) \\ &= e^{-20t}(c_1\cos 15t + c_2\,\text{sen}\,15t) + \tfrac{4}{697}(21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t) \end{aligned}$$

Al imponer la condición inicial $Q(0) = 0$, se obtiene

$$Q(0) = c_1 + \tfrac{84}{697} = 0 \qquad c_1 = -\tfrac{84}{697}$$

Para imponer la otra condición inicial se deriva primero para determinar la corriente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)\cos 15t + (-15c_1 - 20c_2)\,\text{sen}\,15t]$$
$$+ \tfrac{40}{697}(-21\,\text{sen}\,10t + 16\cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \tfrac{640}{697} = 0 \qquad c_2 = -\tfrac{464}{2091}$$

Así, la fórmula para la carga es

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63\cos 15t - 116\,\text{sen}\,15t) + (21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t)\right]$$

y la expresión para la corriente es

$$I(t) = \tfrac{1}{2091}[e^{-20t}(-1920\cos 15t + 13\,060\,\text{sen}\,15t) + 120(-21\,\text{sen}\,10t + 16\cos 10t)]$$

□

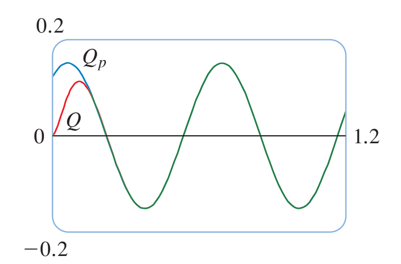


FIGURA 8

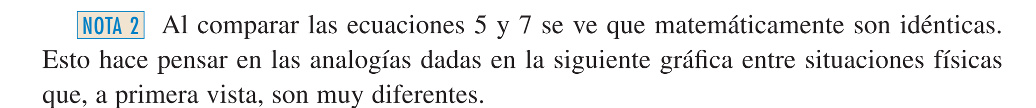
NOTA 1 En el ejemplo 3 la solución para $Q(t)$ consiste de dos partes. Puesto que $e^{-20t} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y tanto $15t$ como sen $15t$ son funciones acotadas,

$$Q_c(t) = \tfrac{4}{2091}e^{-20t}(-63\cos 15t - 116\,\text{sen}\,15t) \to 0 \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

Así, para valores grandes de t,

$$Q(t) \approx Q_p(t) = \tfrac{4}{697}(21\cos 10t + 16\,\text{sen}\,10t)$$

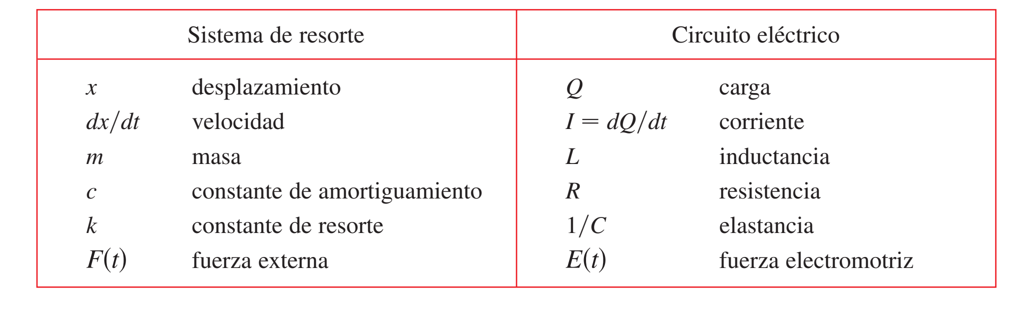
y, por esta razón, $Q_p(t)$ se llama **solución de estado estable**. En la figura 8 se muestra cómo la gráfica de la solución de estado estable se compara con la gráfica de Q en este caso.



NOTA 2 Al comparar las ecuaciones 5 y 7 se ve que matemáticamente son idénticas. Esto hace pensar en las analogías dadas en la siguiente gráfica entre situaciones físicas que, a primera vista, son muy diferentes.

5 $$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

7 $$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$



Sistema de resorte		Circuito eléctrico	
x	desplazamiento	Q	carga
dx/dt	velocidad	$I = dQ/dt$	corriente
m	masa	L	inductancia
c	constante de amortiguamiento	R	resistencia
k	constante de resorte	$1/C$	elastancia
$F(t)$	fuerza externa	$E(t)$	fuerza electromotriz

Se pueden transferir otras ideas de una situación a la otra. Por ejemplo, la solución de estado estable descrita en la nota 1 tiene sentido en el sistema de resorte. Y el fenómeno de resonancia en el sistema de resorte se puede transportar de manera conveniente a circuitos eléctricos como resonancia eléctrica.

17.3 EJERCICIOS

1. Un resorte tiene longitud natural de 0.75 m y una masa de 5 kg. Es necesaria una fuerza de 25 N para mantener estirado el resorte a una longitud de 1 m. Si el resorte se estira a una longitud de 1.1 m y luego se suelta con velocidad 0, encuentre la posición de la masa después de t segundos.

2. Un resorte con una masa de 8 kg se mantiene estirado 0.4 m más que su longitud natural mediante una fuerza de 32 N. El resorte inicia en su posición de equilibrio y se le aplica una velocidad inicial de 1 m/s. Encuentre la posición de la masa en cualquier tiempo t.

3. Un resorte con una masa de 2 kg tiene constante de amortiguamiento 14, y se requiere una fuerza de 6 N para mantener estirado al resorte 0.5 m más allá de su longitud natural. El resorte se estira 1 m más allá de su longitud natural y luego se libera con velocidad cero. Encuentre la posición de la masa en cualquier tiempo t.

4. Se hace necesaria una fuerza de 13 N para mantener un resorte de 2 kg de masa estirado 0.25 m más que su longitud natural. La constante de amortiguamiento del resorte es $c = 8$.
   (a) Si la masa empieza en la posición de equilibrio con una velocidad de 0.5 m/s, encuentre su posición en el tiempo t.
   (b) Grafique la función de posición de la masa.

5. Para el resorte del ejercicio 3, encuentre la masa que produciría amortiguamiento crítico.

6. Para el resorte del ejercicio 4, encuentre la constante de amortiguamiento que produciría amortiguamiento crítico.

7. Un resorte tiene una masa de 1 kg y su constante de resorte es $k = 100$. El resorte se libera en un punto 0.1 m arriba de su posición de equilibrio. Grafique la función de posición para los siguientes valores de la constante de amortiguamiento c: 10, 15, 20, 25, 30. ¿Qué tipo de amortiguamiento ocurre en cada caso?

8. Un resorte tiene una masa de 1 kg y su constante de amortiguamiento es $c = 10$. El resorte comienza desde su posición de equilibrio con una velocidad de 1 m/s. Grafique la función de posición para los siguientes valores de la constante del resorte k: 10, 20, 25, 30, 40. ¿Qué tipo de amortiguamiento ocurre en cada caso?

9. Suponga que un resorte tiene una masa m y constante de resorte k y sea $\omega = \sqrt{k/m}$. Suponga que la constante de amortiguamiento es tan pequeña que la fuerza de amortiguamiento es insignificante. Si se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$, donde $\omega_0 \neq \omega$, use el método de coeficientes indeterminados para mostrar que el movimiento de la masa se describe mediante la ecuación 6.

10. Como en el ejercicio 9, considere un resorte con masa m, constante de resorte k y constante de amortiguamiento $c = 0$, y sea $\omega = \sqrt{k/m}$. Si se aplica una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (la frecuencia aplicada es igual a la frecuencia natural), use el método de coeficientes indeterminados para mostrar que el movimiento de la masa está dado por $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t + (F_0/(2m\omega))t \operatorname{sen} \omega t$.

11. Muestre que si $\omega_0 \neq \omega$, pero ω/ω_0 es un número racional, entonces el movimiento descrito por la ecuación 6 es periódico.

12. Considere un resorte sujeto a una fuerza de fricción o amortiguamiento.
    (a) En el caso críticamente amortiguado, el movimiento está dado por $x = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Muestre que la gráfica de x cruza el eje t siempre que c_1 y c_2 tengan signos opuestos.
    (b) En el caso sobreamortiguado, el movimiento está dado por $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, donde $r_1 > r_2$. Determine una condición en las magnitudes relativas de c_1 y c_2 bajo la cual la gráfica de x cruza el eje t en un valor positivo de t.

13. Un circuito en serie consta de un resistor con $R = 20\ \Omega$, un inductor con $L = 1$ H, un capacitor con $C = 0.002$ F y una batería de 12 V. Si la carga inicial y la corriente son 0, encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.

14. Un circuito en serie contiene un resistor con $R = 24\ \Omega$, un inductor con $L = 2$ H, un capacitor con $C = 0.005$ F y una batería de 12 V. La carga inicial es $Q = 0.001$ C y la corriente inicial es 0.
    (a) Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.
    (b) Grafique las funciones de carga y corriente.

15. La batería del ejercicio 13 se remplaza por un generador que produce un voltaje de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$. Determine la carga en el tiempo t.

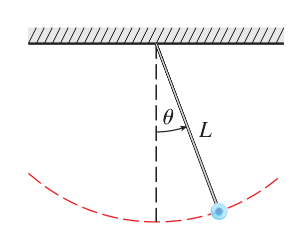
16. La batería del ejercicio 14 se remplaza por un generador que produce un voltaje de $E(t) = 12 \operatorname{sen} 10t$.
    (a) Encuentre la carga en el tiempo t.
    (b) Grafique la función de carga.

17. Compruebe que la solución a la ecuación 1 se puede escribir en la forma $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$.

18. En la figura se muestra un péndulo con longitud L y el ángulo θ desde la vertical al péndulo. Se puede demostrar que θ, como una función del tiempo, satisface la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Para valores pequeños de θ se puede usar la aproximación lineal $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ y luego la ecuación diferencial se vuelve lineal.
    (a) Encuentre la ecuación de movimiento de un péndulo con longitud 1 m si θ es inicialmente 0.2 rad y la velocidad angular inicial es $d\theta/dt = 1$ rad/s.
    (b) ¿Cuál es el ángulo máximo desde la vertical?
    (c) ¿Cuál es el periodo del péndulo (es decir, el tiempo para completar una oscilación)?
    (d) ¿Cuándo estará vertical el péndulo?
    (e) ¿Cuál es la velocidad angular cuando el péndulo es vertical?



17.4 SOLUCIONES EN FORMA DE SERIES

Muchas ecuaciones diferenciales se pueden resolver en forma explícita en términos de combinaciones finitas de funciones familiares simples. Esto es cierto cuando para una ecuación de apariencia simple como

1 $$y'' - 2xy' + y = 0$$

Pero es importante poder resolver ecuaciones como la ecuación 1 porque surgen de problemas físicos y, en particular, en relación con la ecuación de Schrödinger en mecánica cuántica. En tal caso se usa el método de series de potencias; es decir, se busca una solución de la forma.

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

El método es sustituir esta expresión en la ecuación diferencial y determinar los valores de los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Esta técnica se asemeja al método de los coeficientes indeterminados descritos en la sección 17.2.

Antes de usar series de potencias para resolver la ecuación 1, se ilustra el método en la ecuación más simple $y'' + y = 0$ en el ejemplo 1. Es cierto que ya se sabe cómo resolver esta ecuación mediante las técnicas de la sección 17.1, pero es más fácil entender el método de serie de potencias cuando se aplica a esta ecuación más simple.

V EJEMPLO 1 Use series de potencias para resolver la ecuación $y'' + y = 0$.

SOLUCIÓN Se supone que hay una solución de la forma

2 $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Se puede derivar la serie de potencias término a término, así que

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

3 $$y'' = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3 x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

A fin de comparar las expresiones para y y y'' de modo más fácil, se reescribe y'' como sigue:

■ Al escribir unos cuantos de los primeros términos de (4), se puede ver que es lo mismo que (3). Para obtener (4) se remplaza n por $n + 2$ y se comienza la suma en 0 en lugar de 2.

4 $$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

Al sustituir las expresiones de las ecuaciones 2 y 4 en la ecuación diferencial, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

o bien,

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} + c_n] x^n = 0$$

Si dos series de potencias son iguales, entonces los coeficientes correspondientes deben ser iguales. Por lo tanto, los coeficientes de x^n en la ecuación 5 deben ser 0:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$$

6 $$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

La ecuación 6 se llama *relación de recursión*. Si se conocen c_0 y c_1, esta ecuación permite determinar los demás coeficientes en forma recursiva al escribir $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en la sucesión.

Poner $n = 0$: $$c_2 = -\frac{c_0}{1 \cdot 2}$$

Poner $n = 1$: $$c_3 = -\frac{c_1}{2 \cdot 3}$$

Poner $n = 2$: $$c_4 = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} = \frac{c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{c_0}{4!}$$

Poner $n = 3$: $$c_5 = -\frac{c_3}{4 \cdot 5} = \frac{c_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{c_1}{5!}$$

Poner $n = 4$: $$c_6 = -\frac{c_4}{5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{4!\,5 \cdot 6} = -\frac{c_0}{6!}$$

Poner $n = 5$: $$c_7 = -\frac{c_5}{6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{5!\,6 \cdot 7} = -\frac{c_1}{7!}$$

Por ahora se ve el patrón:

Para los coeficientes pares, $c_{2n} = (-1)^n \dfrac{c_0}{(2n)!}$

Para los coeficientes impares, $c_{2n+1} = (-1)^n \dfrac{c_1}{(2n+1)!}$

Al colocar de nuevo estos valores en la ecuación 2, se escribe la solución como

$$\begin{aligned}
y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots \\
&= c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) \\
&\qquad + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \\
&= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

Observe que hay dos constantes arbitrarias, c_0 y c_1. □

NOTA 1 Se reconoce a la serie obtenida en el ejemplo 1 como la serie de Mclaurin para cos x y sen x. (Véanse las ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15.) Por lo tanto, se podría escribir la solución como

$$y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$$

Pero normalmente no se pueden expresar soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales en términos de funciones conocidas.

V EJEMPLO 2 Resuelva $y'' - 2xy' + y = 0$.

SOLUCIÓN Se supone que hay una solución de la forma

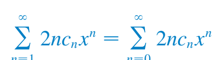
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Entonces $$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

y $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

como en el ejemplo 1. Al sustituir en la ecuación diferencial, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n] x^n = 0$$

Esta ecuación es cierta si el coeficiente de x^n es 0:

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} - (2n-1) c_n = 0$$

7 $$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+1)(n+2)} c_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Esta relación de recursión se resuelve al escribir $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sucesivamente en la ecuación 7:

Poner $n = 0$: $$c_2 = \frac{-1}{1 \cdot 2} c_0$$

Poner $n = 1$: $$c_3 = \frac{1}{2 \cdot 3} c_1$$

Poner $n = 2$: $$c_4 = \frac{3}{3 \cdot 4} c_2 = -\frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} c_0 = -\frac{3}{4!} c_0$$

Poner $n = 3$: $$c_5 = \frac{5}{4 \cdot 5} c_3 = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} c_1 = \frac{1 \cdot 5}{5!} c_1$$

Poner $n = 4$: $\quad c_6 = \dfrac{7}{5 \cdot 6} c_4 = -\dfrac{3 \cdot 7}{4!\, 5 \cdot 6} c_0 = -\dfrac{3 \cdot 7}{6!} c_0$

Poner $n = 5$: $\quad c_7 = \dfrac{9}{6 \cdot 7} c_5 = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9}{5!\, 6 \cdot 7} c_1 = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!} c_1$

Poner $n = 6$: $\quad c_8 = \dfrac{11}{7 \cdot 8} c_6 = -\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!} c_0$

Poner $n = 7$: $\quad c_9 = \dfrac{13}{8 \cdot 9} c_7 = \dfrac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!} c_1$

En general, los coeficientes pares están dados por

$$c_{2n} = -\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} c_0$$

y los coeficientes impares están dados por

$$c_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} c_1$$

La solución es

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots \\ &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{3 \cdot 7}{6!}x^6 - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{8!}x^8 - \cdots\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1 \cdot 5}{5!}x^5 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9}{7!}x^7 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13}{9!}x^9 + \cdots\right) \end{aligned}$$

o bien,

8
$$\begin{aligned} y &= c_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}\right) \\ &\quad + c_1\left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$ □

NOTA 2 En el ejemplo 2, se tuvo que suponer que la ecuación diferencial tenía una solución en serie. Pero ahora se podría verificar de modo directo que la función dada por la ecuación 8 es en realidad una solución.

NOTA 3 A diferencia de la situación del ejemplo 1, la serie de potencias que surge en la solución del ejemplo 2, no define funciones elementales. Las funciones

$$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (4n - 5)}{(2n)!} x^{2n}$$

y

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n - 3)}{(2n + 1)!} x^{2n+1}$$

son funciones perfectamente buenas, pero no se pueden expresar en términos de funciones familiares. Se puede usar estas expresiones en series de potencias para y_1 y y_2 para calcular valores aproximados de las funciones e incluso graficarlas. En la figura 1 se muestran algunas de las primeras sumas parciales $T_0, T_2, T_4, \ldots$ (polinomios de Taylor) para $y_1(x)$, y cómo convergen a y_1. De esta manera se puede dibujar y_1 y y_2 en la figura 2.

FIGURA 1

NOTA 4 Si se pidiera resolver el problema de valores iniciales

$$y'' - 2xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

se observaría del teorema 11.10.5 que

$$c_0 = y(0) = 0 \qquad c_1 = y'(0) = 1$$

Esto simplificaría los cálculos del ejemplo 2, puesto que todos los coeficientes pares serían 0. La solución al problema de valores iniciales es

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

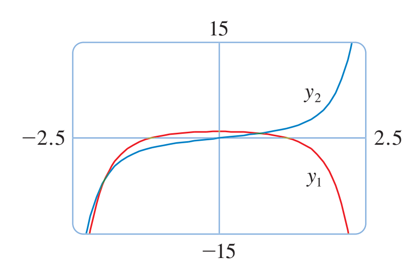


FIGURA 2

17.4 EJERCICIOS

1–11 Use series de potencias para resolver la ecuación diferencial.

1. $y' - y = 0$
2. $y' = xy$
3. $y' = x^2y$
4. $(x-3)y' + 2y = 0$
5. $y'' + xy' + y = 0$
6. $y'' = y$
7. $(x-1)y'' + y' = 0$
8. $y'' = xy$
9. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
10. $y'' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' + x^2y' + xy = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

12. La solución del problema de valores iniciales

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

se llama función de Besel de orden 0.

(a) Resuelva el problema de valores iniciales para hallar un desarrollo en serie de potencias para la función de Besel.

(b) Grafique varios polinomios de Taylor hasta que llegue a lo que se parece una buena aproximación a la función de Bessel en el intervalo $[-5, 5]$.

17 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
   (b) Escriba la ecuación auxiliar.
   (c) ¿Cómo usa las raíces de la ecuación auxiliar para resolver la ecuación diferencial? Escriba la forma de la solución para cada uno de los tres casos que pueden ocurrir.
2. (a) ¿Cuál es el problema de valores iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden?
   (b) ¿Cuál es un problema de valores en la frontera para tal ecuación?
3. (a) Escriba la forma general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes.
   (b) ¿Cuál es la ecuación complementaria? ¿Cómo ayuda a resolver la ecuación diferencial original?
   (c) Explique como funciona el método de coeficientes indeterminados.
   (d) Explique como funciona el método de variación de parámetros.
4. Describa dos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.
5. ¿Cómo usa las series de potencias para resolver una ecuación diferencial?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que desapruebe el enunciado.

1. Si y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + y = 0$, por lo tanto $y_1 + y_2$ es también una solución de la ecuación.

2. Si y_1 y y_2 son soluciones de $y'' + 6y' + 5y = x$, en tal caso $c_1y_1 + c_2y_2$ es también una solución de la ecuación.

3. La solución general de $y'' - y = 0$ se puede escribir como

$$y = c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x$$

4. La ecuación $y'' - y = e^x$ tiene una solución particular de la forma

$$y_p = Ae^x$$

EJERCICIOS

1–10 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $y'' - 2y' - 15y = 0$

2. $y'' + 4y' + 13y = 0$

3. $y'' + 3y = 0$

4. $4y'' + 4y' + y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x\cos x$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \operatorname{sen} 2x$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - 6y = 1 + e^{-2x}$

10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi/2$

11–14 Resuelva el problema de valores iniciales.

11. $y'' + 6y' = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 12$

12. $y'' - 6y' + 25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

13. $y'' - 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

14. $9y'' + y = 3x + e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

15. Use series de potencias para resolver el problema de valores iniciales

$$y'' + xy' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$$

16. Use series de potencias para resolver la ecuación

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

17. Un circuito en serie contiene un resistor con $R = 40\ \Omega$, un inductor con $L = 2$ H, un capacitor con $C = 0.0025$ F y una batería de 12 V. La carga inicial es $Q = 0.01$ C y la corriente inicial es 0. Determine la carga en el tiempo t.

18. Un resorte con masa de 2 kg tiene constante de amortiguamiento 16, y una fuerza de 12.8 N mantiene al resorte estirado 0.2 m más allá de su longitud natural. Encuentre la posición de la masa en el tiempo t si empieza en la posición de equilibrio con una velocidad de 2.4 m/s.

19. Suponga que la Tierra es una esfera sólida de densidad uniforme con masa M y radio $R = 3\,960$ millas. Para una partícula de masa m dentro de la tierra a una distancia r desde el centro de la Tierra, la fuerza gravitacional que atrae a la partícula hacia el centro es

$$F_r = \frac{-GM_rm}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y M_r es la masa de la Tierra dentro de la esfera de radio r.

(a) Muestre que $F_r = \dfrac{-GMm}{R^3}r$.

(b) Suponga que se taladra un orificio a través de la Tierra a lo largo de un diámetro. Muestre que si se deja caer desde el reposo una partícula de masa m, en la superficie, hacia el agujero, entonces la distancia $y = y(t)$ de la partícula desde el centro de la Tierra en el tiempo t está dada por

$$y''(t) = -k^2y(t)$$

donde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Concluya del inciso (b) que la partícula experimenta movimiento armónico simple. Encuentre el periodo T.

(d) ¿Con qué velocidad la partícula pasa por el centro de la Tierra?

APÉNDICES

F Pruebas de teoremas

H Números complejos

I Respuestas a ejercicios impares

F PRUEBAS DE TEOREMAS

En este apéndice aparecen pruebas de varios teoremas que se presentan en el cuerpo principal del texto. Las secciones en las que aparecen están indicadas al margen.

SECCIÓN 11.8

Para demostrar el teorema 11.8.3, primero necesita los siguientes resultados.

TEOREMA

1. Si una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ converge cuando $x = b$ (donde $b \neq 0$), entonces converge siempre que $|x| < |b|$.
2. Si una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cuando $x = d$ (donde $d \neq 0$), entonces diverge siempre que $|x| > |b|$.

PRUEBA DE 1 Suponga que $\Sigma\, c_n b^n$ converge. Entonces, por el teorema 11.2.3, tiene $\lim_{n\to\infty} c_n b^n = 0$. Según la definición 11.1.2 con $\varepsilon = 1$, hay un entero positivo N tal que $|c_n b^n| < 1$ siempre que $n \geqslant N$. Entonces, para $n \geqslant N$

$$|c_n x^n| = \left|\frac{c_n b^n x^n}{b^n}\right| = |c_n b^n| \left|\frac{x}{b}\right|^n < \left|\frac{x}{b}\right|^n$$

Si $|x| < |b|$, entonces $|x/b| < 1$, y $\Sigma\, |x/b|^n$ es una serie geométrica convergente. Por lo tanto, por la prueba de comparación, la serie $\Sigma_{n=N}^{\infty} |c_n x^n|$ es convergente. Entonces la serie $\Sigma\, c_n x^n$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente. □

PRUEBA DE 2 Suponga que $\Sigma\, c_n d^n$ diverge. Si x es cualquier número tal que $|x| > |d|$, entonces $\Sigma\, c_n x^n$ no puede convergir porque, por la parte 1, la convergencia de $\Sigma\, c_n x^n$ implicaría la convergencia de $\Sigma\, c_n d^n$. En consecuencia, $\Sigma\, c_n x^n$ diverge siempre que $|x| > |d|$. □

TEOREMA Para una serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ hay sólo tres posibilidades:

1. La serie converge sólo cuando $x = 0$.
2. La serie converge para toda x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$.

PRUEBA Suponga que ninguno de los casos 1 y 2 es verdadero. Entonces hay números b y d diferentes de cero tales que $\Sigma\, c_n x^n$ converge para $x = b$ y diverge para $x = d$. Por lo tanto, el conjunto $S = \{x \,|\, \Sigma\, c_n x^n \text{ converge}\}$ no es vacío. Por el teorema precedente, la serie diverge si $|x| > |d|$, de modo que $|x| \leqslant |d|$ para toda $x \in S$. Esto dice que $|d|$ es un límite superior para el conjunto S. Entonces, por el axioma de plenitud (véase la sección 11.1), S tiene al menos un límite superior R. Si $|x| > R$, entonces $x \notin S$, de modo que $\Sigma\, c_n x^n$ diverge. Si $|x| < R$, entonces $|x|$ no es un límite superior para S y entonces existe $b \in S$ tal que $b > |x|$. Como $b \in S$, $\Sigma\, c_n b^n$ converge y, por el teorema precedente, $\Sigma\, c_n x^n$ converge. □

3 TEOREMA Para una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

1. La serie converge sólo cuando $x = a$.
2. La serie converge para toda x.
3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$.

PRUEBA Si hace el cambio de variable $u = x - a$, entonces la serie de potencias se convierte en $\sum c_n u^n$ y puede aplicar el teorema precedente a esta serie. En el caso 3 hay convergencia para $|u| < R$ y divergencia para $|u| > R$. Entonces hay convergencia para $|x-a| < R$ y divergencia para $|x-a| > R$. □

SECCIÓN 14.3

TEOREMA DE CLAIRAUT Suponga que f está definida en un disco D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, ambas entonces $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

PRUEBA Para valores pequeños de h, $h \neq 0$, considere la diferencia

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)]$$

Note que si hace $g(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$, entonces

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a)$$

Por el teorema de valor medio, hay un número c entre a y $a + h$ tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)h = h[f_x(c, b+h) - f_x(c, b)]$$

Aplicando de nuevo el teorema de valor medio, esta vez a f_x, obtiene un número d entre b y $b + h$ tal que

$$f_x(c, b+h) - f_x(c, b) = f_{xy}(c, d)h$$

Con la combinación de estas ecuaciones obtiene

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c, d)$$

Si $h \to 0$, entonces $(c, d) \to (a, b)$, de modo que la continuidad de f_{xy} en (a, b) da

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{(c, d) \to (a, b)} f_{xy}(c, d) = f_{xy}(a, b)$$

Del mismo modo, escribiendo

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - (a, b)]$$

y usando el teorema de valor medio dos veces y la continuidad de f_{yx} en (a, b), obtiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(a, b)$$

Se deduce que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. □

SECCIÓN 14.4

8 TEOREMA Si las derivadas parciales f_x y f_y existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es derivable en (a, b).

PRUEBA Sea

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Según (14.4.7), para demostrar que f es derivable en (a, b) tiene que demostrar que puede escribir Δz en la forma

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

De la figura 1, puede escribir

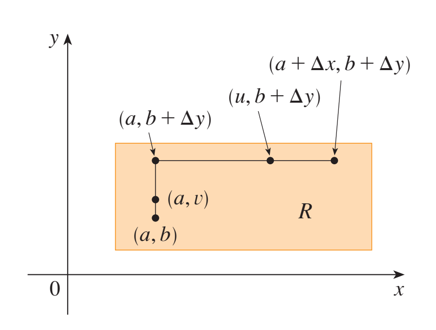


FIGURA 1

$$\boxed{1} \quad \Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)]$$

Observe que la función de una sola variable

$$g(x) = f(x, b + \Delta y)$$

está definida en el intervalo $[a, a + \Delta x]$ y $g'(x) = f_x(x, b + \Delta y)$. Si aplica el teorema de valor medio a g, obtiene

$$g(a + \Delta x) - g(a) = g'(u)\,\Delta x$$

donde u es algún número entre a y $a + \Delta x$. En términos de f, esta ecuación se convierte en

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x$$

Esto da una expresión para la primera parte del lado derecho de la ecuación 1. Para la segunda parte $h(y) = f(a, y)$. Entonces h es una función de una sola variable definida en el intervalo $[b, b + \Delta y]$ y $h'(y) = f_y(a, y)$. Una segunda aplicación del teorema de valor medio da, entonces

$$h(b + \Delta y) - h(b) = h'(v)\,\Delta y$$

donde v es algún número entre b y $b + \Delta y$. En términos de f, esto se convierte en

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v)\,\Delta y$$

Ahora sustituya estas expresiones en la ecuación 1 y obtiene

$$\begin{aligned}\Delta z &= f_x(u, b + \Delta y)\,\Delta x + f_y(a, v)\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + [f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y \\ &\qquad + [f_y(a, v) - f_y(a, b)]\,\Delta y \\ &= f_x(a, b)\,\Delta x + f_y(a, b)\,\Delta y + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Exprese el número $\dfrac{-1 + 3i}{2 + 5i}$ en la forma $a + bi$.

SOLUCIÓN Multiplique el numerador y el denominador por el conjugado complejo de $2 + 5i$, es decir $2 - 5i$, y aproveche el resultado del ejemplo 1:

$$\frac{-1 + 3i}{2 + 5i} = \frac{-1 + 3i}{2 + 5i} \cdot \frac{2 - 5i}{2 - 5i} = \frac{13 + 11i}{2^2 + 5^2} = \frac{13}{29} + \frac{11}{29}i \qquad \square$$

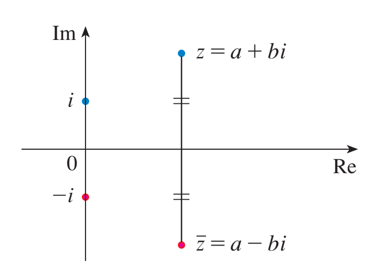


FIGURA 2

La interpretación geométrica del conjugado complejo se muestra en la figura 2: $\bar{z}$ es la reflexión de z en el eje real. A continuación aparece una lista de algunas de las propiedades del conjugado complejo. Las pruebas se siguen de la definición y se requieren en el ejercicio 18.

PROPIEDADES DE CONJUGADOS

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w} \qquad \overline{z^n} = \bar{z}^n$$

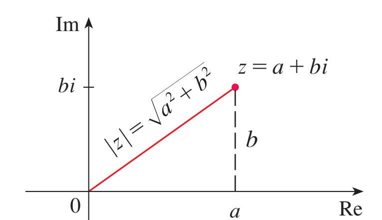


FIGURA 3

El **módulo,** o **valor absoluto,** $|z|$ de un número complejo $z = a + bi$ es su distancia desde el origen. De la figura 3 es claro que si $z = a + bi$, entonces

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Note que

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

y por lo tanto

$$z\bar{z} = |z|^2$$

Esto explica por qué el procedimiento de división del ejemplo 2 funciona en general:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$$

Como $i^2 = -1$, puede considerar i como una raíz cuadrada de -1. Pero observe que también tiene $(-i)^2 = i^2 = -1$ y por lo tanto $-i$ es también una raíz cuadrada de -1. Entonces i es la **raíz cuadrada principal** de -1 y se escribe $\sqrt{-1} = i$. En general si c es un número positivo, escriba

$$\sqrt{-c} = \sqrt{c}\, i$$

Con esta convención, la derivación y fórmula usuales para las raíces de la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son válidas incluso cuando $b^2 - 4ac < 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 3 Encuentre las raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

SOLUCIÓN Use la fórmula cuadrática y

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \qquad \square$$

donde
$$\varepsilon_1 = f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)$$
$$\varepsilon_2 = f_y(a, v) - f_y(a, b)$$

Como $(u, b + \Delta y) \to (a, b)$ y $(a, v) \to (a, b)$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ y como f_x y f_y son continuas en (a, b), $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Por lo tanto, f es derivable en (a, b). □

H NÚMEROS COMPLEJOS

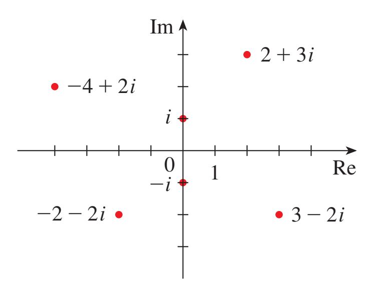


FIGURA 1
Números complejos como puntos en el plano Argand

Un **número complejo** puede ser representado por una expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es un símbolo con la propiedad de que $i^2 = -1$. El número complejo $a + bi$ también puede ser representado por el par ordenado (a, b) y trazado en un plano (llamado plano Argand) como se ve en la figura 1. Así, el número complejo $i = 0 + 1 \cdot i$ está identificado con el punto $(0, 1)$.

La **parte real** del número complejo $a + bi$ es el número real a y la **parte imaginaria** es el número real b. Entonces la parte real de $4 - 3i$ es 4 y la parte imaginaria es -3. Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** si $a = c$ y $b = d$; esto es, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En el plano Argand el eje horizontal se denomina eje real y el eje vertical es el eje imaginario.

La suma y diferencia de dos números complejos están definidas al sumar o restar sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Por ejemplo,

$$(1 - i) + (4 + 7i) = (1 + 4) + (-1 + 7)i = 5 + 6i$$

El producto de números complejos se define de modo que se cumplan las leyes usuales conmutativa y distributiva:

$$(a + bi)(c + di) = a(c + di) + (bi)(c + di)$$
$$= ac + adi + bci + bdi^2$$

Como $i^2 = -1$, esto se convierte en

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

EJEMPLO 1

$$(-1 + 3i)(2 - 5i) = (-1)(2 - 5i) + 3i(2 - 5i)$$
$$= -2 + 5i + 6i - 15(-1) = 13 + 11i$$ □

La división de números complejos es muy semejante a racionalizar el denominador de una expresión racional. Para el número complejo $z = a + bi$, se define su **complejo conjugado** como $\bar{z} = a - bi$. Para hallar el cociente de dos números complejos multiplique el numerador y el denominador por el conjugado complejo del denominador.

Observe que las soluciones de la ecuación del ejemplo 3 son conjugados complejos entre sí. En general, las soluciones de cualquier ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes reales, a, b y c son siempre conjugados complejos. (Si z es real, $\overline{z} = z$, de modo que z es su propio conjugado.)

Ha visto que si deja números complejos como soluciones, entonces toda ecuación cuadrática tiene una solución. En forma más general, es verdadero que toda ecuación con polinomios

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

de grado al menos uno tiene una solución entre los números complejos. Este dato se conoce como teorema fundamental de álgebra y fue demostrado por Gauss.

FORMA POLAR

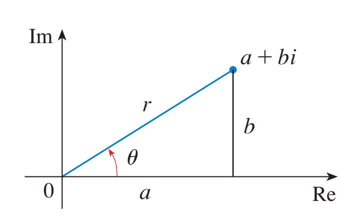


FIGURA 4

Sabe que cualquier número complejo $z = a + bi$ puede ser considerado como un punto (a, b) y que cualquiera de estos puntos puede ser representado por coordenadas polares (r, θ) con $r \geqslant 0$. De hecho,

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\operatorname{sen}\theta$$

como en la figura 4. Por lo tanto

$$z = a + bi = (r\cos\theta) + (r\operatorname{sen}\theta)i$$

Entonces se escribe cualquier número complejo z en la forma

$$z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

donde $\qquad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad$ y $\qquad \tan\theta = \dfrac{b}{a}$

El ángulo θ se llama **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg(z)$. Note que $\arg(z)$ no es único; cualesquier dos argumentos de z difieren por un múltiplo entero de 2π.

EJEMPLO 4 Escriba los siguientes números en forma polar.

(a) $z = 1 + i$ (b) $w = \sqrt{3} - i$

SOLUCIÓN

(a) Tiene $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ y $\tan\theta = 1$, de modo que puede tomar $\theta = \pi/4$. Por lo tanto, la forma polar es

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Aquí tiene $r = |w| = \sqrt{3 + 1} = 2$ y $\tan\theta = -1/\sqrt{3}$. Como w está en el cuarto cuadrante, tome $\theta = -\pi/6$ y

$$w = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

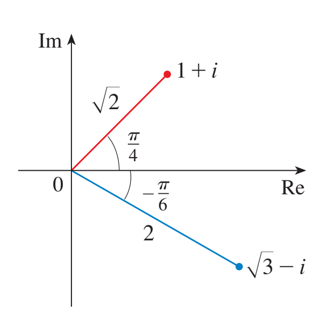


FIGURA 5

Los números z y w se muestran en la figura 5. □

La forma polar de números complejos da idea de la multiplicación y división. Sean

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2)$$

dos números complejos escritos en forma polar. Entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \mathrm{sen}\,\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + i(\mathrm{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\mathrm{sen}\,\theta_2)] \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando las fórmulas de la adición para coseno y seno, tiene

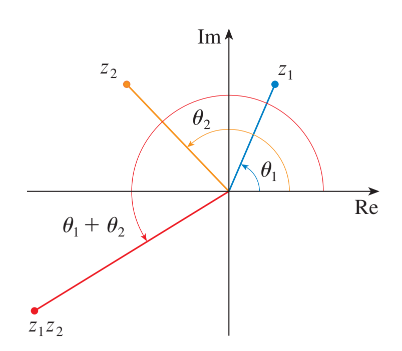


FIGURA 6

1 $$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Esta formula dice que *para multiplicar dos números complejos multiplique los módulos y sume los argumentos.* (Véase Figura 6.)

Un argumento similar que usa las fórmulas de sustracción para coseno y seno muestra que *para dividir dos números complejos divida los módulos y reste los argumentos.*

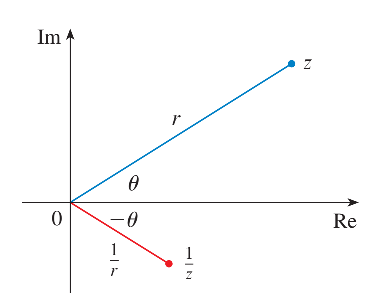
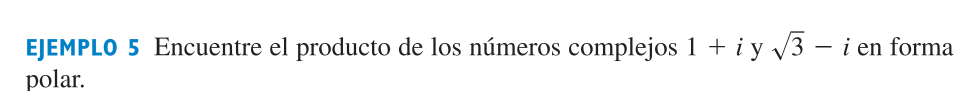


FIGURA 7

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad z_2 \neq 0$$

En particular, tomando $z_1 = 1$ y $z_2 = z$ (y por lo tanto $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \theta$), tiene lo siguiente, que se ilustra en la figura 7.

$$\text{Si} \quad z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta), \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta).$$



EJEMPLO 5 Encuentre el producto de los números complejos $1 + i$ y $\sqrt{3} - i$ en forma polar.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 tiene

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$$

y

$$\sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Entonces, por la ecuación 1,

$$\begin{aligned} (1 + i)(\sqrt{3} - i) &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

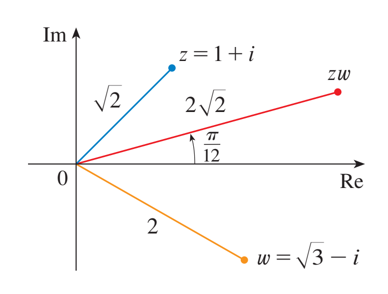


FIGURA 8

Esto se ilustra en la figura 8. □

El uso repetido de la fórmula 1 muestra cómo calcular potencias de un número complejo. Si

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

entonces
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

y
$$z^3 = zz^2 = r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

En general, se otiene el siguiente resultado, que recibe ese nombre en honor al matemático francés Abraham De Moivre (1667-1754).

2 TEOREMA DE DE MOIVRE Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces

$$z^n = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Esto dice que *para tomar la n potencia de un número complejo tome la n potencia del módulo y multiplique el argumento por n.*

EJEMPLO 6 Encuentre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

SOLUCIÓN Como $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, se deduce del ejemplo 4(a) que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ tiene la forma polar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Entonces, por el teorema de De Moivre,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i$$ □

El teorema de De Moivre también se puede usar para hallar las n raíces de números complejos. Una n raíz del número complejo z es un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Escribiendo estos dos números en forma trigonométrica como

$$w = s(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) \qquad \text{y} \qquad z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

y usando el teorema de De Moivre, obtiene

$$s^n(\cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

La igualdad de estos dos números complejos demuestra que

$$s^n = r \qquad \text{o} \qquad s = r^{1/n}$$

o bien
$$\cos n\phi = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} n\phi = \operatorname{sen}\theta$$

Del hecho de que el seno y coseno tienen periodo 2π se deduce que

$$n\phi = \theta + 2k\pi \qquad \text{o} \qquad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Entonces
$$w = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Como esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, tiene lo siguiente.

3 RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y sea n un entero positivo. Entonces z tiene las n raíces n-ésimas distintas.

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Observe que cada una de las n-ésimas raíces de z tiene módulo $|w_k| = r^{1/n}$. Entonces todas las n-ésimas raíces de z están en el círculo de radio $r^{1/n}$ del plano complejo. También, como el argumento de cada n-ésima raíz sucesiva es mayor que el argumento de la raíz previa en $2\pi/n$, se ve que las n-ésimas raíces de z están igualmente espaciadas en este círculo.

EJEMPLO 7 Encuentre las seis raíces sextas de $z = -8$ y grafique estas raíces en el plano complejo.

SOLUCIÓN En forma trigonométrica, $z = 8(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Aplicando la ecuación 3 con $n = 6$, obtiene

$$w_k = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

Obtiene las seis raíces sextas de -8 al tomar $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en esta fórmula:

$$w_0 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_1 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\, i$$

$$w_2 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_3 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$w_4 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{2}\, i$$

$$w_5 = 8^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

Todos estos puntos se encuentran en el círculo de radio $\sqrt{2}$ como se muestra en la figura 9. □

EXPONENCIALES COMPLEJOS

También necesita dar un significado a la expresión e^z cuando $z = x + iy$ es un número complejo. La teoría de series infinitas como se desarrolló en el capítulo 11 se puede ampliar al caso donde los términos son números complejos. Usando la serie de Taylor para e^x (11.10.11) como guía, se define

4 $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

y resulta que esta función exponencial compleja tiene las mismas propiedades que la función exponencial real. En particular, es verdadero que

5 $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

Si en la ecuación 4 pone $z = iy$, donde y es un número real, y use el hecho de que

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \ldots$$

obtiene

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Aquí se ha empleado la serie de Taylor para $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ (ecuaciones 11.10.16 y 11.10.15). El resultado es una famosa fórmula llamada **fórmula de Euler:**

6 $$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Combinando la fórmula de Euler con la ecuación 5, obtiene

7 $$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

EJEMPLO 8 Evalúe: (a) $e^{i\pi}$ (b) $e^{-1+i\pi/2}$

SOLUCIÓN

(a) De la ecuación de Euler (6) tiene

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1 + i(0) = -1$$

(b) Usando la ecuación 7 obtiene

$$e^{-1+i\pi/2} = e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{e}[0 + i(1)] = \frac{i}{e}$$ □

■ Podría escribir el resultado del ejemplo 8(a) como

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Esta ecuación relaciona los cinco números más famosos en todas las matemáticas: 0, 1, e, i y π

Por último, observe que la ecuación de Euler da un método más fácil de demostrar el teorema de De Moivre:

$$[r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

H EJERCICIOS

1–14 Evalúe la expresión y escriba su respuesta en la forma $a + bi$.

1. $(5 - 6i) + (3 + 2i)$ **2.** $\left(4 - \frac{1}{2}i\right) - \left(9 + \frac{5}{2}i\right)$

3. $(2 + 5i)(4 - i)$ **4.** $(1 - 2i)(8 - 3i)$

5. $\overline{12 + 7i}$ **6.** $\overline{2i\left(\frac{1}{2} - i\right)}$

7. $\dfrac{1 + 4i}{3 + 2i}$ **8.** $\dfrac{3 + 2i}{1 - 4i}$

9. $\dfrac{1}{1 + i}$ **10.** $\dfrac{3}{4 - 3i}$

11. i^3 **12.** i^{100}

13. $\sqrt{-25}$ **14.** $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

15–17 Encuentre el conjugado complejo y el módulo del número.

15. $12 - 5i$ **16.** $-1 + 2\sqrt{2}\,i$ **17.** $-4i$

18. Demuestre las siguientes propiedades de números complejos.
(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (b) $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$
(c) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, donde n es un entero positivo.
[*Sugerencia:* Escriba $z = a + bi$, $w = c + di$.]

19–24 Encuentre todas las soluciones de la ecuación.

19. $4x^2 + 9 = 0$ **20.** $x^4 = 1$

21. $x^2 + 2x + 5 = 0$ **22.** $2x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $z^2 + z + 2 = 0$ **24.** $z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} = 0$

25–28 Escriba el número en forma polar con argumento entre 0 y 2π.

25. $-3 + 3i$ **26.** $1 - \sqrt{3}i$

27. $3 + 4i$ **28.** $8i$

29–32 Encuentre formas polares para zw, z/w, y $1/z$ al poner primero z y w en forma polar.

29. $z = \sqrt{3} + i, \quad w = 1 + \sqrt{3}i$

30. $z = 4\sqrt{3} - 4i, \quad w = 8i$

31. $z = 2\sqrt{3} - 2i, \quad w = -1 + i$

32. $z = 4\left(\sqrt{3} + i\right), \quad w = -3 - 3i$

33–36 Encuentre el potencia indicada usando el teorema de De Moivre.

33. $(1 + i)^{20}$ **34.** $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^5$

35. $\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^5$ **36.** $(1 - i)^8$

37–40 Encuentre las raíces indicadas. Trace las raíces en el plano complejo.

37. las raíces octavas de 1 **38.** las raíces quintas de 32

39. las raíces cúbicas de i **40.** las raíces cúbicas de $1 + i$

41–46 Escriba el número en la forma $a + bi$.

41. $e^{i\pi/2}$ **42.** $e^{2\pi i}$ **43.** $e^{i\pi/3}$

44. $e^{-i\pi}$ **45.** $e^{2+i\pi}$ **46.** $e^{\pi+i}$

47. Use el teorema de De Moivre con $n = 3$ para expresar $\cos 3\theta$ y $\operatorname{sen} 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

48. Use la fórmula de Euler para demostrar las fórmulas siguientes para $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

49. Si $u(x) = f(x) + ig(x)$ es una función de valor complejo de una variable real x y las partes reales e imaginarias $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables de x, entonces la derivada de u se define como $u'(x) = f'(x) + ig'(x)$. Use esto junto con la ecuación 7 para demostrar que si $F(x) = e^{rx}$, entonces $F'(x) = re^{rx}$ cuando $r = a + bi$ es un número complejo.

50. (a) Si u es una función de valor complejo de una variable real, su integral $\int u(x)\,dx$ es una antiderivada de u. Evalúe

$$\int e^{(1+i)x}\,dx$$

(b) Al considerar las partes real e imaginaria de la integral de la parte (a), evalúe las integrales reales

$$\int e^x \cos x\,dx \qquad \text{y} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

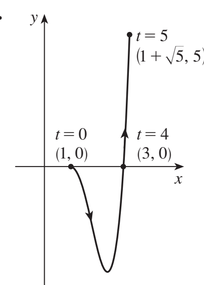
(c) Compare con el método empleado en el ejemplo 4 de la Sección 7.1.

I RESPUESTAS A EJERCICIOS IMPARES

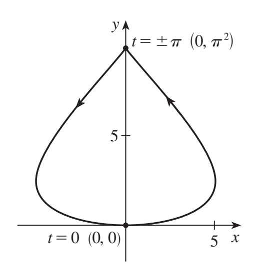
CAPÍTULO 10

EJERCICIOS 10.1 ■ PÁGINA 626

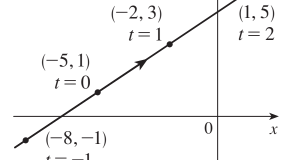
1.



3.

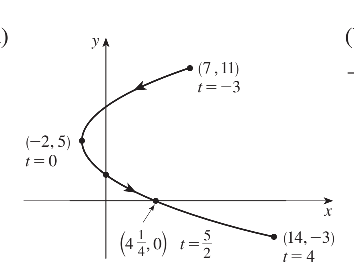


5. (a)



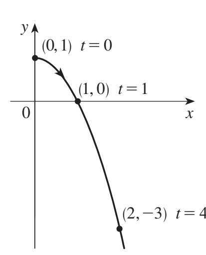
(b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

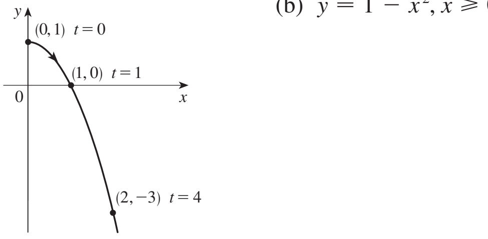
7. (a)



(b) $x = \frac{1}{4}(y-5)^2 - 2$, $-3 \leqslant y \leqslant 11$

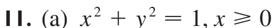
9. (a)



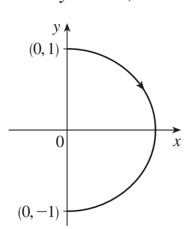


(b) $y = 1 - x^2, x \geqslant 0$

11. (a) $x^2 + y^2 = 1, x \geqslant 0$

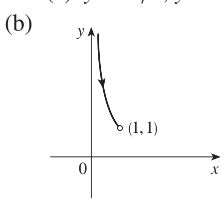


(b)

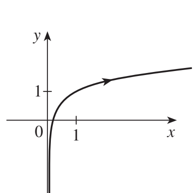


13. (a) $y = 1/x, y > 1$

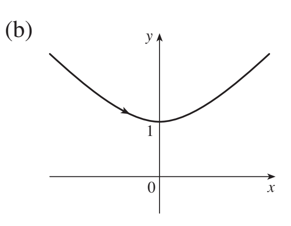
(b)



15. (a) $y = \frac{1}{2}\ln x + 1$ (b)



17. (a) $x^2 - y^2 = 1, x \geqslant 1$ (b)

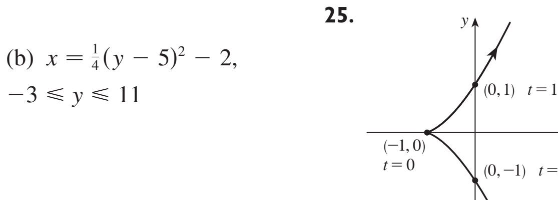


19. Se mueve en sentido contrario al de las agujas de un reloj a lo largo del círculo $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$ de (3, 3) a (3, −1)

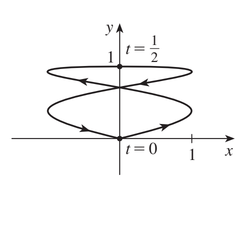
21. Se mueve tres veces en sentido de las agujas de un reloj alrededor de la elipse $(x^2/25) + (y^2/4) = 1$, comenzando y terminando en (0, −2)

23. Está contenida en el rectángulo descrito por $1 \leqslant x \leqslant 4$ y $2 \leqslant y \leqslant 3$.

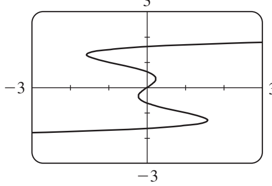
25.



27.



29.



31. (b) $x = -2 + 5t, y = 7 - 8t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

33. (a) $x = 2\cos t, y = 1 - 2\operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

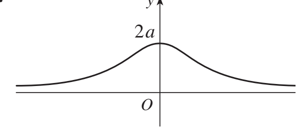
(b) $x = 2\cos t, y = 1 + 2\operatorname{sen} t, 0 \leqslant t \leqslant 6\pi$

(c) $x = 2\cos t, y = 1 + 2\operatorname{sen} t, \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

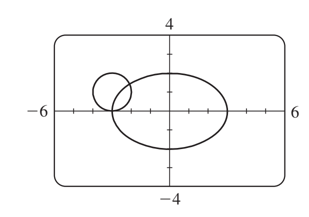
37. La curva $y = x^{2/3}$ se genera en (a). En (b), sólo la parte con $x \geqslant 0$ se genera, y en (c) obtiene sólo la parte con $x > 0$.

41. $x = a\cos\theta, y = b\operatorname{sen}\theta$; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, elipse

43.



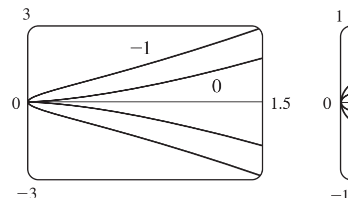
45. (a) Dos puntos de intersección

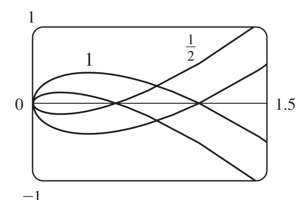


(b) Un punto de colisión en $(-3, 0)$ cuando $t = 3\pi/2$

(c) Todavía hay dos puntos de intersección, pero no punto de colisión.

47. Para $c = 0$, hay una cúspide; para $c > 0$, hay un lazo cuyo tamaño aumenta cuando c aumenta.





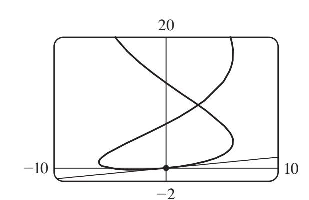
49. Cuando n aumenta, el número de oscilaciones aumenta; a y b determinan el ancho y altura.

EJERCICIOS 10.2 ■ PÁGINA 636

1. $\dfrac{2t + 1}{t\cos t + \operatorname{sen} t}$ **3.** $y = -x$

5. $y = -(2/e)x + 3$ **7.** $y = 2x + 1$

9. $y = \frac{1}{6}x$



11. $1 + \frac{3}{2}t$, $3/(4t)$, $t > 0$

13. $-e^{-t}$, $e^{-t}/(1 - e^{t})$, $t < 0$

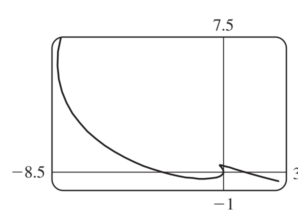
15. $-\frac{3}{2}\tan t$, $-\frac{3}{4}\sec^3 t$, $\pi/2 < t < 3\pi/2$

17. Horizontal en $(6, \pm 16)$, vertical en $(10, 0)$

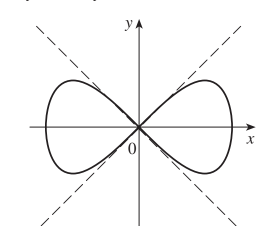
19. Horizontal en $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ (cuatro puntos), vertical en $(\pm 2, 0)$

21. $(0.6, 2)$; $(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}})$

23.



25. $y = x$, $y = -x$



27. (a) $d \operatorname{sen}\theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $\left(\frac{16}{27}, \frac{29}{9}\right)$, $(-2, -4)$

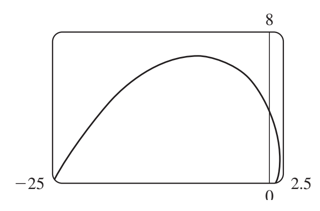
31. πab **33.** $3 - e$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$

37. $\int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2}\,dt \approx 3.1678$

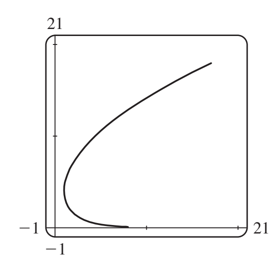
39. $\int_0^{2\pi} \sqrt{3 - 2\operatorname{sen} t - 2\cos t}\,dt \approx 10.0367$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $-\sqrt{10}/3 + \ln(3 + \sqrt{10}) + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

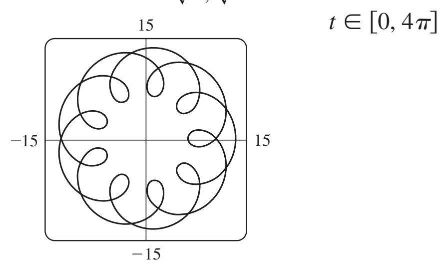


47. $e^3 + 11 - e^{-8}$



49. 612.3053 **51.** $6\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$

55. (a) $t \in [0, 4\pi]$



(b) ≈ 294

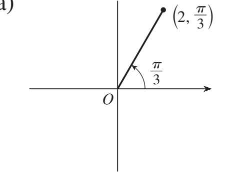
57. $\int_0^1 2\pi(t^2 + 1)e^t\sqrt{e^{2t}(t + 1)^2(t^2 + 2t + 2)}\,dt \approx 103.5999$

59. $\frac{2}{1215}\pi(247\sqrt{13} + 46)$ **61.** $\frac{6}{5}\pi a^2$ **63.** 59.101

65. $\frac{24}{5}\pi(949\sqrt{26} + 1)$ **71.** $\frac{1}{4}$

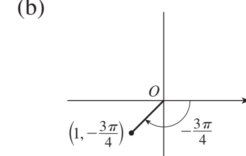
EJERCICIOS 10.3 ■ PÁGINA 647

1. (a)



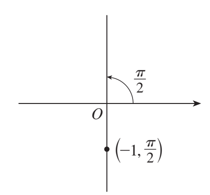
$(2, 7\pi/3)$, $(-2, 4\pi/3)$

(b)



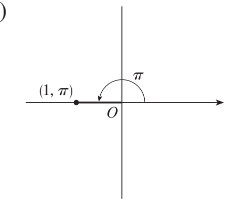
$(1, 5\pi/4)$, $(-1, \pi/4)$

(c)



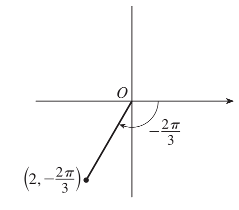
$(1, 3\pi/2)$, $(-1, 5\pi/2)$

3. (a)



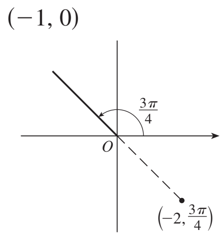
$(-1, 0)$

(b)



$(-1, -\sqrt{3})$

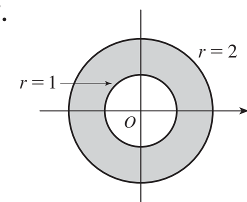
(c)



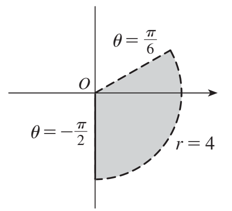
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. (a) (i) $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ (ii) $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$
(b) (i) $(2, 2\pi/3)$ (ii) $(-2, 5\pi/3)$

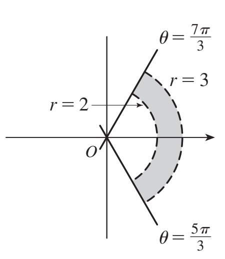
7.



9.



11.



13. $2\sqrt{3}$ **15.** Círculo, centro O, radio 2

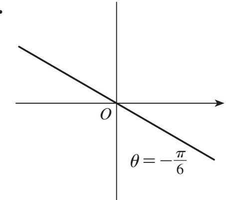
17. Círculo, centro $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, radio $\frac{3}{2}$

19. Recta horizontal, 1 unidad arriba del eje x

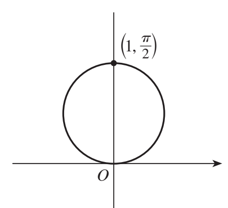
21. $r = 3 \sec \theta$ **23.** $r = -\cot \theta \csc \theta$ **25.** $r = 2c \cos \theta$

27. (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

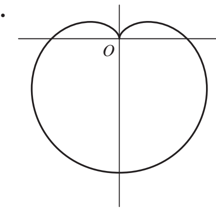
29.



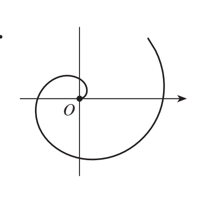
31.



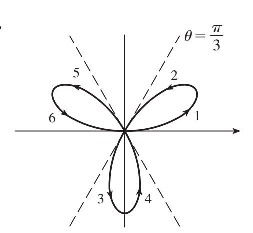
33.



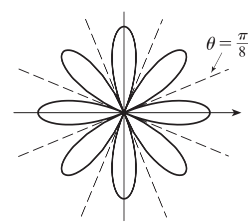
35.



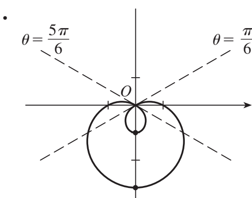
37.



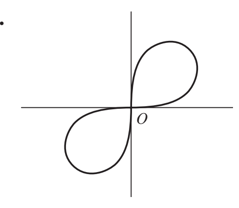
39.



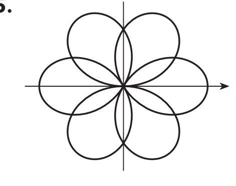
41.



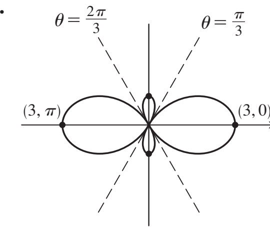
43.



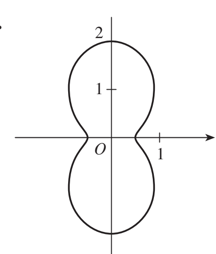
45.



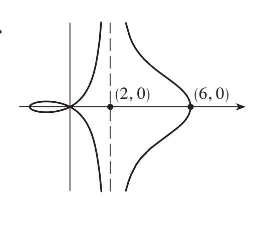
47.



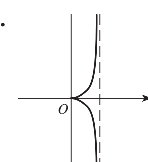
49.



51.



53.



55. (a) Para $c < -1$, el lazo interior empieza en $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ y termina en $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, empieza en $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(1/c)$ y termina en $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(1/c)$.

57. $\sqrt{3}$ **59.** $-\pi$ **61.** 1

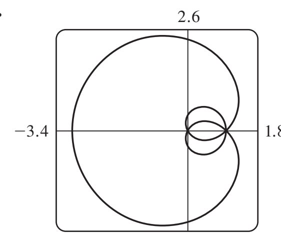
63. Horizontal en $\left(3/\sqrt{2}, \pi/4\right)$, $\left(-3/\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$; vertical en $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$

65. Horizontal en $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [el poste], y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical en $(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$

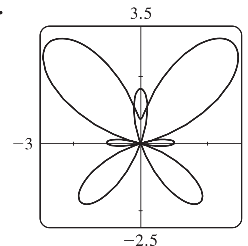
67. Horizontal en $(3, \pi/2)$, $(1, 3\pi/2)$; vertical en $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \alpha\right)$, $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi - \alpha\right)$, donde $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$;

69. Centro $(b/2, a/2)$, radio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

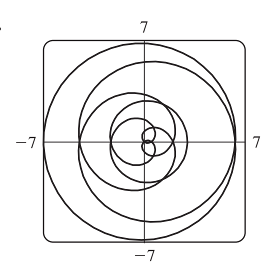
71.



73.



75.



77. Por rotación en sentido contrario a las agujas de un reloj todo el ángulo $\pi/6$, $\pi/3$ o α alrededor del origen

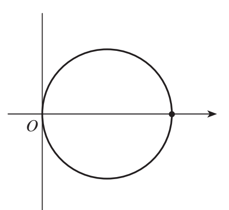
79. (a) Una rosa con n lazos si n es impar y $2n$ lazos si n es par
(b) El número de lazos es siempre $2n$

81. Para $0 < a < 1$, la curva es un óvalo, que desarrolla un rizo cuando $a \to 1^-$. Cuando $a > 1$, la curva se divide en dos partes, una de las cuales tiene un lazo.

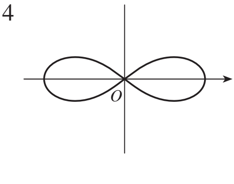
EJERCICIOS 10.4 ▪ PÁGINA 653

1. $\pi^5/10\,240$ **3.** $\pi/12 + \frac{1}{8}\sqrt{3}$ **5.** π^2 **7.** $\frac{41}{4}\pi$

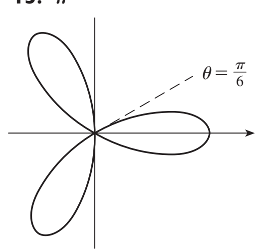
9. $\frac{9}{4}\pi$



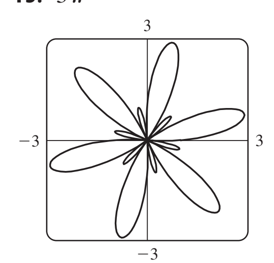
11. 4



13. π



15. 3π



17. $\frac{1}{8}\pi$ **19.** $\frac{9}{20}\pi$ **21.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

25. $4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ **27.** π **29.** $\frac{5}{24}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$ **31.** $\frac{1}{2}\pi - 1$

33. $\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}$ **35.** $\frac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

37. $(\frac{3}{2}, \pi/6)$, $(\frac{3}{2}, 5\pi/6)$ y el polo

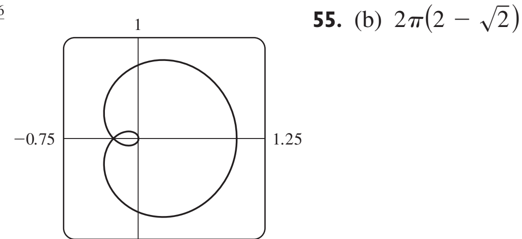
39. $(1, \theta)$, donde $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$
y $(-1, \theta)$ donde $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$

41. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3)$, $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 2\pi/3)$, y el polo

43. Intersección en $\theta \approx 0.89, 2.25$; área ≈ 3.46 **45.** π

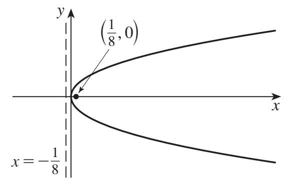
47. $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **49.** 29.0653 **51.** 9.6884

53. $\frac{16}{3}$ **55.** (b) $2\pi(2 - \sqrt{2})$

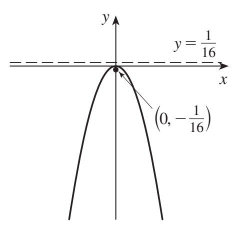


EJERCICIOS 10.5 ▪ PÁGINA 660

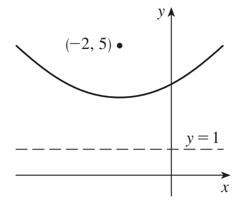
1. $(0, 0)$, $(\frac{1}{8}, 0)$, $x = -\frac{1}{8}$



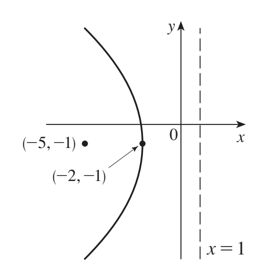
3. $(0, 0)$, $(0, -\frac{1}{16})$, $y = \frac{1}{16}$



5. $(-2, 3)$, $(-2, 5)$, $y = 1$

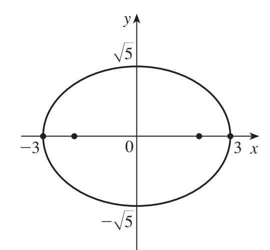


7. $(-2, -1)$, $(-5, -1)$, $x = 1$

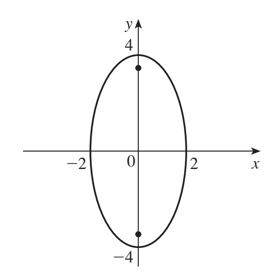


9. $x = -y^2$, foco $(-\frac{1}{4}, 0)$, directriz $x = \frac{1}{4}$

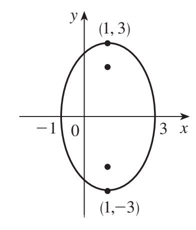
11. $(\pm 3, 0)$, $(\pm 2, 0)$



13. $(0, \pm 4)$, $(0, \pm 2\sqrt{3})$

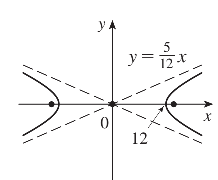


15. $(1, \pm 3)$, $(1, \pm\sqrt{5})$

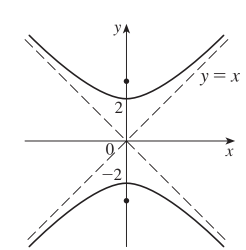


17. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, focos $(0, \pm\sqrt{5})$

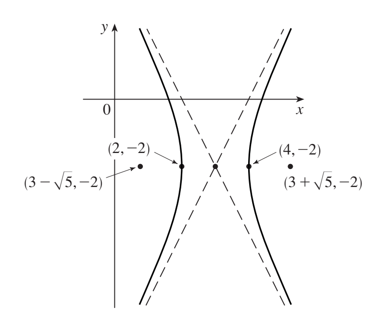
19. $(\pm 12, 0), (\pm 13, 0)$, $y = \pm \frac{5}{12}x$



21. $(0, \pm 2), (0, \pm 2\sqrt{2})$, $y = \pm x$



23. $(4, -2), (2, -2)$; $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$: $y + 2 = \pm 2(x - 3)$



25. Parábola, $(0, -1), (0, -\frac{3}{4})$ **27.** Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1), (\pm 1, 1)$

29. Hipérbola, $(0, 1), (0, -3)$; $(0, -1 \pm \sqrt{5})$ **31.** $x^2 = -8y$

33. $y^2 = -12(x + 1)$ **35.** $y - 3 = 2(x - 2)^2$

37. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{(y - 4)^2}{16} = 1$

41. $\dfrac{(x + 1)^2}{12} + \dfrac{(y - 4)^2}{16} = 1$ **43.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

45. $\dfrac{(y - 1)^2}{25} - \dfrac{(x + 3)^2}{39} = 1$ **47.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

49. $\dfrac{x^2}{3\,763\,600} + \dfrac{y^2}{3\,753\,196} = 1$

51. (a) $\dfrac{121x^2}{1\,500\,625} - \dfrac{121y^2}{3\,339\,375} = 1$ (b) $\approx$248 mi

55. (a) Elipse (b) Hipérbola (c) No hay curva

59. 9.69 **61.** $\dfrac{b^2c}{a} + ab \ln\left(\dfrac{a}{b + c}\right)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$

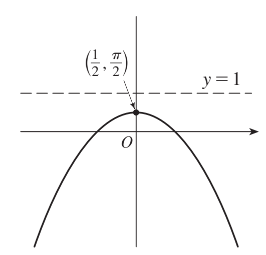
EJERCICIOS 10.6 ▪ PÁGINA 668

1. $r = \dfrac{42}{4 + 7 \text{ sen } \theta}$ **3.** $r = \dfrac{15}{4 - 3 \cos \theta}$

5. $r = \dfrac{8}{1 - \text{sen } \theta}$ **7.** $r = \dfrac{4}{2 + \cos \theta}$

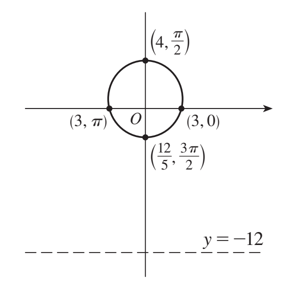
9. (a) 1 (b) Parábola (c) $y = 1$

(d)



11. (a) $\frac{1}{4}$ (b) Elipse (c) $y = -12$

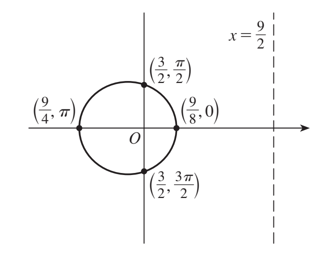
(d)





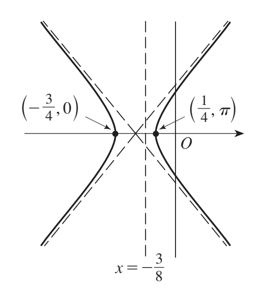
13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) Elipse (c) $x = \frac{9}{2}$

(d)

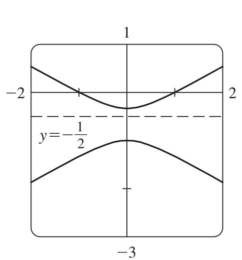


15. (a) 2 (b) Hipérbola (c) $x = -\frac{3}{8}$

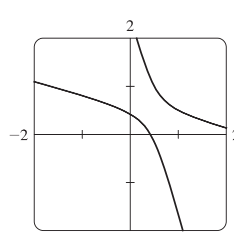
(d)



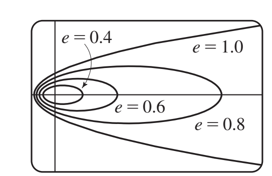
17. (a) $2, y = -\frac{1}{2}$



(b) $r = \dfrac{1}{1 - 2\text{sen}(\theta - 3\pi/4)}$



19. La elipse es casi circular donde e es cercana a 0 y se hace más alargada cuando $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva se convierte en parábola.



25. $r = \dfrac{2.26 \times 10^8}{1 + 0.093 \cos \theta}$
27. 35.64 AU
29. 7.0×10^7 km
31. 3.6×10^8 km

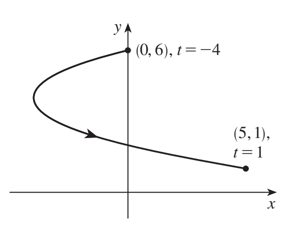
REPASO DEL CAPÍTULO 10 ■ PÁGINA 669

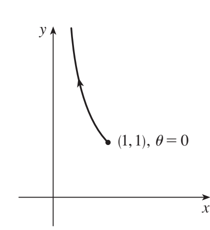
Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadero **7.** Falso **9.** Verdadero

Ejercicios

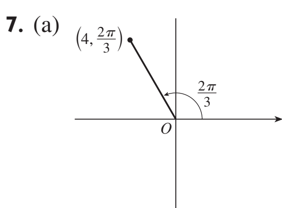
1. $x = y^2 - 8y + 12$ **3.** $y = 1/x$





5. $x = t,\ y = \sqrt{t};\ x = t^4,\ y = t^2;$
$x = \tan^2 t,\ y = \tan t,\ 0 \leqslant t < \pi/2$

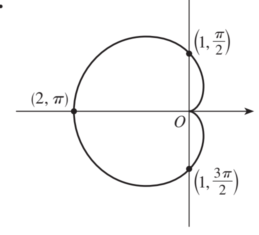
7. (a)



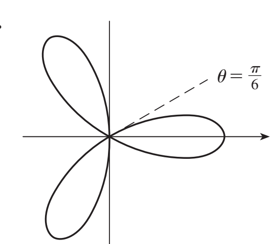
(b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, 7\pi/4)$

$(-2, 2\sqrt{3})$

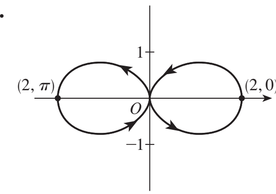
9.



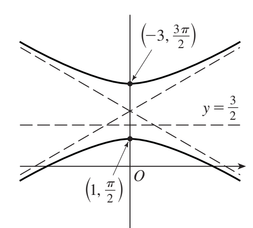
11.



13.

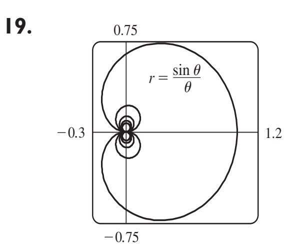


15.



17. $r = \dfrac{2}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}$

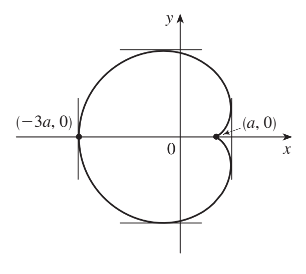
19.



21. 2 **23.** -1

25. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}, \dfrac{1 + \cos t + \operatorname{sen} t}{(1 + \cos t)^3}$ **27.** $\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}\right)$

29. Tangente vertical en $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right)$, $(-3a, 0)$; tangente horizontal en $(a, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}a, \pm\frac{3}{2}\sqrt{3}a\right)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

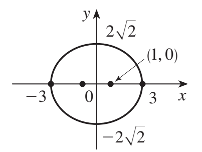
37. $2(5\sqrt{5} - 1)$

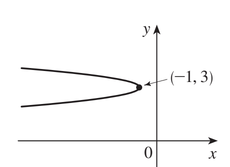
39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - \sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}}\right)$

41. $471.295\pi/1024$

43. Todas las curvas tienen la asíntota vertical $x = 1$. Para $c < -1$, la curva se abulta a la derecha. En $c = -1$, la curva es la recta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, se abulta a la izquierda. En $c = 0$ hay una cúspide en (0, 0). Para $c > 0$, hay un lazo.

45. $(\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$ **47.** $\left(-\frac{25}{24}, 3\right), (-1, 3)$





49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y - 399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos \theta}$

57. $x = a(\cot \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta)$, $y = a(1 + \operatorname{sen}^2 \theta)$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 672

1. $\ln(\pi/2)$

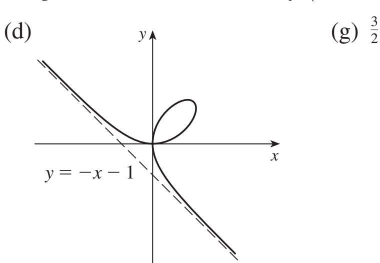
3. $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

5. (a) En (0, 0) y $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(b) Tangentes horizontales en (0,0) y $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right)$;

tangentes verticales en (0,0) y $\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right)$

(d)



(g) $\frac{3}{2}$

CAPÍTULO 11

EJERCICIOS 11.1 ■ PÁGINA 684

Abreviaturas: C, convergente; D, divergente

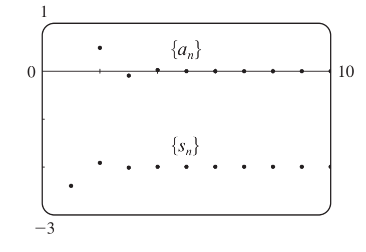
1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números. También se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos.
(b) Los términos a_n se aproximan a 8 cuando n se hace grande.
(c) Los términos a_n se hacen grandes cuando n se hace grande.

3. 0.8, 0.96, 0.992, 0.9984, 0.99968 **5.** $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$
7. 3, 5, 9, 17, 33 **9.** $a_n = 1/(2n-1)$ **11.** $a_n = 5n - 3$
13. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **15.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}$; sí; $\frac{1}{2}$
17. 1 **19.** 5 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 0 **27.** D
29. 0 **31.** 0 **33.** 0 **35.** 0 **37.** 1 **39.** e^2
41. ln 2 **43.** D **45.** D **47.** 1 **49.** $\frac{1}{2}$
51. D **53.** 0
55. (a) 1060, 1123.60, 1191.02, 1262.48, 1338.23 (b) D
57. $-1 < r < 1$
59. Convergente por el teorema de sucesión monotónica; $5 \leqslant L < 8$
61. Decreciente; sí **63.** No monotónica; no
65. Decreciente; sí **67.** 2 **69.** $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$
71. (b) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ **73.** (a) 0 (b) 9, 11

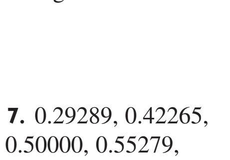
EJERCICIOS 11.2 ■ PÁGINA 694

1. (a) Una sucesión es una lista ordenada de números mientras que una serie es la *suma* de una lista de números.
(b) Una serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es una sucesión convergente. Una serie es divergente si no es convergente.

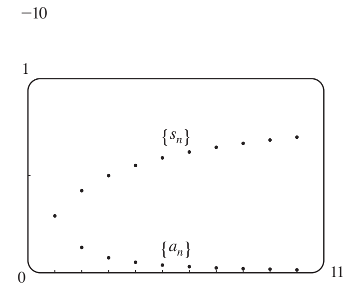
3. $-2.40000, -1.92000, -2.01600, -1.99680, -2.00064, -1.99987, -2.00003, -1.99999, -2.00000, -2.00000$; convergente, suma $= -2$



5. $1.55741, -0.62763, -0.77018, 0.38764, -2.99287, -3.28388, -2.41243, -9.21214, -9.66446, -9.01610$; divergente



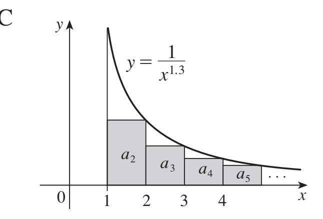
7. 0.29289, 0.42265, 0.50000, 0.55279, 0.59175, 0.62204, 0.64645, 0.66667, 0.68377, 0.69849; convergente, suma = 1



9. (a) C (b) D **11.** 9 **13.** D **15.** 60 **17.** $\frac{1}{7}$
19. D **21.** D **23.** D **25.** $\frac{5}{2}$ **27.** D **29.** D
31. D **33.** $e/(e-1)$ **35.** $\frac{3}{2}$ **37.** $\frac{11}{6}$ **39.** $e - 1$
41. $\frac{2}{9}$ **43.** 1138/333 **45.** 5063/3300
47. $-3 < x < 3$; $\dfrac{x}{3-x}$ **49.** $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; $\dfrac{1}{1-4x}$
51. Toda x; $\dfrac{2}{2-\cos x}$ **53.** 1
55. $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ para $n > 1$, suma = 1
57. (a) $S_n = \dfrac{D(1-c^n)}{1-c}$ (b) 5 **59.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$
63. $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **65.** La serie es divergente.
71. $\{s_n\}$ es acotada y creciente.
73. (a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$
75. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ (c) 1

EJERCICIOS 11.3 ■ PÁGINA 703

1. C



3. D **5.** C **7.** C **9.** D **11.** C **13.** D **15.** C
17. C **19.** C **21.** D **23.** C **25.** C **27.** $p > 1$
29. $p < -1$ **31.** $(1, \infty)$
33. (a) 1.54977, error $\leqslant 0.1$ (b) 1.64522, error $\leqslant 0.005$
(c) $n > 1000$
35. 0.00145 **41.** $b < 1/e$

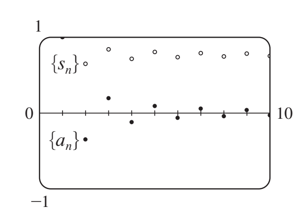
EJERCICIOS 11.4 ■ PÁGINA 709

1. (a) Nada (b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** C
11. C **13.** C **15.** C **17.** D **19.** D **21.** C
23. C **25.** D **27.** C **29.** C **31.** D
33. 1.249, error < 0.1 **35.** 0.76352, error < 0.001
45. Sí

EJERCICIOS 11.5 ■ PÁGINA 713

1. (a) Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos (b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, donde $b_n = |a_n|$ (c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$
3. C **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** D
15. C **17.** C **19.** D

21. 1.0000, 0.6464, 0.8389, 0.7139, 0.8033, 0.7353, 0.7893, 0.7451, 0.7821, 0.7505; error < 0.0275



23. 5 **25.** 4 **27.** 0.9721 **29.** 0.0676

31. Un subestimado **33.** p no es un entero negativo

35. $\{b_n\}$ no es decreciente

EJERCICIOS 11.6 ■ PÁGINA 719

Abreviaturas: AC, absolutamente convergente; CC, condicionalmente convergente

1. (a) D (b) C (c) Puede convergir o divergir

3. AC **5.** CC **7.** AC **9.** D **11.** AC **13.** AC

15. AC **17.** CC **19.** AC **21.** AC **23.** D

25. AC **27.** D **29.** D **31.** (a) y (d)

35. (a) $\frac{661}{960} \approx 0.68854$, error < 0.00521

(b) $n \geqslant 11$, 0.693109

EJERCICIOS 11.7 ■ PÁGINA 722

1. C **3.** D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** C

15. C **17.** D **19.** C **21.** C **23.** D **25.** C

27. C **29.** C **31.** D **33.** C **35.** C **37.** C

EJERCICIOS 11.8 ■ PÁGINA 727

1. Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ donde x es una variable y a y las c_n son constantes

3. 1, $[-1, 1)$ **5.** 1, $[-1, 1]$ **7.** ∞, $(-\infty, \infty)$

9. 2, $(-2, 2)$ **11.** $\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **13.** 4, $(-4, 4]$

15. 1, $[1, 3]$ **17.** $\frac{1}{3}$, $\left[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$ **19.** ∞, $(-\infty, \infty)$

21. b, $(a-b, a+b)$ **23.** 0, $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **25.** $\frac{1}{4}$, $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

27. ∞, $(-\infty, \infty)$ **29.** (a) Sí (b) No

31. k^k **33.** No

35. (a) $(-\infty, \infty)$ (b), (c)

37. $(-1, 1)$, $f(x) = (1+2x)/(1-x^2)$ **41.** 2

EJERCICIO 11.9 ■ PÁGINA 733

1. 10 **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, $(-1, 1)$ **5.** $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n$, $(-3, 3)$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}$, $(-3, 3)$ **9.** $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $(-1,1)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] x^n$, $(-1, 1)$

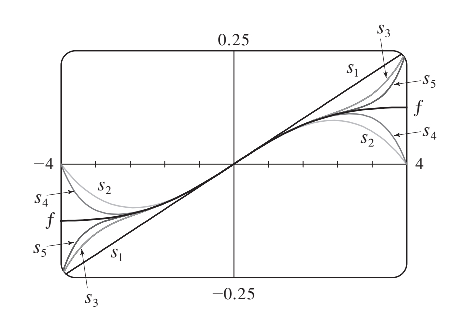
13. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n$, $R = 1$

(b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1) x^n$, $R = 1$

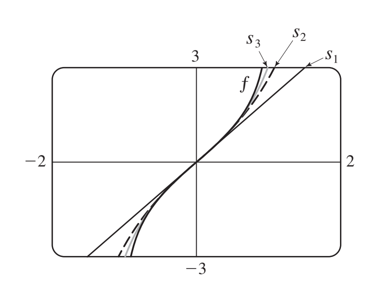
(c) $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^n$, $R = 1$

15. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}$, $R = 5$ **17.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n-1}} x^n$, $R = 2$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{16^{n+1}} x^{2n+1}$, $R = 4$



21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$



23. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n+2}$, $R = 1$

25. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{4n^2 - 1}$, $R = 1$

27. 0.199989 **29.** 0.000983 **31.** 0.09531

33. (b) 0.920 **37.** $[-1, 1]$, $[-1, 1)$, $(-1, 1)$

EJERCICIO 11.10 ■ PÁGINA 746

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,\ R = 1$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,\ R = 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n1+1},\ R = \infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{5^n}{n!} x^n,\ R = \infty$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty$

13. $-1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4,\ R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^3}{n!}(x-3)^n,\ R = \infty$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(2n)!}(x-\pi)^{2n},\ R = \infty$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!}(x-9)^n,\ R = 9$

25. $1 + \dfrac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n,\ R = 1$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} x^n,\ R = 2$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ R = \infty$

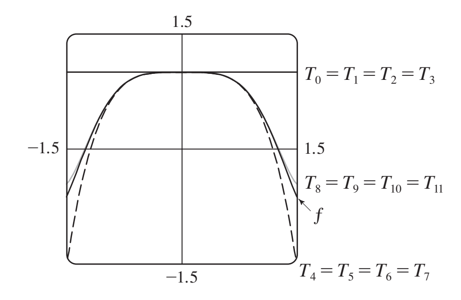
31. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n + 1}{n!} x^n,\ R = \infty$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2^{2n}(2n)!} x^{4n+1},\ R = \infty$

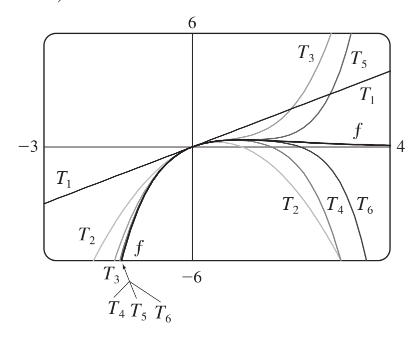
35. $\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!2^{3n+1}} x^{2n+1},\ R = 2$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n},\ R = \infty$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!} x^{4n},\ R = \infty$



41. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n,\ R = \infty$



43. 0.81873

45. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

47. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!},\ R = \infty$

49. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n(2n)!} x^{2n},\ R = \infty$ **51.** 0.440

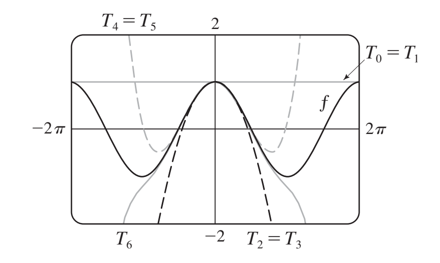
53. 0.40102 **55.** $\frac{1}{3}$ **57.** $\frac{1}{120}$ **59.** $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$

61. $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$ **63.** e^{-x^4}

65. $1/\sqrt{2}$ **67.** $e^3 - 1$

EJERCICIOS 11.11 ■ PÁGINA 755

1. (a) $T_0(x) = 1 = T_1(x)$, $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$

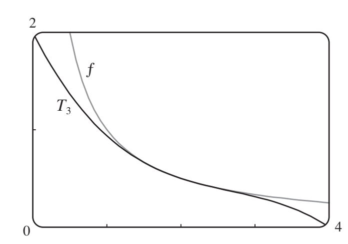


(b)

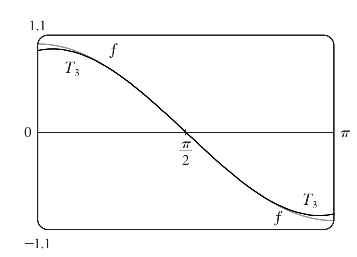
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0.7071	1	0.6916	0.7074	0.7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0.2337	0.0200	−0.0009
π	−1	1	−3.9348	0.1239	−1.2114

(c) Cuando n aumenta, $T_n(x)$ es una buena aproximación a $f(x)$ en un intervalo más y más grande.

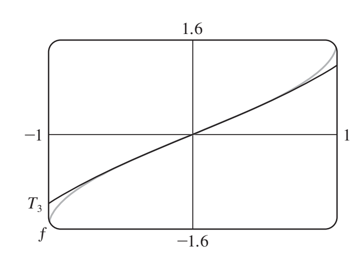
3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$



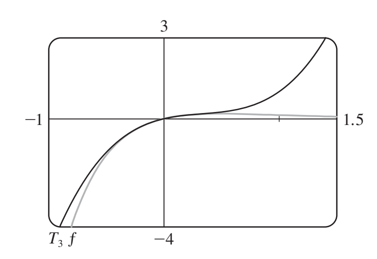
5. $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$



7. $x + \frac{1}{6}x^3$

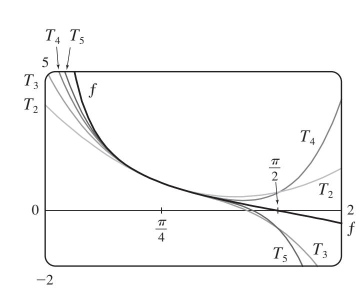


9. $x - 2x^2 + 2x^3$



11. $T_5(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

$+ \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{64}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$



13. (a) $2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$ (b) 1.5625×10^{-5}

15. (a) $1 + \frac{2}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{4}{81}(x-1)^3$ (b) 0.000097

17. (a) $1 + \frac{1}{2}x^2$ (b) 0.0015 **19.** (a) $1 + x^2$ (b) 0.00006

21. (a) $x^2 - \frac{1}{6}x^4$ (b) 0.042 **23.** 0.17365 **25.** Cuatro

27. $-1.037 < x < 1.037$ **29.** $-0.86 < x < 0.86$

29. 21 m, no **37.** (c) Difieren en alrededor de 8×10^{-9} km

REPASO DEL CAPÍTULO 11 ■ PÁGINA 759

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Falso **9.** Falso
11. Verdadero **13.** Verdadero **15.** Falso **17.** Verdadero
19. Verdadero

Ejercicios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C **13.** C
15. D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC
25. AC **27.** $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0.9721
37. 0.18976224, error $< 6.4 \times 10^{-7}$
41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0.5, $[2.5, 3.5)$

45. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

47. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $R = 1$ **49.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $R = 1$

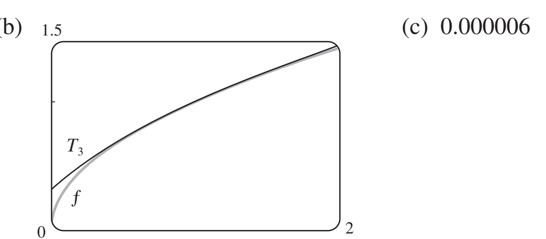
51. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

53. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{n!\,2^{6n+1}}x^n$, $R = 16$

55. $C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n \cdot n!}$

57. (a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$

(b)



(c) 0.000006

59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 762

1. $15!/5! = 10\,897\,286\,400$

3. (b) 0 si $x = 0$, $(1/x) - \cot x$ si $x \neq k\pi$, n un entero

5. (a) $s_n = 3 \cdot 4^n$, $l_n = 1/3^n$, $p_n = 4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

9. $(-1, 1)$, $\frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4}$ **11.** $\ln\frac{1}{2}$

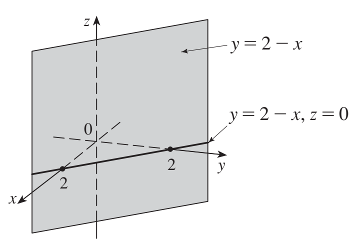
13. (a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)\pi/5} - e^{-n\pi/5})$ (b) $\frac{250}{101}\pi$

CAPÍTULO 12

EJERCICIOS 12.1 ■ PÁGINA 769

1. (4, 0, −3) **3.** Q; R

5. Un plano vertical que interseca al plano xy en la recta $y = 2 - x$, $z = 0$ (véase gráfica a la derecha)



7. $|PQ| = 6$, $|QR| = 2\sqrt{10}$, $|RP| = 6$; triángulo isósceles

9. (a) No (b) Sí

11. $(x-1)^2 + (y+4)^4 + (z-3)^2 = 25$; $(x-1)^2 + (z-3)^2 = 9$, $y = 0$ (un círculo)

13. $(x-3)^2 + (y-8)^2 + (z-1)^2 = 30$

15. (3, −2, 1), 5

17. $(2, 0, -6)$, $9/\sqrt{2}$ **19.** (b) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{94}, \frac{1}{2}\sqrt{85}$

21. (a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 36$
(b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 4$
(c) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 9$

23. Un plano paralelo al plano xz y 4 unidades a la izquierda de éste

25. Medio espacio formado por todos los puntos frente al plano $x = 3$

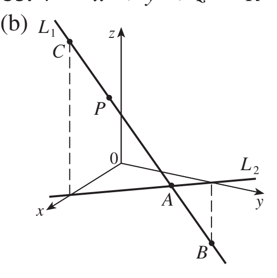
27. Todos los puntos sobre o entre los planos horizontales $z = 0$ y $z = 6$

29. Todos los puntos sobre o dentro de una esfera con radio $\sqrt{3}$ y centro O

31. Todos los puntos sobre o dentro de un cilindro circular de radio 3 con eje en y

33. $0 < x < 5$ **35.** $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

37. (a) (2, 1, 4) (b)



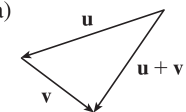
39. $14x - 6y - 10z = 9$, un plano perpendicular a AB

EJERCICIOS 12.2 ■ PÁGINA 777

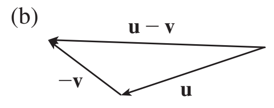
1. (a) Escalar (b) Vectorial (c) Vectorial (d) Escalar

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$

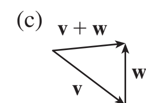
5. (a)



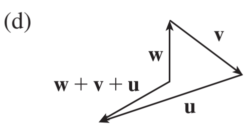
(b)



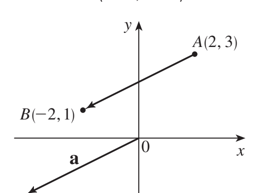
(c)



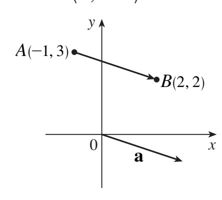
(d)



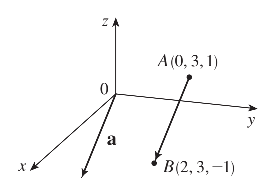
7. $\mathbf{a} = \langle -4, -2 \rangle$



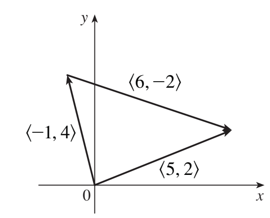
9. $\mathbf{a} = \langle 3, -1 \rangle$



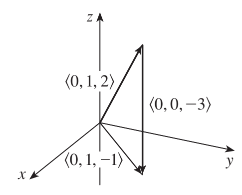
11. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2 \rangle$



13. $\langle 5, 2 \rangle$



15. $\langle 0, 1, -1 \rangle$



17. $\langle 2, -18 \rangle$, $\langle 1, -42 \rangle$, 13, 10

19. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{82}$

21. $-\dfrac{3}{\sqrt{58}}\,\mathbf{i} + \dfrac{7}{\sqrt{58}}\,\mathbf{j}$ **23.** $\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$

25. $\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ **27.** ≈ 45.96 ft/s, ≈ 38.57 ft/s

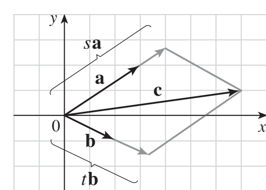
29. $100\sqrt{7} \approx 264.6$ N, $\approx 139.1°$

31. $\sqrt{493} \approx 22.2$ mi/h, N8°O

33. $\mathbf{T}_1 \approx -196\,\mathbf{i} + 3.92\,\mathbf{j}$, $\mathbf{T}_2 \approx 196\,\mathbf{i} + 3.92\,\mathbf{j}$

35. $\pm(\mathbf{i} + 4\mathbf{j})/\sqrt{17}$ **37.** $\mathbf{0}$

39. (a), (b)



(d) $s = \frac{9}{7}$, $t = \frac{11}{7}$

41. Una esfera con radio 1, con centro en (x_0, y_0, z_0)

EJERCICIOS 12.3 ■ PÁGINA 784

1. (b), (c) y (d) son significativos

3. 14 **5.** 19 **7.** 32 **9.** −15

11. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = -\frac{1}{2}$

15. $\cos^{-1}\left(\dfrac{9 - 4\sqrt{7}}{20}\right) \approx 95°$ **17.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{1015}}\right) = 81°$

19. $\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{7}}\right) \approx 101°$ **21.** 45°, 45°, 90°

23. (a) Ninguno (b) Ortogonal
(c) Ortogonal (d) Paralelo

25. Sí **27.** $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$ [o $(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$

29. $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{4}{5\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 65°, 56°, 45°

31. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}$; 73°, 65°, 149°

33. $1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$; 55°, 55°, 55°

35. 3, $\langle \frac{9}{5}, -\frac{12}{5} \rangle$ **37.** $\frac{9}{7}, \langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \rangle$

39. $1/\sqrt{21}, \frac{2}{21}\mathbf{i} - \frac{1}{21}\mathbf{j} + \frac{4}{21}\mathbf{k}$

43. $\langle 0, 0, -2\sqrt{10} \rangle$ o cualquier vector de la forma $\langle s, t, 3s - 2\sqrt{10} \rangle$, $s, t \in \mathbb{R}$

45. 144 J **47.** 2400 cos(40°) ≈ 1839 ft-lb **49.** $\frac{13}{5}$

51. $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

EJERCICIOS 12.4 ■ PÁGINA 792

1. $16\,\mathbf{i} + 48\,\mathbf{k}$ **3.** $15\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **5.** $\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$
7. $t^4\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ **9.** $\mathbf{0}$ **11.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. (a) Escalar (b) Sin significado (c) Vector
(d) Sin significado (e) Sin significado (f) Escalar

15. 24; entrando a la página **17.** $\langle 5, -3, 1 \rangle, \langle -5, 3, -1 \rangle$

19. $\langle -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6} \rangle, \langle 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6} \rangle$

27. 16 **29.** (a) $\langle 6, 3, 2 \rangle$ (b) $\frac{7}{2}$

31. (a) $\langle 13, -14, 5 \rangle$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$

33. 82 **35.** 3 **39.** 10.8 sen 80° ≈ 10.6 N · m

41. ≈417 N **43.** (b) $\sqrt{97/3}$

49. (a) No (b) No (c) Sí

EJERCICIOS 12.5 ■ PÁGINA 802

1. (a) Verdadero (b) Falso (c) Verdadero (d) Falso
(e) Falso (f) Verdadero (g) Falso (h) Verdadero
(i) Verdadero (j) Falso (k) Verdadero

3. $\mathbf{r} = (2\,\mathbf{i} + 2.4\,\mathbf{j} + 3.5\,\mathbf{k}) + t(3\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k})$;
$x = 2 + 3t, y = 2.4 + 2t, z = 3.5 - t$

5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$;
$x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t$

7. $x = 1 - 5t, y = 3, z = 2 - 2t$; $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{z-2}{-2}, y = 3$

9. $x = 2 + 2t, y = 1 + \frac{1}{2}t$,
$z = -3 - 4t$;
$(x - 2)/2 = 2y - 2 = (z + 3)/(-4)$

11. $x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 1 + t$;
$x - 1 = (y + 1)/2 = z - 1$

13. Sí

15. (a) $(x - 1)/(-1) = (y + 5)/2 = (z - 6)/(-3)$
(b) $(-1, -1, 0), (-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}), (0, -3, 3)$

17. $\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + t(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}), 0 \leqslant t \leqslant 1$

19. Paralelo **21.** Sesgo

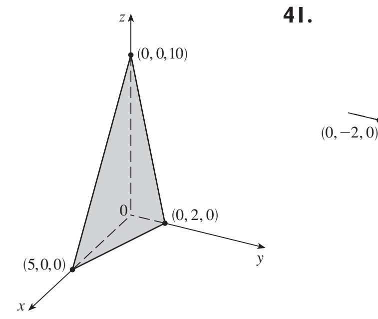
23. $-2x + y + 5z = 1$ **25.** $x + y - z = -1$

27. $2x - y + 3z = 2$ **29.** $3x - 7z = -9$

31. $x + y + z = 2$ **33.** $-13x + 17y + 7z = -42$

35. $33x + 10y + 4z = 190$ **37.** $x - 2y + 4z = -1$

39. **41.**



43. (2, 3, 5) **45.** (2, 3, 1) **47.** 1, 0, −1

49. Perpendicular **51.** Ninguno, ≈ 70.5° **53.** Paralelo

55. (a) $x = 1, y = -t, z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15.8°$

57. $x = 1, y - 2 = -z$

59. $x + 2y + z = 5$ **61.** $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$

63. $x = 3t, y = 1 - t, z = 2 - 2t$

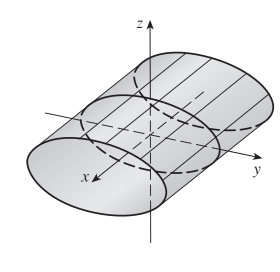
65. P_1 y P_3 son paralelas, P_2 y P_4 son idénticas

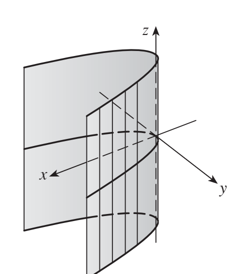
67. $\sqrt{61/14}$ **69.** $\frac{18}{7}$ **71.** $5/(2\sqrt{14})$ **75.** $1/\sqrt{6}$

EJERCICIOS 12.6 ■ PÁGINA 810

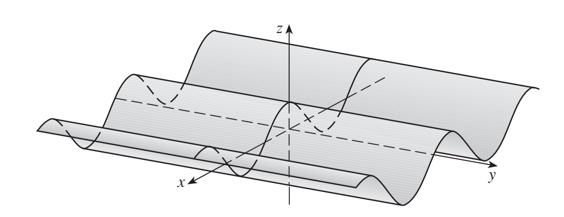
1. (a) Parábola
(b) Cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje z
(c) Cilindro parabólico con generatrices paralelas al eje x

3. Cilindro elíptico **5.** Cilindro parabólico



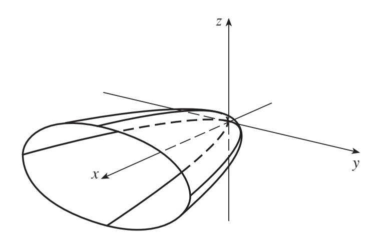


7. Superficie cilíndrica

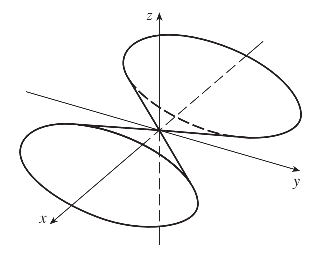


9. (a) $x = k, y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbola $(k \neq \pm 1)$,
$y = k, x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbola $(k \neq \pm 1)$;
$z = k, x^2 + z^2 = 1 + k^2$, círculo
(b) El hiperboloide se gira de modo que tenga el eje en y
(c) El hiperboloide se desplaza una unidad en la dirección y negativa

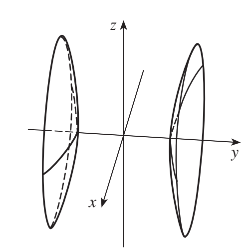
11. Paraboloide elíptico con eje en x



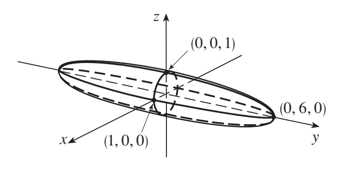
13. Cono elíptico con eje en x



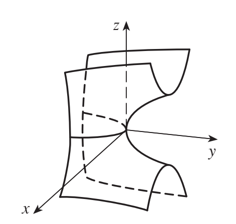
15. Hiperboloide de dos hojas



17. Elipsoide

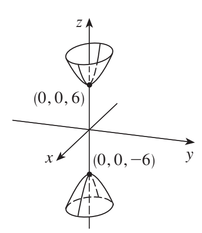


19. Paraboloide hiperbólico

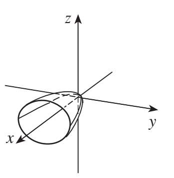


21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

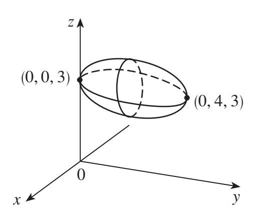
29. $-\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$
Hiperboloide de dos hojas con eje en z



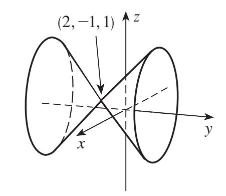
31. $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{2}$
Paraboloide elíptico con vértice (0, 0, 0) y eje en x



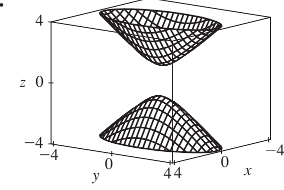
33. $x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} + (z-3)^2 = 1$
Elipsoide con centro (0, 2, 3)



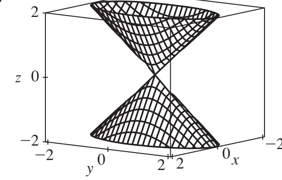
35. $(y+1)^2 = (x-2)^2 + (z-1)^2$
Cono circular con vértices $(2, -1, 1)$ y eje paralelo al eje y



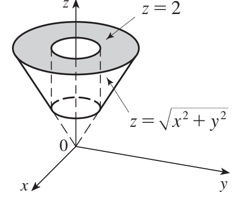
37.



39.



41.

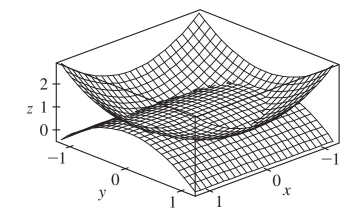


43. $y = x^2 + z^2$ **45.** $-4x = y^2 + z^2$, paraboloide

47. (a) $\dfrac{x^2}{(6378.137)^2} + \dfrac{y^2}{(6378.137)^2} + \dfrac{z^2}{(6356.523)^2} = 1$

(b) Círculo (c) Elipse

51.



REPASO DEL CAPÍTULO 12 ■ PÁGINA 812

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Verdadero

9. Verdadero **11.** Falso **13.** Falso **15.** Falso

17. Verdadero

Ejercicios

1. (a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 69$
(b) $(y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 68, x = 0$
(c) Centro $(4, -1, -3)$, radio 5

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$; sale de la página

5. $-2, -4$ **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

9. $\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4\rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. 166 N, 114 N

15. $x = 4 - 3t, y = -1 + 2t, z = 2 + 3t$

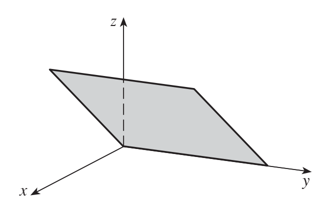
17. $x = -2 + 2t, y = 2 - t, z = 4 + 5t$

19. $-4x + 3y + z = -14$ **21.** $(1, 4, 4)$

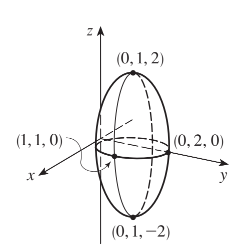
23. Sesgo **25.** $x + y + z = 4$

27. $22/\sqrt{26}$

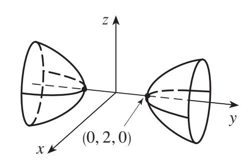
29. Plano



31. Cono



33. Hiperboloide de dos hojas



35. Elipsoide

(0, 1, 2)
(1, 1, 0)
(0, 2, 0)
(0, 1, −2)

37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 815

1. $(\sqrt{3} - 1.5)$ m

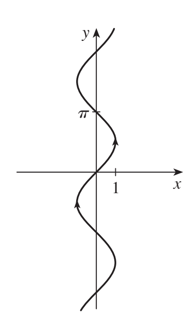
3. (a) $(x + 1)/(-2c) = (y - c)/(c^2 - 1) = (z - c)/(c^2 + 1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1, z = t$ (c) $4\pi/3$

CAPÍTULO 13

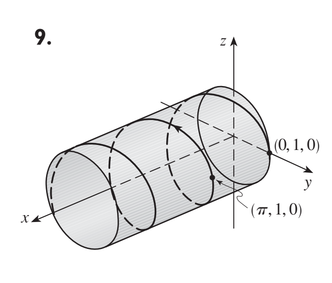
EJERCICIOS 13.1 ■ PÁGINA 822

1. $(-1, 2]$ **3.** $\langle 1, 0, 0\rangle$ **5.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

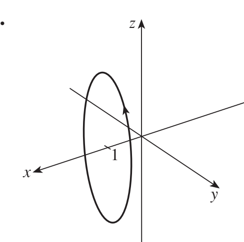
7.



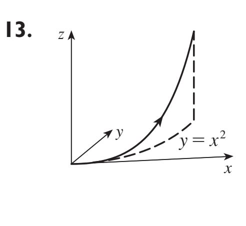
9.



11.



13.

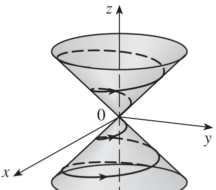


15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t\rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 3t + 1, 2t - 1, 5t + 2\rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1$;
$x = 3t + 1, y = 2t - 1, z = 5t + 2, 0 \leqslant t \leqslant 1$

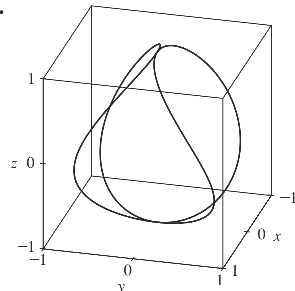
19. VI **21.** IV **23.** V

25.

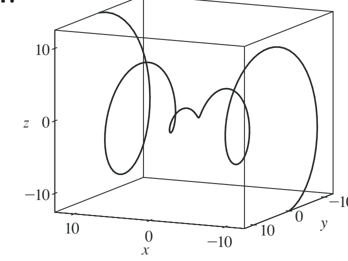


27. $(0, 0, 0), (1, 0, 1)$

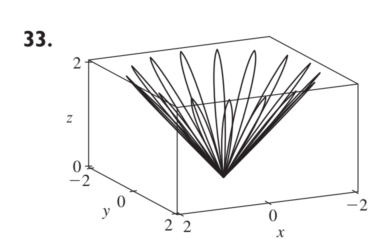
29.



31.



33.

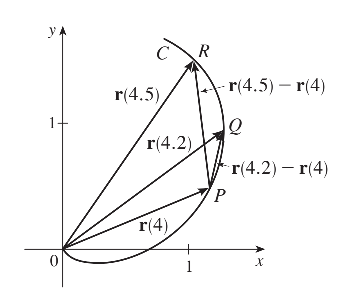


37. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\mathbf{k}$

39. $x = 2\cos t,\ y = 2\operatorname{sen} t,\ z = 4\cos^2 t$ **41.** Sí

EJERCICIOS 13.2 ■ PÁGINA 828

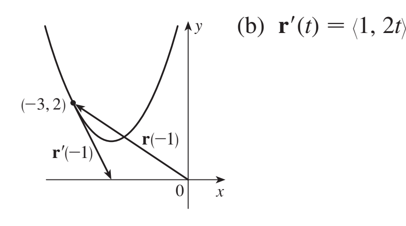
1. (a)



(b), (d)

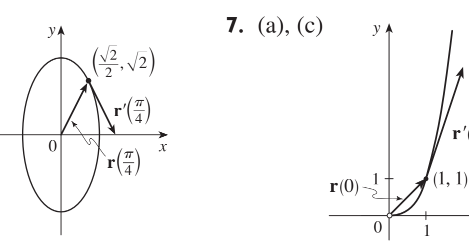
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t\rangle$

5. (a), (c) **7.** (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} - 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

(b) $\mathbf{r}'(t) = e^t\mathbf{i} + 3e^{3t}\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \operatorname{sen} t,\ 2t,\ \cos 2t - 2t\operatorname{sen} 2t\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$ **13.** $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\,\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ **17.** $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$ **19.** $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle$, $\langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}\rangle$, $\langle 0, 2, 6t\rangle$, $\langle 6t^2, -6t, 2\rangle$

23. $x = 3 + t,\ y = 2t,\ z = 2 + 4t$

25. $x = 1 - t,\ y = t,\ z = 1 - t$

27. $x = t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$

29. $x = -\pi - t,\ y = \pi + t,\ z = -\pi t$

31. $66°$ **33.** $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ **35.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $e^t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t\ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

39. $t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k}$

45. $2t\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2\cos t\operatorname{sen} t$

EJERCICIOS 13.3 ■ PÁGINA 836

1. $20\sqrt{29}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15.3841

9. 1.2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3\operatorname{sen} 1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle (2/\sqrt{29})\cos t,\ 5/\sqrt{29},\ (-2/\sqrt{29})\operatorname{sen} t\rangle$, $\langle -\operatorname{sen} t, 0, -\cos t\rangle$ (b) $\frac{2}{29}$

19. (a) $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle \sqrt{2}\,e^t, e^{2t}, -1\rangle$, $\dfrac{1}{e^{2t}+1}\langle 1 - e^{2t}, \sqrt{2}\,e^t, \sqrt{2}\,e^t\rangle$

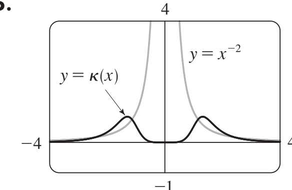
(b) $\sqrt{2}\,e^{2t}/(e^{2t}+1)^2$

21. $2/(4t^2+1)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

27. $2/(4x^2 - 8x + 5)^{3/2}$ **29.** $15\sqrt{x}/(1 + 100x^3)^{3/2}$

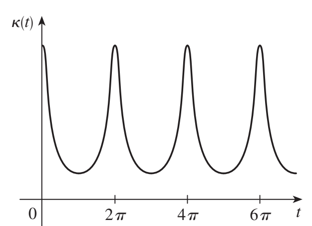
31. $\left(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2}\right)$; aproximadamente 0

33. (a) P (b) 1.3, 0.7 **35.**



37. a es $y = f(x)$, b es $y = \kappa(x)$

39. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$

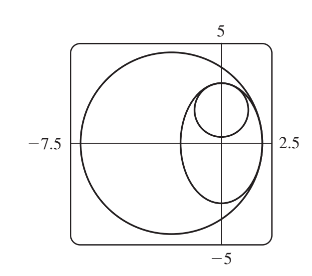


múltiplos enteros de 2π

41. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **43.** $\left\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle$, $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$

45. $y = 6x + \pi,\ x + 6y = 6\pi$

47. $(x + \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{81}{4}$, $x^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$



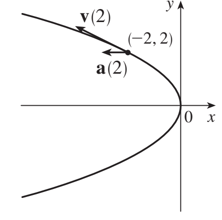
49. $(-1, -3, 1)$ **57.** $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$

59. 2.07×10^{10} Å ≈ 2 m

EJERCICIOS 13.4 ■ PÁGINA 846

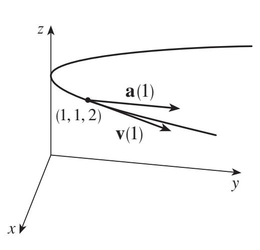
1. (a) $1.8\mathbf{i} - 3.8\mathbf{j} - 0.7\mathbf{k}$, $2.0\mathbf{i} - 2.4\mathbf{j} - 0.6\mathbf{k}$, $2.8\mathbf{i} + 1.8\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}$, $2.8\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}$
(b) $2.4\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}$, 2.58

3. $\mathbf{v}(t) = \langle -t, 1 \rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle -1, 0 \rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{t^2 + 1}$



5. $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2 \cos t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3 \cos t\,\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$

7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$



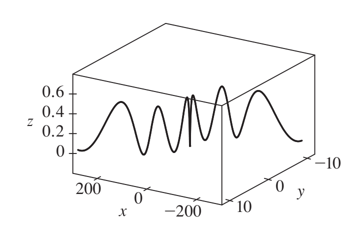
9. $\langle 2t, 3t^2, 2t \rangle$, $\langle 2, 6t, 2 \rangle$, $|t|\sqrt{9t^2 + 8}$

11. $\sqrt{2}\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$, $e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $e^t + e^{-t}$

13. $e^t[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$, $e^t[-2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2 \cos t\,\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}$, $e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$

15. $\mathbf{v}(t) = t\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2 + 1)\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

17. (a) $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{3}t^2 + t)\,\mathbf{i} + (t - \operatorname{sen} t + 1)\,\mathbf{j} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t)\mathbf{k}$
(b)



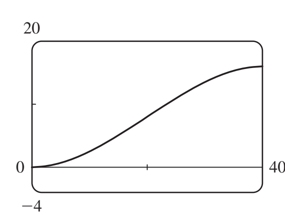
19. $t = 4$ **21.** $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + \frac{5}{2}t^2\,\mathbf{k}$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$

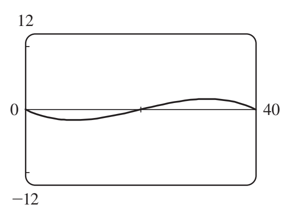
23. (a) $\approx$22 km (b) $\approx$3.2 km (c) $\approx$500 m/s

25. 30 m/s **27.** $\approx$10.2°, $\approx$79.8°

29. $13.0° < \theta < 36.0°$, $55.4° < \theta < 85.5°$

31. (a) 16 m (b) $\approx$ 23.6° corriente arriba





33. $6t$, 6 **35.** 0, 1 **37.** $e^t - e^{-t}$, $\sqrt{2}$

39. 4.5 cm/s², 9.0 cm/s² **41.** $t = 1$

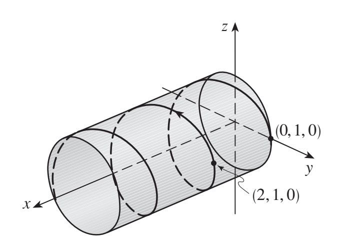
REPASO DEL CAPÍTULO 13 ■ PÁGINA 850

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero
9. Falso **11.** Verdadero

Ejercicios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + \pi \cos \pi t\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2 \cos \pi t\,\mathbf{j} - \pi^2 \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (5 - 4 \cos t)\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - (2/\pi^2)\mathbf{j} + (2/\pi)\mathbf{k}$ **7.** 86.631 **9.** $\pi/2$

11. (a) $\langle t^2, t, 1 \rangle / \sqrt{t^4 + t^2 + 1}$
(b) $\langle 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t \rangle / \sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}$
(c) $\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}/(t^4 + t^2 + 1)^2$

13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$

17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\,\mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2\ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}$, $\mathbf{a}(t) = (1/t)\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

19. (a) Unos 3.8 ft sobre el suelo, 60.8 ft del atleta
(b) $\approx$21.4 ft (c) $\approx$ 64.2 ft del atleta

21. (c) $-2e^{-t}\,\mathbf{v}_d + e^{-t}\,\mathbf{R}$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 852

1. (a) $\mathbf{v} = \omega\mathbf{R}(-\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \cos \omega t\,\mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r}$

3. 90°, $v_0^2/(2g)$

5. (a) $\approx$ 0.94 ft a la derecha del borde de la mesa, $\approx$ 15 ft/s
(b) $\approx$7.6° (c) $\approx$ 2.13 ft a la derecha del borde de la mesa

7. 56°

CAPÍTULO 14

EJERCICIOS 14.1 ■ PÁGINA 865

1. (a) -27; una temperatura de $-15°C$ con viento que sopla a 40 km/h se siente equivalente a unos $-27°C$ sin viento.
(b) Cuando la temperatura es $-20°C$, ¿qué velocidad del viento da un frío de $-30°C$? 20 km/h
(c) Con una velocidad del viento de 20 km/h, ¿qué temperatura da un frío de $-49°C$? $-35°C$
(d) Una función de la velocidad del viento que da valores de frío cuando la temperatura es $-5°C$
(e) Una función de temperatura que da valores de frío cuando la velocidad del viento es 50 km/h

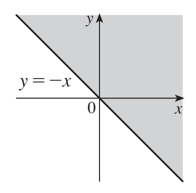
3. Sí

5. (a) 25; un viento de 40 nudos que soplan en mar abierto durante 15 horas creará olas de unos 25 ft de altura.
(b) $f(30, t)$ es una función de t que da las alturas de olas producidas por vientos de 30 nudos que soplan durante t horas.
(c) $f(v, 30)$ es una función de v que da las alturas de olas producidas por vientos de velocidad v que soplan durante 30 horas.

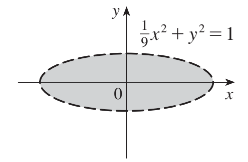
7. (a) 4 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[0, \infty)$

9. (a) e (b) $\{(x, y, z) \mid z \geqslant x^2 + y^2\}$ (c) $[1, \infty)$

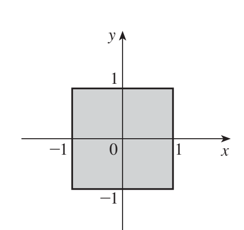
11. $\{(x, y) \mid y \geqslant -x\}$



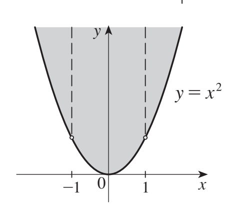
13. $\{(x, y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



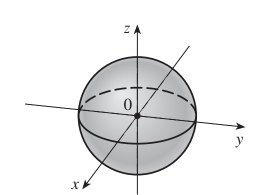
15. $\{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$

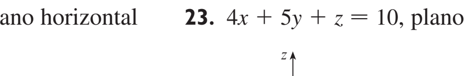


17. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$

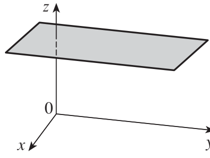


19. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$

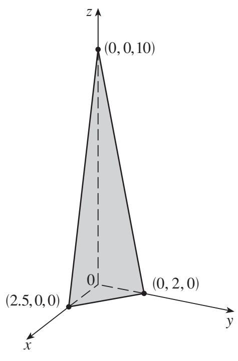




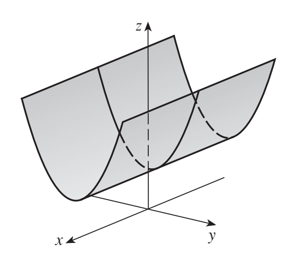
21. $z = 3$, plano horizontal



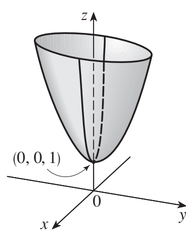
23. $4x + 5y + z = 10$, plano

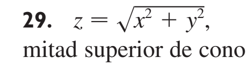


25. $z = y^2 + 1$, cilindro parabólico

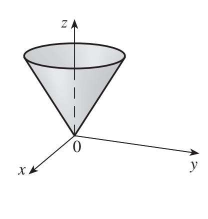


27. $z = 4x^2 + y^2 + 1$
paraboloide elíptico





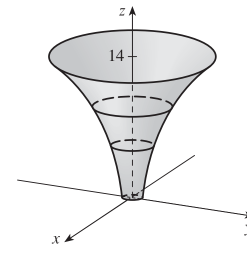
29. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
mitad superior de cono



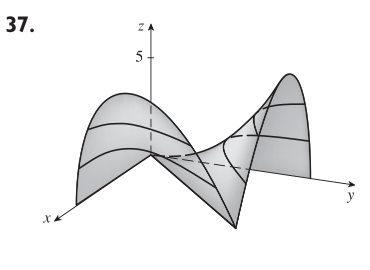
31. ≈ 56, ≈ 35

33. Pronunciada; casi plana

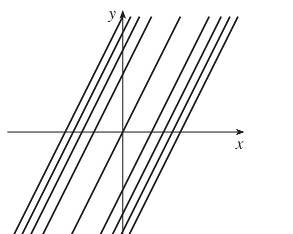
35.



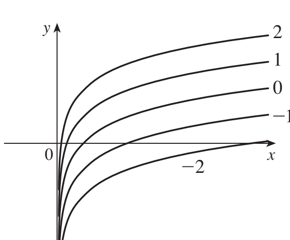
37.



39. $(y - 2x)^2 = k$



41. $y = \ln x + k$



APÉNDICES

EJERCICIOS H ■ PÁGINA A12

1. $8 - 4i$ **3.** $13 + 18i$ **5.** $12 - 7i$

7. $\frac{11}{13} + \frac{10}{13}i$ **9.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ **11.** $-i$ **13.** $5i$

15. $12 + 5i$; 13 **17.** $4i$, 4 **19.** $\pm\frac{3}{2}i$

21. $-1 \pm 2i$ **23.** $-\frac{1}{2} \pm (\sqrt{7}/2)i$

25. $3\sqrt{2}\,[\cos(3\pi/4) + i\,\text{sen}(3\pi/4)]$

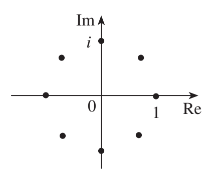
27. $5\{\cos[\tan^{-1}(\frac{4}{3})] + i\,\text{sen}[\tan^{-1}(\frac{4}{3})]\}$

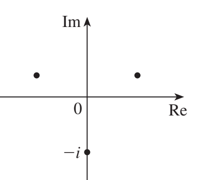
29. $4[\cos(\pi/2) + i\,\text{sen}(\pi/2)]$, $\cos(-\pi/6) + i\,\text{sen}(-\pi/6)$, $\frac{1}{2}[\cos(-\pi/6) + i\,\text{sen}(-\pi/6)]$

31. $4\sqrt{2}\,[\cos(7\pi/12) + i\,\text{sen}(7\pi/12)]$, $(2\sqrt{2})[\cos(13\pi/12) + i\,\text{sen}(13\pi/12)]$, $\frac{1}{4}[\cos(\pi/6) + i\,\text{sen}(\pi/6)]$

33. -1024 **35.** $-512\sqrt{3} + 512i$

37. ± 1, $\pm i$, $(1/\sqrt{2})(\pm 1 \pm i)$ **39.** $\pm(\sqrt{3}/2) + \frac{1}{2}i$, $-i$

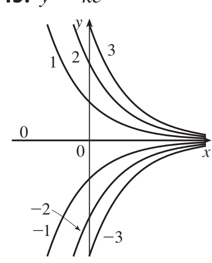




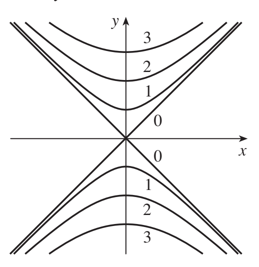
41. i **43.** $\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$ **45.** $-e^2$

47. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta$, $3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta$

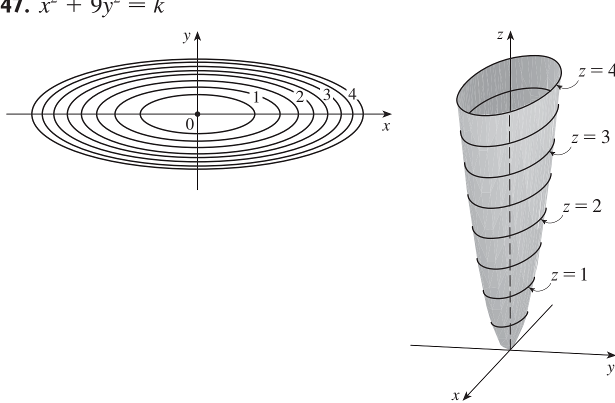
43. $y = ke^{-x}$



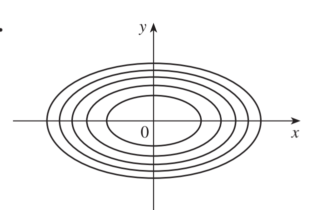
45. $y^2 - x^2 = k^2$



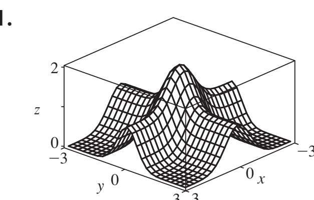
47. $x^2 + 9y^2 = k$



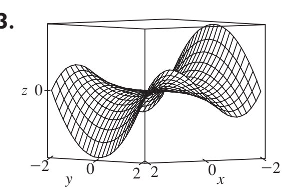
49.



51.



53.



55. (a) C (b) II **57.** (a) F (b) I

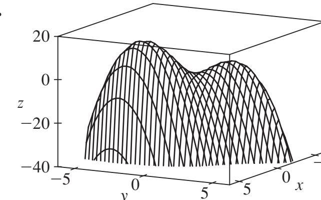
59. (a) B (b) VI

61. Familia de planos paralelos

63. Familia de hiperboloides de una o dos hojas con eje en el eje *y*

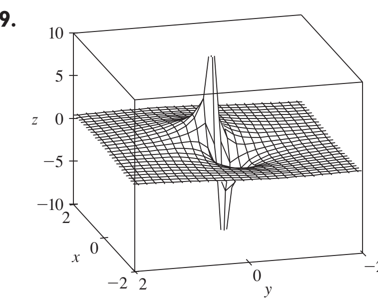
65. (a) Corra la gráfica de *f* dos unidades hacia arriba
(b) Prolongue la gráfica de *f* verticalmente un factor de 2
(c) Refleje la gráfica de *f* alrededor del plano *xy*
(d) Refleje la gráfica de *f* alrededor del plano *xy* y luego córrala hacia arriba dos unidades

67.



f parece tener un valor máximo de alrededor de 15. Hay dos puntos máximos locales pero ninguno mínimo local.

69.



Los valores de función se aproximan a 0 cuando *x*, *y* se hacen grandes; cuando (x, y) se aproxima al origen, *f* se aproxima a $\pm\infty$ o 0, dependiendo de la dirección de aproximación

71. Si $c = 0$, la gráfica es una superficie cilíndrica. Para $c > 0$, las curvas de nivel son elipses. La gráfica se curva hacia arriba cuando sale del origen, y la inclinación aumenta cuando *c* aumenta. Para $c < 0$, las curvas de nivel son hipérbolas. La gráfica se curva hacia arriba en la dirección *y* y hacia abajo, aproximándose al plano *xy*, en la dirección *x* dando una figura en forma de silla de montar cerca de $(0, 0, 1)$.

73. $c = -2, 0, 2$ **75.** (b) $y = 0.75x + 0.01$

EJERCICIOS 14.2 ■ PÁGINA 877

1. Nada; si *f* es continua, $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$

5. 1 7. $\frac{2}{7}$ **9.** No existe **11.** No existe

13. 0 **15.** No existe **17.** 2 **19.** 1

21. No existe

23. La gráfica muestra que la función se aproxima a diferentes números a lo largo de líneas diferentes.

25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$; $\{(x, y) \mid 2x + 3y \geqslant 6\}$

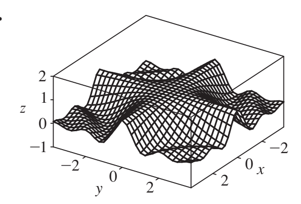
27. A lo largo de la recta $y = x$ **29.** $\{(x, y) \mid y \neq \pm e^{x/2}\}$

31. $\{(x, y) \mid y \geqslant 0\}$ **33.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

35. $\{(x, y, z) \mid y \geqslant 0, y \neq \sqrt{x^2 + z^2}\}$

37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** -1

43.



f es continua en $\mathbb{R}^2$

EJERCICIOS 14.3 ■ PÁGINA 888

1. (a) La rapidez de cambio de temperatura cuando varía la longitud, con latitud y tiempo fijos; la rapidez de cambio cuando sólo varía la latitud; la rapidez de cambio cuando varía sólo el tiempo.
(b) Positivo, negativo, positivo

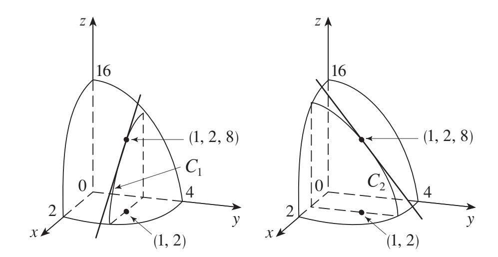
3. (a) $f_T(-15{,}30) \approx 1.3$; para una temperatura de $-15°C$ y velocidad del viento de 30 km/h, el índice de frío sube 1.3°C por cada grado de aumento de temperatura. $f_v(-15, 30) \approx -0.15$; para una temperatura de $-15°C$ y velocidad del viento de 30 km/h, el índice de frío disminuye 0.15°C por cada km/h que aumenta la velocidad del viento.
(b) Positivo, negativo (c) 0

5. (a) Positivo (b) Negativo

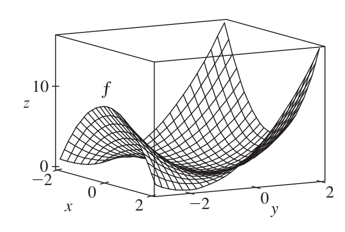
7. (a) Positivo (b) Negativo

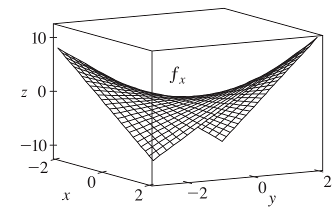
9. $c = f$, $b = f_x$, $a = f_y$

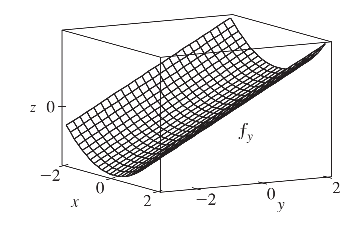
11. $f_x(1, 2) = -8 =$ pendiente de C_1, $f_y(1, 2) = -4 =$ pendiente de C_2



13. $f_x = 2x + 2xy$, $f_y = 2y + x^2$







15. $f_x(x, y) = -3y$, $f_y(x, y) = 5y^4 - 3x$

17. $f_x(x, t) = -\pi e^{-t} \operatorname{sen} \pi x$, $f_t(x, t) = -e^{-t} \cos \pi x$

19. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9$, $\partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$

21. $f_x(x, y) = 2y/(x + y)^2$, $f_y(x, y) = -2y/(x + y)^2$

23. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta$, $\partial w/\partial \beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

25. $f_r(r, s) = \dfrac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2)$, $f_s(r, s) = \dfrac{2rs}{r^2 + s^2}$

27. $\partial u/\partial t = e^{w/t}(1 - w/t)$, $\partial u/\partial w = e^{w/t}$

29. $f_x = z - 10xy^3z^4$, $f_y = -15x^2y^2z^4$, $f_z = x - 20x^2y^3z^3$

31. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$

33. $\partial u/\partial x = y \operatorname{sen}^{-1}(yz)$, $\partial u/\partial y = x \operatorname{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2}$, $\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$

35. $f_x = yz^2 \tan(yt)$, $f_y = xyz^2t \sec^2(yt) + xz^2 \tan(yt)$, $f_z = 2xyz \tan(yt)$, $f_t = xy^2z^2 \sec^2(yt)$

37. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

39. $\frac{1}{5}$ **41.** $\frac{1}{4}$

43. $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y$, $f_y(x, y) = 2xy - x^3$

45. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3xz - 2x}{2z - 3xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{1 + y + y^2z^2}$

49. (a) $f'(x)$, $g'(y)$ (b) $f'(x + y)$, $f'(x + y)$

51. $f_{xx} = 6xy^5 + 24x^2y$, $f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}$, $f_{yy} = 20x^3y^3$

53. $w_{uu} = v^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$, $w_{uv} = -uv/(u^2 + v^2)^{3/2} = w_{vu}$, $w_{vv} = u^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$

55. $z_{xx} = -2x/(1 + x^2)^2$, $z_{xy} = 0 = z_{yx}$, $z_{yy} = -2y/(1 + y^2)^2$

61. $12xy$, $72xy$

63. $24 \operatorname{sen}(4x + 3y + 2z)$, $12 \operatorname{sen}(4x + 3y + 2z)$

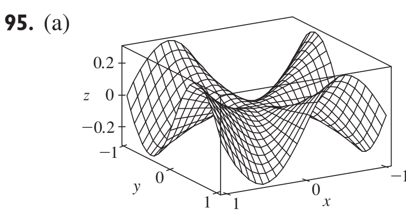
65. $\theta e^{r\theta}(2 \operatorname{sen} \theta + \theta \cos \theta + r\theta \operatorname{sen}\theta)$ **67.** $4/(y + 2z)^3$, 0

69. ≈ 12.2, ≈ 16.8, ≈ 23.25 **81.** R^2/R_1^2

87. No **89.** $x = 1 + t$, $y = 2$, $z = 2 - 2t$

93. -2

95. (a)



(b) $f_x(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_y(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$
(c) 0, 0 (e) No, porque f_{xy} y f_{yx} no son continuas.

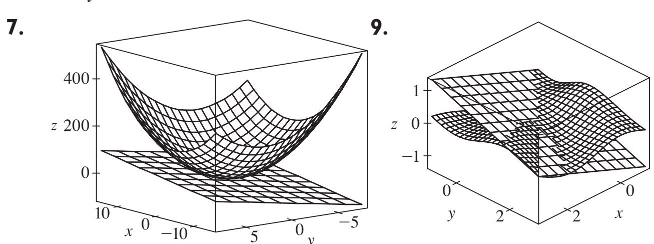
EJERCICIOS 14.4 ■ PÁGINA 899

1. $z = -8x - 2y$

3. $x + y - 2z = 0$

5. $z = y$

7. **9.**



11. $2x + \frac{1}{4}y - 1$ **13.** $\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{3}$ **15.** $1 - \pi y$

19. $-\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{20}{3}$; 2.846 **21.** $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$; 6.9914

23. $4T + H - 329$; 129°F

25. $dz = 3x^2 \ln(y^2)dx + (2x^3/y)dy$

27. $dm = 5p^4q^3\,dp + 3p^5q^2\,dq$

29. $dR = \beta^2 \cos \gamma\, d\alpha + 2\alpha\beta \cos \gamma\, d\beta - \alpha\beta^2 \operatorname{sen} \gamma\, d\gamma$

31. $\Delta z = 0.9225$, $dz = 0.9$ **33.** 5.4 cm² **35.** 16 cm³

37. 150 **39.** $\frac{1}{17} \approx 0.059\ \Omega$ **41.** 2.3%

43. $\varepsilon_1 = \Delta x$, $\varepsilon_2 = \Delta y$

EJERCICIOS 14.5 ■ PÁGINA 907

1. $(2x + y)\cos t + (2y + x)e^t$

3. $[(x/t) - y \text{ sen } t]/\sqrt{1 + x^2 + y^2}$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \text{ sen } t$
$\partial z/\partial t = -2sxy^3 \text{ sen } t + 3sx^2y^2 \cos t$

9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos\theta \cos\phi - 2st \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi$,
$\partial z/\partial t = 2st \cos\theta \cos\phi - s^2 \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\text{ sen }\theta\right)$,
$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\text{ sen }\theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$,
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

21. 85, 178, 54 **23.** $\frac{9}{7}, \frac{9}{7}$ **25.** 36, 24, 30

27. $\dfrac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$ **29.** $\dfrac{\text{sen}(x - y) + e^y}{\text{sen}(x - y) - xe^y}$

31. $\dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

33. $\dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, \ -\dfrac{z}{1 + y + y^2z^2}$

35. 2°C/s **37.** ≈ -0.33 m/s por minuto

39. (a) 6 m³/s (b) 10 m²/s (c) 0 m/s

41. ≈ -0.27 L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial r)\text{ sen }\theta$,
$\partial z/\partial\theta = -(\partial z/\partial x)r \text{ sen }\theta + (\partial z/\partial y)r\cos\theta$

51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$

EJERCICIOS 14.6 ■ PÁGINA 920

1. ≈ -0.08 mb/km **3.** ≈ 0.778 **5.** $2 + \sqrt{3}/2$

7. (a) $\nabla f(x, y) \neq \langle 2\cos(2x + 3y, \cos(2x + 3y)\rangle$
(b) $\langle 2, 3\rangle$ (c) $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$

9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$

11. 23/10 **13.** $-8/\sqrt{30}$ **15.** $4/\sqrt{30}$ **17.** $9/(2\sqrt{5})$

19. 2/5 **21.** $4\sqrt{2}, \langle -1, 1\rangle$ **23.** $1, \langle 0, 1\rangle$

25. $1, \langle 3, 6, -2\rangle$ **27.** (b) $\langle -12, 92\rangle$

29. Todos los puntos sobre la recta $y = x + 1$ **31.** (a) $-40/(3\sqrt{3})$

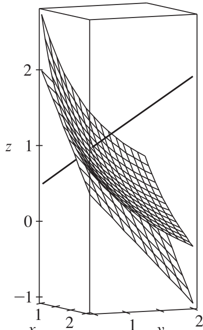
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$ **35.** $\frac{327}{13}$

39. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$

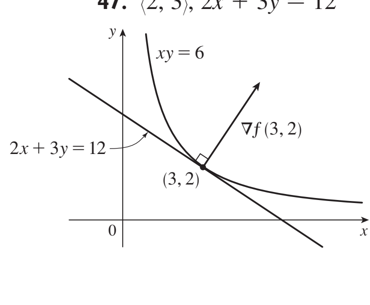
41. (a) $4x - 5y - z = 4$ (b) $\dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{y - 1}{-5} = \dfrac{z + 1}{-1}$

43. (a) $x + y - z = 1$ (b) $x - 1 = y = 2z$

45.



47. $\langle 2, 3\rangle$, $2x + 3y = 12$



53. No **59.** $x = -1 - 10t$, $y = 1 - 16t$, $z = 2 - 12t$

63. Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces $af_x + bf_y$ y $cf_x + df_y$ se conocen, de modo que de las ecuaciones lineales despeje f_x y f_y.

EJERCICIOS 14.7 ■ PÁGINA 930

1. (a) f tiene un mínimo local en (1,1). (b) f tiene un punto de depresión en (1, 1).

3. Mínimo local en (1, 1), punto de depresión en (0, 0)

5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$

7. Mínimos $f(1, 1) = 0$, $f(-1, -1) = 0$ punto de depresión en (0, 0)

9. Puntos de depresión en $(1, -1)$,$(-1, 1)$

11. Mínimo $f(2, 1) = -8$, punto de depresión en (0, 0)

13. Ninguno **15.** Mínimo $f(0, 0) = 0$, puntos de depresión en $(\pm 1, 0)$

17. Mínimos $f(0,1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, puntos de depresión en $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$

21. Mínimos $f(1, \pm 1) = 3$, $f(-1, \pm 1) = 3$

23. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, punto de depresión en (π, π)

25. Mínimos $f(-1.714, 0) \approx -9.200$, $f(1.402, 0) \approx 0.242$, punto de inflexión (0.312, 0), puntos más bajos (−1.714, 0 0, −9.200)

27. Máximos $f(-1.267, 0) \approx 1.310$, $f(1.629, \pm 1.063) \approx 8.105$, puntos de depresión (−0.259, 0), (1.526, 0)
puntos más altos (1.629, ±1.063, 8.105)

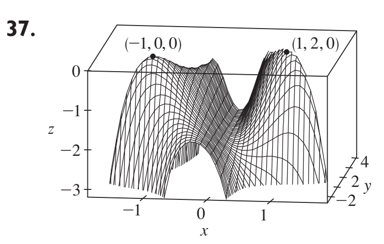
29. Máximo $f(2, 0) = 9$, mínimo $f(0, 3) = -14$

31. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$

33. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$

35. Máximo $f(1, 0) = 2$, mínimo $f(-1, 0) = -2$

37.



39. $\sqrt{3}$ **41.** $(2, 1, \sqrt{5})$, $(2, 1, -\sqrt{5})$ **43.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$

45. $8r^3/(3\sqrt{3})$

47. $\frac{4}{3}$ **49.** Cubo, longitud de arista $c/12$

51. Base cuadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **53.** $L^3/(3\sqrt{3})$

EJERCICIOS 14.8 ■ PÁGINA 940

1. $\approx 59, 30$

3. No hay máximo, mínimos $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

5. Máximos $f(\pm 2, 1) = 4$, mínimos $f(\pm 2, -1) = -4$

7. Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$

9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$

11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1

13. Máximo $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2$,
mínimo $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -2$

15. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$

17. Máximo $\frac{3}{2}$, mínimo $\frac{1}{2}$

19. Máximos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{1/4}$,
mínimos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$

27-37 Vea ejercicios 39-49 en sección 14.7.

39. $L^3/(3\sqrt{3})$

41. Más cercano $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, más lejano $(-1, -1, 2)$

43. Máximo ≈ 9.7938, mínimo ≈ -5.3506

45. (a) c/n (b) Cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

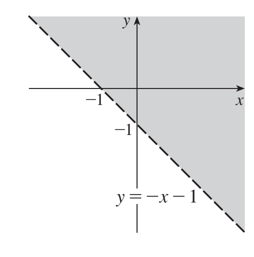
REPASO DEL CAPÍTULO 14 ■ PÁGINA 944

Preguntas de verdadero-falso

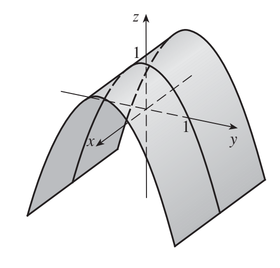
1. Verdadero **3.** Falso **5.** Falso **7.** Verdadero **9.** Falso
11. Verdadero

Ejercicios

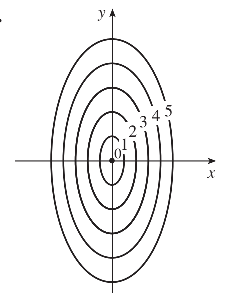
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



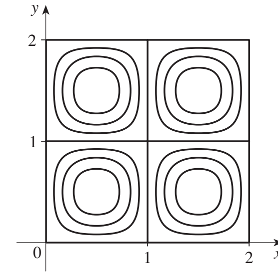
3.



5.



7.



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) ≈ 3.5°C/m, -3.0°C/m (b) ≈ 0.35°C/m
por la ecuación 14.6.9 (La definición 14.6.2 da ≈ 1.1°C/m.)
(c) -0.25

13. $f_x = 1/\sqrt{2x + y^2}, f_y = y/\sqrt{2x + y^2}$

15. $g_u = \tan^{-1}v, g_v = u/(1 + v^2)$

17. $T_p = \ln(q + e^r), T_q = p/(q + e^r), T_r = pe^r/(q + e^r)$

19. $f_{xx} = 24x, f_{xy} = -2y = f_{yx}, f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^l z^m, f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^l z^{m-1} = f_{zx}, f_{yy} = l(l-1)x^k y^{l-2}z^m$,
$f_{yz} = lmx^k y^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}, f_{zz} = m(m-1)x^k y^l z^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{4} = 1 - z$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$

29. (a) $4x - y - 2z = 6$
(b) $x = 3 + 8t, y = 4 - 2t, z = 1 - 4t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1), (-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; 38.656

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p \cos p + \operatorname{sen} p)$

37. $-47, 108$ **43.** $ze^{x\sqrt{y}}\langle z\sqrt{y}, xz/(2\sqrt{y}), 2\rangle$ **45.** $\frac{43}{5}$

47. $\sqrt{145}/2, \langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nudo/milla

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; puntos de depresión $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimo $f(1, \pm 1) = -3$, puntos de depresión $(-1, \pm 1), (1, 0)$

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$, mínimo
$f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4}), (\pm 3^{-1/4}, -3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3}), P(3 - \sqrt{3})/6, P(2\sqrt{3} - 3)/3$

PROBLEMAS ADICIONALES ■ PÁGINA 948

1. $L^2W^2, \frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sí

7. $\sqrt{6}/2, 3\sqrt{2}/2$

CAPÍTULO 15

EJERCICIOS 15.1 ■ PÁGINA 958

1. (a) 288 (b) 144

3. (a) $\pi^2/2 \approx 4.935$ (b) 0

5. (a) -6 (b) -3.5

7. $U < V < L$

9. (a) ≈ 248 (b) 15.5

11. 60 **13.** 3

15. 1.141606, 1.143191, 1.143535, 1.143617, 1.143637, 1.143642

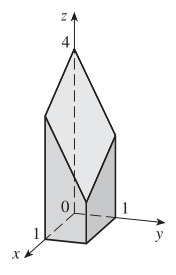
EJERCICIOS 15.2 ■ PÁGINA 964

1. $500y^3, 3x^2$ **3.** 10 **5.** 2 **7.** 261 632/45 **9.** $\frac{21}{2}\ln 2$

11. 0 **13.** π **15.** $\frac{21}{2}$ **17.** $9 \ln 2$

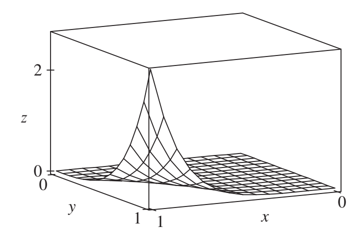
19. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}(e^2 - 3)$

23.



25. 47.5 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

33. $21e - 57$



35. $\frac{5}{6}$

37. No aplica el teorema de Fubini. El integrando tiene una discontinuidad infinita en el origen.

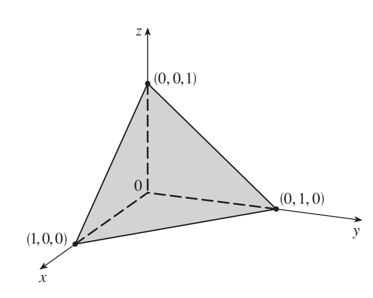
EJERCICIOS 15.3 ■ PÁGINA 972

1. 32 **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{4}{3}$ **9.** π **11.** $\frac{1}{2}e^{16} - \frac{17}{2}$

13. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **15.** $\frac{147}{20}$ **17.** 0 **19.** $\frac{7}{18}$ **21.** $\frac{31}{8}$

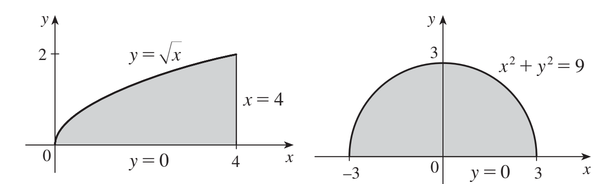
23. 6 **25.** $\frac{128}{15}$ **27.** $\frac{1}{3}$ **29.** 0, 1.213, 0.713 **31.** $\frac{64}{3}$

33.

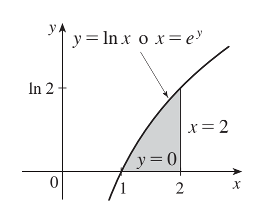


35. 13 984 735 616/14 549 535 **37.** $\pi/2$

39. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y)\,dx\,dy$ **41.** $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx$



43. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y)\,dx\,dy$



45. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ 47. $\frac{1}{3}\ln 9$ **49.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **51.** 1

53. $(\pi/16)e^{-1/16} \leqslant \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\,dA \leqslant \pi/16$ **55.** $\frac{3}{4}$

59. 8π **61.** $2\pi/3$

EJERCICIOS 15.4 ■ PÁGINA 978

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\,dr\,d\theta$ **3.** $\int_{-1}^1 \int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\,dy\,dx$

5. $33\pi/2$

7. 0 **9.** $\frac{1}{2}\pi \operatorname{sen} 9$ **11.** $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$

15. $\pi/12$ **17.** $\frac{1}{8}(\pi - 2)$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$

23. $\frac{4}{3}\pi a^3$ **25.** $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$

27. $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$

33. 1800π ft^3 **35.** $\frac{15}{16}$ **37.** (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

EJERCICIOS 15.5 ■ PÁGINA 988

1. $\frac{64}{3}$ C **3.** $\frac{4}{3}$, $(\frac{4}{3}, 0)$ **5.** 6, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$

7. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$, $\left(\dfrac{e^2 + 1}{2(e^2 - 1)}, \dfrac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

9. $L/4$, $(L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $(\frac{3}{8}, 3\pi/16)$ **13.** $(0.45/(14\pi))$

15. $(2a/5, 2a/5)$ si el vértice es (0, 0) y los lados están a lo largo de ejes positivos

17. $\frac{1}{16}(e^4 - 1)$, $\frac{1}{8}(e^2 - 1)$, $\frac{1}{16}(e^4 + 2e^2 - 3)$

19. $7ka^6/180$, $7ka^6/180$, $7ka^6/90$ si el vértice es (0, 0) y los lados están a lo largo de ejes positivos

21. $m = \pi^2/8$, $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{1}{\pi}, \dfrac{16}{9\pi}\right)$, $I_x = 3\pi^2/64$,
$I_y = \frac{1}{16}(\pi^4 - 3\pi^2)$, $I_0 = \pi^4/16 - 9\pi^2/64$

23. $\rho bh^3/3$, $\rho b^3h/3$; $b/\sqrt{3}$, $h/\sqrt{3}$

25. $\rho a^4\pi/16$, $\rho a^4\pi/16$; $a/2$, $a/2$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0.375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0.1042$

29. (b) (i) $e^{-0.2} \approx 0.8187$
(ii) $1 + e^{-1.8} - e^{-0.8} - e^{-1} \approx 0.3481$ (c) 2, 5

31. (a) $\approx$0.500 (b) $\approx$0.632

33. (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 +)y - y_0)^2}]\,dA$, donde D es el disco con radio 10 millas con centro en el centro de la ciudad
(b) $200\pi k/3 \approx 209k$, $200(\pi/2 - \frac{8}{9})k \approx 136k$, en el borde

EJERCICIOS 15.6 ■ PÁGINA 998

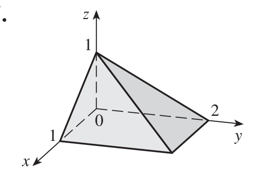
1. $\frac{27}{4}$ **3.** 1 **5.** $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $\frac{65}{28}$

13. $8/(3e)$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** 36π

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\,dy\,dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. 60.533

27.



29. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4x^2}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$

$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

33. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

35. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

$= \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\int_{y}^{1} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$

$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{z}^{x} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

37. $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$ **39.** $a^5, (7a/12, 7a/12, 7a/12)$

41. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} KL^5$ **43.** $\frac{1}{2}\pi kha^4$

45. (a) $m = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(d) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$\bar{x} = (1/m) \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} x\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

$\bar{y} = (1/m) \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} y\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

$\bar{z} = (1/m) \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$

(c) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dz\, dy\, dx$

47. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$

(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\dfrac{28}{9\pi + 44}, \dfrac{30\pi + 128}{45\pi + 220}, \dfrac{45\pi + 208}{135\pi + 660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

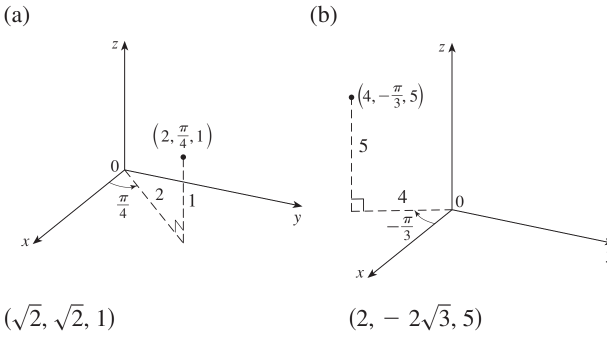
49. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5760}$

51. $L^3/8$

53. La región acotada por el elipsoide $x^2 + 2x^2 + 3z^2 = 1$

EJERCICIOS 15.7 ■ PÁGINA 1004

1. (a) (b)



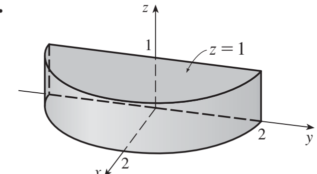
$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ $(2, -2\sqrt{3}, 5)$

3. (a) $(\sqrt{2}, 7\pi/4, 4)$ (b) $(2, 4\pi/3, 2)$

5. Semiplano vertical que pasa por el eje z **7.** Paraboloide circular

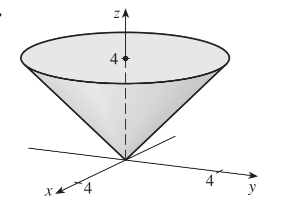
9. (a) $z = r^2$ (b) $r = 2$ sen θ

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 20$

15. $64\pi/3$



17. 384π **19.** $\pi(e^6 - e - 5)$ **21.** $2\pi/5$

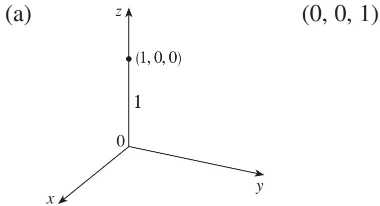
23. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

25. $\pi Ka^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$ **27.** 0

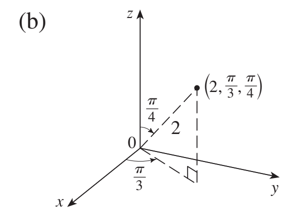
29. (a) $\iiint_C h(P)g(P)\, dv$, donde C es el cono
(b) $\approx 3.1 \times 10^{19}$ ft-lb

EJERCICIOS 15.8 ■ PÁGINA 1010

1. (a) $(0, 0, 1)$



(b) $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2})$



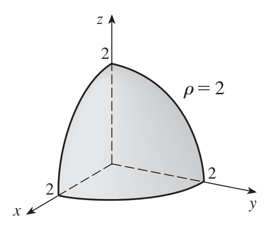
3. (a) $(4, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(\sqrt{2}, 3\pi/2, 3\pi/4)$

5. Medio cono

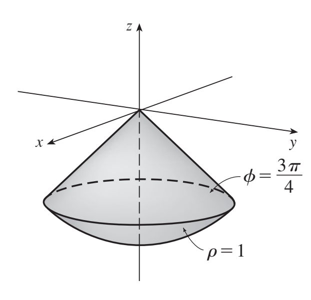
7. Esfera, radio $\frac{1}{2}$, centro $(0, \frac{1}{2}, 0)$

9. (a) $\cos^2 \phi = \operatorname{sen}^2 \phi$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \cos^2 \theta + \cos^2\phi) = 9$

11.

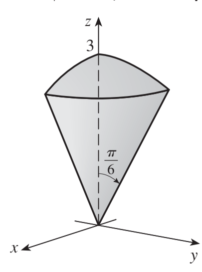


13.



15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \cos \phi$

17. $(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$



19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)r\,dz\,dr\,d\theta$

21. $312\,500\pi/7$ **23.** $15\pi/16$ **25.** $1562\pi/15$

27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2.1)$

31. $(0, \frac{525}{296}, 0)$

33. (a) $(0, 0, \frac{3}{8}a)$ (b) $4K\pi a^5/15$

35. $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})], (0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$

37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$

41.  **43.** $136\pi/99$

EJERCICIOS 15.9 ▪ PÁGINA 1020

1. 16 **3.** $\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2\theta$ **5.** 0

7. El paralelogramo con vértices (0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, −2)

9. La región limitada por la recta $y = 1$, el eje y, y $y = \sqrt{x}$

11. −3 **13.** 6π **15.** 2 ln 3

17. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) 1.083×10^{12} km³

19. $\frac{8}{5}\ln 8$ 21. $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 1$ **23.** $e - e^{-1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 15 ▪ PÁGINA 1021

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero **5.** Verdadero **7.** Falso

Ejercicios

1. ≈64.0 **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** $\frac{2}{3}$

9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta$

11. La región dentro del lazo de la rosa de cuatro hojas $r = \operatorname{sen} 2\theta$ en el primer cuadrante.

13. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **15.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8

21. $81\pi/5$ **23.** 40.5 **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$ **29.** 176

31. $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$

35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $(\frac{1}{3}, \frac{8}{15})$
(c) $I_x = \frac{1}{12}, I_y = \frac{1}{24};\ \bar{\bar{y}} = 1/\sqrt{3},\ \bar{\bar{x}} = 1/\sqrt{6}$

37. $(0, 0, h/4)$

39. 97.2 **41.** 0.0512

43. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$

45. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ **47.** $-\ln 2$ **49.** 0

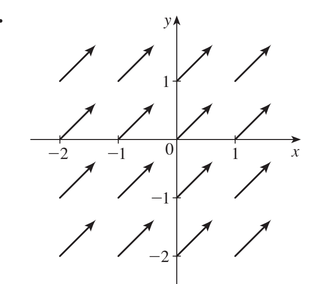
PROBLEMAS ADICIONALES ▪ PÁGINA 1024

1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** (b) 0.90

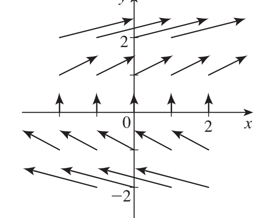
CAPÍTULO 16

EJERCICIOS 16.1 ▪ PÁGINA 1032

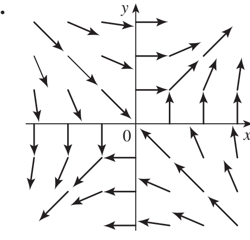
1.



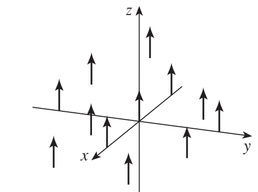
3.



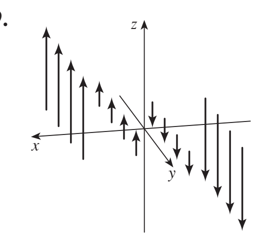
5.



7.

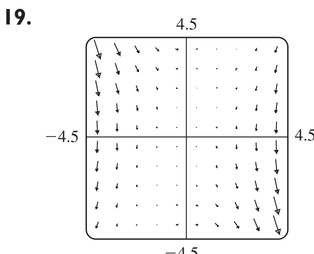
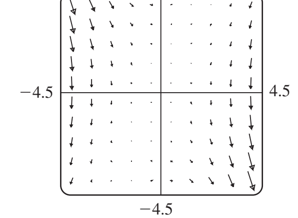


9.



11. II **13.** I **15.** IV **17.** III

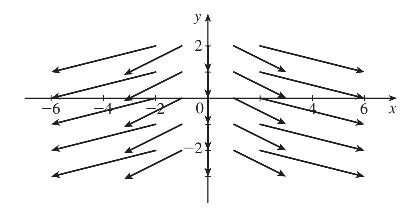
19. La recta $y = 2x$

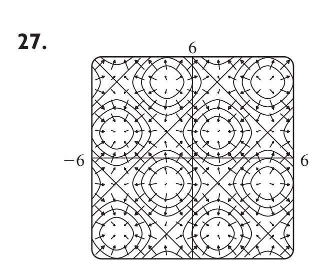
21. $\nabla f(x, y) = (xy + 1)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2e^{xy}\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

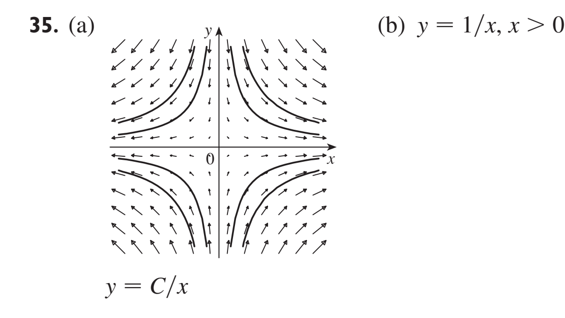


27.



29. III **31.** II **33.** (2.04, 1.03)

35. (a) (b) $y = 1/x, x > 0$



$y = C/x$

EJERCICIOS 16.2 ▪ PÁGINA 1043

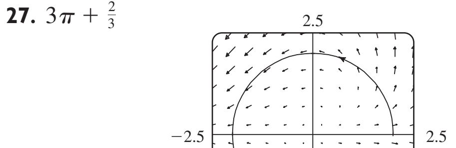
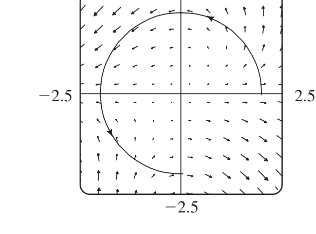
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638.4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{17}{3}$ **9.** $\sqrt{5}\pi$

11. $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{97}{3}$

17. (a) Positivo (b) Negativo

19. 45 **21.** $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1.9633 **25.** 15.0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$

29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)

31. $\frac{172{,}704}{5{,}632{,}05}\sqrt{2}\,(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k$, $(4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, donde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3})$, $I_y = k(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})$

39. $2\pi^2$ **41.** 26 **43.** 1.67×10^4 ft-lb **45.** (b) Sí

47. ≈ 22 J

EJERCICIOS 16.3 ▪ PÁGINA 1053

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + K$ **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$ (b) 0

19. 2 **21.** 30 **23.** No **25.** Conservativo

29. (a) Sí (b) Sí (c) Sí

31. (a) Sí (b) Sí (c) No

EJERCICIOS 16.4 ▪ PÁGINA 1060

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** 12 **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $\frac{4}{3} - 2\pi$

13. $\frac{625}{2}\pi$ **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ si la región es la parte del disco $x^2 + y^2 = a^2$ en el primer cuadrante

EJERCICIOS 16.5 ▪ PÁGINA 1068

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $(x - y)\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b) $z - 1/(2\sqrt{z})$

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle 1/y, -1/x, 1/x\rangle$ (b) $1/x + 1/y + 1/z$

9. (a) Negativo (b) rotacional $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Cero (b) rotacional $\mathbf{F}$ puntos en la dirección z negativa

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + K$

17. No conservativo **19.** No

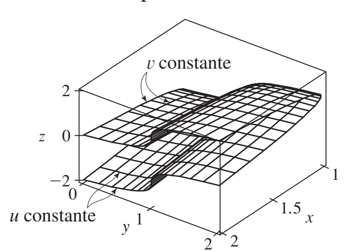
EJERCICIOS 16.6 ■ PÁGINA 1078

1. P: no; Q: sí

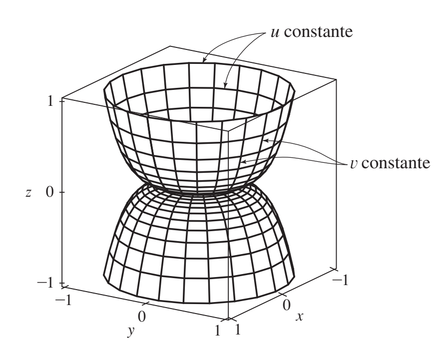
3. Plano que pasa por (0, 3, 1) que contiene vectores $\langle 1, 0, 4\rangle$, $\langle 1, -1, 5\rangle$

5. Paraboloide hiperbólico

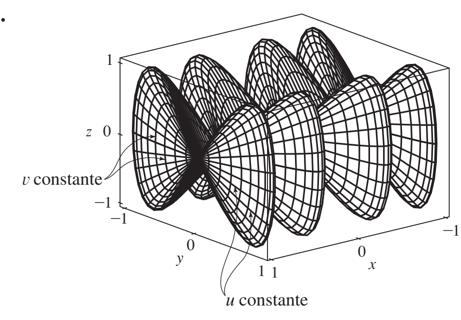
7.



9.



11.



13. IV **15.** II **17.** III

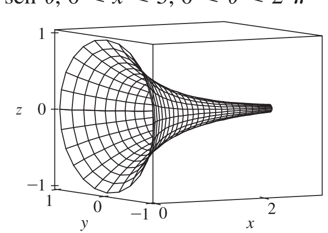
19. $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - v$, $z = -3 - u + v$

21. $x = x$, $z = z$, $y = \sqrt{1 - x^2 + z^2}$

23. $x = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$
$z = 2 \cos \phi$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
[o $x = x$, $y = y$, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 2$]

25. $x = x$, $y = 4 \cos \theta$, $z = 4 \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant x \leqslant 5$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x$, $y = e^{-x} \cos \theta$
$z = e^{-x} \operatorname{sen} \theta$, $0 \leqslant x \leqslant 3$,
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



31. (a) La dirección se invierte (b) El número de espiras se duplica

33. $3x - y + 3z = 3$ **35.** $-x + 2z = 1$ **37.** $3\sqrt{14}$

39. $\frac{4}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$ **41.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

43. $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

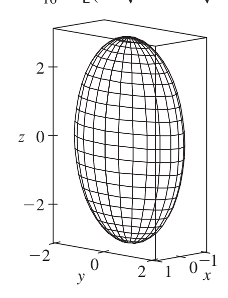
45. $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{17}{4}[\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln\sqrt{17}]$ **47.** 4

49. 13.9783

51. (a) 24.2055 (b) 24.2476

53. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

55. (b)



(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{36 \operatorname{sen}^4 u \cos^2 v + 9 \operatorname{sen}^4 u \operatorname{sen}^2 v + 4 \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u}\, du\, dv$

57. 4π 59. $2a^2(\pi - 2)$

EJERCICIOS 16.7 ■ PÁGINA 1091

1. 49.09 **3.** 900π **5.** $171\sqrt{14}$ **7.** $\sqrt{3}/24$

9. $5\sqrt{5}/48 + 1/240$ **11.** $364\sqrt{2}\,\pi/3$

13. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **15.** 16π **17.** 12

19. $\frac{713}{180}$ **21.** $-\frac{1}{6}$ **23.** $-\frac{4}{3}\pi$ **25.** 0 **27.** 48

29. $2\pi + \frac{8}{3}$ **31.** 0.1642 **33.** 3.4895

35. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [P(\partial h/\partial x) - Q + R(\partial h/\partial z)]\, dA$, donde D = proyección de S en el plano xz

37. $(0, 0, a/2)$

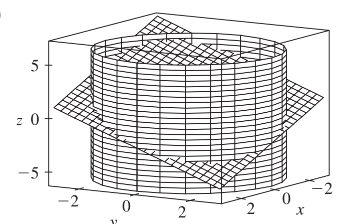
39. (a) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dS$ (b) $4329\sqrt{2}\pi/5$

41. 0 kg/s **43.** $\frac{8}{3}\pi a^3 \varepsilon_0$ **45.** 1248π

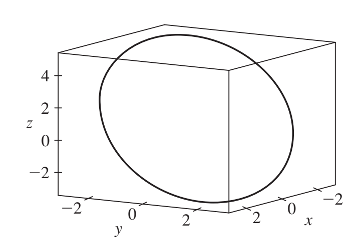
EJERCICIOS 16.8 ■ PÁGINA 1097

3. 0 **5.** 0 **7.** -1 **9.** 80π

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3 \cos t$, $y = 3 \operatorname{sen} t$,
$z = 1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t)$,
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



17. 3

EJERCICIOS 16.9 ■ PÁGINA 1103

5. 2 **7.** $9\pi/2$

9. 0 **11.** $32\pi/3$ **13.** 0

15. $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20} \operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/3)$ **17.** $13\pi/20$

19. Negativo en P_1, positivo en P_2

21. div $\mathbf{F} > 0$ en cuadrantes I, II; $\mathbf{F} < 0$ en cuadrantes III, IV

REPASO DEL CAPÍTULO 16 ■ PÁGINA 1106

Preguntas de verdadero-falso

1. Falso **3.** Verdadero **5.** Falso **7.** Verdadero

Ejercicios

1. (a) Negativo (b) Positivo **3.** $6\sqrt{10}$ **5.** $\frac{4}{15}$

7. $\frac{110}{3}$ **9.** $\frac{11}{12} - 4/e$ **11.** $f(x, y) = e^y + xe^{xy}$ **13.** 0

17. -8π **25.** $\frac{1}{6}(27 - 5\sqrt{5})$

27. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **29.** $-64\pi/3$

33. $-\frac{1}{2}$ **37.** -4 **39.** 21

CAPÍTULO 17

EJERCICIOS 17.1 ■ PÁGINA 1117

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **3.** $y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x$

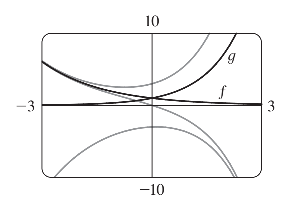
5. $y = c_1e^{2x/3} + c_2xe^{2x/3}$ **7.** $y = c_1 + c_2e^{x/2}$

9. $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x)$

11. $y = c_1e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + c_2e^{-(\sqrt{3}+1)t/2}$

13. $P = e^{-t}[c_1 \cos(\frac{1}{10}t) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{10}t)]$

15.



Todas las soluciones se aproximan a 0 o a $\pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$

17. $y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$ **19.** $y = e^{x/2} - 2xe^{x/2}$

21. $y = 3 \cos 4x - \operatorname{sen} 4x$ **23.** $y = e^{-x}(2 \cos x + 3 \operatorname{sen} x)$

25. $y = 3 \cos(\frac{1}{2}x) - 4 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x)$ **27.** $y = \dfrac{e^{x+3}}{e^3 - 1} + \dfrac{e^{2x}}{1 - e^3}$

29. No hay solución

31. $y = e^{-2x}(2 \cos 3x - e^{\pi} \operatorname{sen} 3x)$

33. (b) $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, n un entero positivo; $y = C \operatorname{sen}(n\pi x/L)$

EJERCICIOS 17.2 ■ PÁGINA 1124

1. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

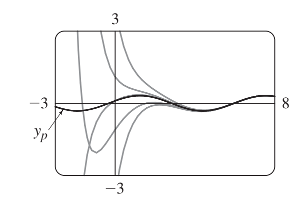
3. $y = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{40}\cos 4x - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 4x$

5. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + \frac{1}{10}e^{-x}$

7. $y = \frac{3}{2}\cos x + \frac{11}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$

9. $y = e^x(\frac{1}{2}x^2 - x + x)$

11.



Las soluciones son todas asintóticas a $y_p = \frac{1}{10}\cos x + \frac{3}{10}\operatorname{sen} x$ cuando $x \to \infty$. Excepto para toda y_p, todas las soluciones se aproximan a ∞ o a $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

13. $y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^2 + Fx + G)\operatorname{sen} x$

15. $y_p = Ax + (Bx + C)e^{9x}$

17. $y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\operatorname{sen} 3x]$

19. $y = c_1\cos(\frac{1}{2}x) + c_2 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{3}\cos x$

21. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$

23. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + \operatorname{sen} x \ln(\sec x + \tan x) - 1$

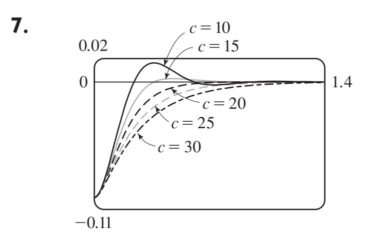
25. $y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$

27. $y = e^x[c_1 + c_2x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + x\tan^{-1}x]$

EJERCICIOS 17.3 ■ PÁGINA 1132

1. $x = 0.35 \cos(2\sqrt{5}\, t)$ **3.** $x = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$ **5.** $\frac{49}{12}$ kg

7.



13. $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6 \cos 20t + 3 \operatorname{sen} 20t) + \frac{3}{125}$, $I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t} \operatorname{sen} 20t$

15. $Q(t) = e^{-10t}[\frac{3}{250}\cos 20t - \frac{3}{500}\operatorname{sen} 20t]$ $-\frac{3}{250}\cos 10t + \frac{3}{125}\operatorname{sen} 10t$

EJERCICIOS 17.4 ■ PÁGINA 1137

1. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = c_0e^x$ **3.** $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0e^{x^3/3}$

5. $c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^n n!}{(2n + 1)!}x^{2n+1}$

7. $c_0 + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = c_0 - c_1 \ln(1 - x)$ para $|x| < 1$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

11. $x + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n - 1)^2}{(3n + 1)!}x^{3n+1}$

REPASO DEL CAPÍTULO 17 ■ PÁGINA 1138

Preguntas de verdadero-falso

1. Verdadero **3.** Verdadero

Ejercicios

1. $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-3x}$ **3.** $y = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}x)$

5. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 1)$

7. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x + 1)\operatorname{sen} x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}xe^{-2x}$

11. $y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$ **13.** $y = (e^{4x} - e^x)/3$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-2)^n n!}{(2n + 1)!}x^{2n+1}$

17. $Q(t) = -0.02e^{-10t}(\cos 10t - \operatorname{sen} 10t) + 0.03$

19. (c) $2\pi/k \approx 85$ min (d) $\approx$17 600 mi/h

ÍNDICE

PR denota números de página de referencia

aceleración de Coriolis, 851
aceleración de una partícula, 839
como vector, 839
componentes de, 842
afelio, 667
Airy, sir George, 728
amortiguador, 1126
ángulo entre vectores, 779
ángulo sólido, 1109
ángulos de dirección, 781
aplicación de una regla a una superficie, 804
apoluna, 661
aproximación
por desigualdad de Taylor, 737
por polinomios de Taylor, 749
aproximación cuadrática, 933
aproximación lineal, 894, 898
a un plano tangente, 894
área
de un sector de un círculo, 650
encerrada por una curva paramétrica, 632
en coordenadas polares, 650
por el teorema de Green, 1058
área, superficie, 635, 1075, 1077
área superficial
de una esfera, 1076
de una superficie paramétrica, 635, 1075
de una superficie $z = f(x, y)$, 1077
argumento de un número complejo, A7
asíntota de una hipérbola, 658
astroide, 629
axioma de plenitud, 682

base, 772
base estándar, 775
Bernoulli, John, 625, 736
Bessel, Friedrich, 724
Bézier, Pierre, 639
bidimensional, 772
binormal, 774, 775
Brache, Tycho, 844
bruja de María Agnesi, 628

cambio de variables
en una integral doble, 975, 1013, 1016
en una integral triple, 1002, 1007, 1019
campo
conservativo, 1032
de fuerza, 1031
eléctrico, 1031
escalar, 1029
gradiente, 919, 1031
gravitacional, 1031
incompresible, 1066
irrotacional, 1064
vectorial, 1027, 1028
velocidad, 1027, 1030
campo de fuerza, 1027, 1031
campo vectorial de velocidad, 1027
campo de velocidad, 1030
corrientes oceánicas, 1027
flujo de aire, 1027
patrones de viento, 1027
campo eléctrico (fuerza por unidad de carga), 1031
campo escalar, 1028
campo gravitacional, 1031
campo incompresible de velocidad, 1066
campo vectorial
conservativo, 1032
divergencia de, 1065
flujo de, 1087
flujo eléctrico de, 1089
fuerza, 1027, 1031
gradiente, 1031
gravitacional, 1031
incompresible, 1066
integral de línea de, 1087
irrotacional, 1064
rotacional de, 1062
velocidad, 1027
campo vectorial conservativo, 1032, 1053
campo vectorial gradiente, 919, 1031
campo vectorial irrotacional, 1064
cantidad de movimiento angular, 848
Cantor, Georg, 696
caracol, 670
cardioide, 643
carga eléctrica total, 980, 996
carga eléctrica, 980, 996
en un circuito, 1129
CAS. *Véase* sistema computarizado de álgebra
Cassini, Giovanni, 649
catástrofe ultravioleta, 757
Cauchy, Augustin-Louis, 961
centro de masa
de un alambre, 1036
de una lámina, 981
de una superficie, 1083
de un sólido, 996
centroide de un sólido, 996
cicloide, 624
ciencia de cohetes, 941
cilindro
parabólico, 805
parametrización de, 1073
cilindro parabólico, 805
circuito eléctrico, análisis de, 1129
circulación de un campo vectorial, 1096
círculo de curvatura, 835
círculo osculador, 835
cisoide de Diocles, 628, 648
Clairaut, Alexis, 885
Cobb, Charles, 856
coeficiente(s)
binomiales, 742
de fricción estática, 815
de una serie de potencia, 723

coeficientes binomiales, 742
coeficientes indeterminados, método
de, 1118, 1122
colector, 1103
combinación lineal, 1111
cometas, órbitas de, 668
como pendientes de rectas tangentes, 881
componente normal de aceleración, 842
componente tangencial de aceleración, 842
componentes de aceleración, 842
componentes de un vector, 772, 782
composición de funciones, continuidad
de, 875
concoide, 626, 648
conductividad (de una sustancia), 1090
conductividad térmica, 1090
cónicas desplazadas, 659
conjugado complejo, A5
conjugados, propiedades de, A6
conjunto acotado, 928, 1086
conjunto acotado o cerrado, 928
conjunto cerrado, 1086
conjunto de Cantor, 696
cono, 808
conservación de energía, 1052
constante de amortiguación, 1126
constante de resorte, 1125
continuidad
de una función de dos variables, 874
de una función de tres variables, 876
de una función vectorial, 818
convergencia
absoluta, 714
condicional, 715
de una serie, 688
de una sucesión, 677
intervalo de, 725
radio de, 725
coordenada *x*, 765
coordenada *y*, 765
coordenada *z*, 765
cosenos de dirección, 781
cúbica alabeada, 820
cero, 770
componentes de, 772
coplanar, 791
cuña esférica, 1007
curva cerrada, 1048
curva de catástrofe cola de golondrina, 629
curva de cuadrícula, 1071
curva de frontera, 1093
curva del copo de nieve, 761
curva de transferencia, 851
curva en el espacio, 818
longitud de arco de, 830, 831
curva lisa por partes, 1035
curva paramétrica, 621, 818
área bajo, 632
longitud de arco, 633
pendiente de una recta tangente a, 630
curva polar, 641
gráfica de, 641
longitud de arco, 652
recta tangente a, 644
simetría en, 644
curva simple, 1049
curva suave, 831
curva(s)
a nivel, 854, 860
bruja de María Agnesi, 628
catástrofe cola de golondrina, 629
cerrada, 1048
cisoide de Diocles, 628, 648
cúbica alabeada, 820
de Bézier, 624, 639
de cuadrícula, 1071
de silla de mono, 868
de silla de perro, 868
en el espacio, 818
epicicloide, 630
equipotencial, 868
espiral toroidal, 820
estrofoide, 653, 671
frontera de, 1093
hélice, 818
lisa, 831
lisa por partes, 1035
longitud de, 830
nudo de trébol, 820
orientación de, 1039, 1055
óvalo de Cassini, 649
paramétrica, 621, 818
polar, 641
simple, 1049
trocoide, 628
curvas de Bézier, 624, 639
curvas de contorno, 860
parametrización de, 1073
curva(s) de nivel, 854, 860
de presión barométrica, 854
de temperaturas, 861
curvas equipotenciales, 868
curvatura, 638, 832
cúspide, 626

De Moivre, Abraham, A9
densidad
de una lámina, 980
de un sólido, 996
densidad de carga, 980, 996
derivación
de una función vectorial, 824
de una serie de potencia, 729
fórmulas para funciones vectoriales, 826
fórmulas para, PR5
implícita, 883, 905
parcial, 878, 883, 884
término por término, 729
derivación implícita, 883, 905
derivación total, 896
derivación e integración
término por término, 729
derivada direccional, 910, 911, 914
de una función de temperatura, 910, 911
valor máximo de, 915
derivada normal, 1069
derivada(s)
de una función vectorial, 824
de una serie de potencia, 729
direccional, 910, 911, 914
normal, 1069
notación para parcial, 880
parcial, 879, 880
parcial de orden superior, 884
segunda parcial, 826
derivadas parciales de orden superior, 884
derivada(s) parcial(es), 879, 880
de una función de más de tres variables,
883
interpretaciones de, 881
como porcentajes de cambio, 880
notaciones para, 880
reglas para determinar, 880
segunda, 884
desigualdad de Cauchy-Schwarz, 786
desigualdad de Taylor, 737
desigualdad del triángulo para vectores, 786
determinante, 786
diagrama de árbol, 903
diferencial, 896, 898
directriz, 655, 662
disco satelital, parabólico, 810
diseño de un contenedor de basura,
minimizando su costo de construcción,
933
distancia
en el espacio, 793
entre planos, 801
entre puntos en el espacio, 767
entre un punto y una recta
entre un punto y un plano, 793, 800
divergencia
de una serie infinita, 688
de una sucesión, 677
de un campo vectorial, 1065
divergencia, prueba para, 692
división de series de potencia, 745
DNA, forma helicoidal de, 819
dominio de una función, 855
Douglas, Paul, 856

e (el número) como suma de una serie infinita, 739
ecuación(es)
conducción calorífica, 890
de Laplace, 886, 1066
de onda, 886
de una curva en el espacio, 818
de una elipse, 657, 664
de una esfera, 768

de una hipérbola, 658, 659, 664
de una parábola, 655, 664
de una recta en el espacio, 794, 795, 796
de un plano, 798
diferencial. *Véase* ecuación diferencial
lineal, 798
paramétrica, 641, 795, 818, 1070
polar, 641, 664
simétrica, 795
vectorial, 794
ecuación auxiliar, 1112
raíces complejas de, 1114
raíces reales de, 1113
ecuación característica, 1112
ecuación complementaria, 1117
ecuación de la conducción del calor, 890
ecuación de diferencia logística, 687
ecuación de Laplace, 886, 1066
ecuación de onda
ecuación diferencial
de segundo orden, 1111
homogénea, 1111
logística, 687
no homogénea, 1111, 1117
parcial, 886
soluciones linealmente independientes, 1112
ecuación diferencial de segundo orden, soluciones de, 1111, 1116
ecuación diferencial homogénea, 1111
ecuación diferencial no homogénea, 1111, 1117
ecuación diferencial parcial, 886
ecuación escalar de un plano, 798
ecuación lineal de un plano, 798
ecuación polar, gráfica de, 641
ecuación polar de una cónica, 664
ecuación vectorial
de una curva plana, 818
de una recta, 794, 795
ecuaciones paramétricas, 621
de una curva espacial, 818
de una recta, 795
de una superficie, 1070
de una trayectoria, 841
de un plano, 798
de un segmento de recta, 797
ecuaciones simétricas de una recta, 795
efecto Doppler, 909
efecto multiplicador, 695
eje de una parábola, 655
eje mayor de elipse, 657
eje polar, 639
eje x, 765
eje y, 765
eje z, 765
ejes de coordenadas, 765
elipse, 656, 662
directriz, 662
ecuación polar, 664, 667
eje mayor, 657
excentricidad, 662
focos, 656, 662
propiedad de reflexión, 658
vértices, 657
elipsoide, 806, 808
energía
cinética, 1052
conservación de, 1052
potencial, 1053
energía cinética, 1052
energía potencial, 1053
epicicloide, 630
equipo de gráficas. *Véase* sistema computarizado de álgebra
error en aproximación de Taylor, 750
escalar, 771
esfera
área superficial de, 1076
ecuación de, 768
flujo en una, 1088
parametrización de, 1072
espacio, tridimensional, 765
espiral de Cornu, 637
espiral toroidal, 820
estimación de error para serie alterna, 712
estimación de la suma de una serie, 700, 708, 712, 717
estimaciones de residuo
para la prueba de la serie alternante, 712
para la prueba integral, 701
estrategia para probar series, 721
estrofoide, 653, 671
estructura TNB, 835
Euler, Leonhard, 698, 739
excentricidad, 662
expansión continuada de fracción, 686
exponenciales complejos, A11

familia de hipocicloides, 629
Fibonacci, 686
figura de Lissajous, 629
flujo, 1087, 1089
flujo de un fluido, 1030, 1066, 1088
flujo eléctrico, 1089
flujo térmico, 1090
foco
de una elipse, 656, 662
de una hipérbola, 658
de una parábola, 655
folio de Descartes, 672
forma polar de un número complejo, A7
fórmula de Euler, A11
fórmula de la distancia en tres dimensiones, 767
fórmulas de Frenet-Serret, 838
franja de Möbius, 1079, 1085
fricción estática, coeficiente de, 815
Fubini, Guido, 961
fuente, 1103
fuerza
centrípeta, 852
constante, 783
de torsión, 791
resultante, 776
fuerza centrípeta, 852
fuerza eléctrica, 1031
fuerza restauradora, 1125
fuerza resultante, 776
función(es)
armónica, 886
componente, 817, 1028
compuesta, 875
continuidad de, 818, 874, 876
de Bessel, 724, 728
de n variables, 865
densidad conjunta, 985, 996
densidad de probabilidad, 985
de polinomios, 874
derivación de, 895
de tres variables, 864
de valor vectorial, 817
de varias variables, 855, 864
dominio de, 855
función de Airy, 728
gradiente de, 913, 915
gráfica de, 858
homogénea, 909
integrable, 953
límite de, 871, 876
lineal, 858
longitud de arco, 830, 831
potencial, 1032
producción de Cobb-Douglas, 857, 887, 940
racional, 874
rango de, 855
representación como una serie de potencia, 728
valor promedio de, 956, 1000
valores máximo y mínimo de, 922, 923, 855
vectorial, 817
función armónica, 886
función coseno, serie de potencia para, 740
función de Airy, 728
función de Bessel, 724, 728
función de componente, 817, 1028
función de densidad conjunta, 985, 996
función de densidad de probabilidad, 985
función de longitud de arco, 831
función de producción de Cobb-Douglas, 857, 887, 940
función derivable, 895
función de un polinomio de dos variables, 874
función de valor vectorial. *Véase* función vectorial

función exponencial,
integración de, 743, 744
serie de potencia para, 736
función exponencial natural, serie de potencia para, 736
función homogénea, 909
función integrable, 953
función potencial, 1032
función racional, 874
función seno
de una sección cónica, 662
serie de potencia para, 740
función vectorial, 817
continuidad de, 818
derivada de, 824
ecuaciones paramétricas de, 818
fórmulas de derivación para, 826
integración de, 827
límite de, 817

Galileo, 625, 633
Gauss, Karl Friedrich, 1099
geometría de un tetraedro, 794
gradiente, 913, 915
gráfica
de una curva paramétrica, 622
de una función de dos variables, 858
de una sucesión, 680
de una superficie paramétrica, 1083
polar, 641
gráfica polar, 641
gran círculo, 1011
Green, George, 1056, 1098
Gregory, James, 732, 736

Hecht, Eugene, 754
hélice, 818
hipérbola, 658, 662
asíntotas, 658
directriz, 662
ecuación, 658, 659, 664
ecuación polar, 664
excentricidad, 662
focos, 658, 662
propiedad de reflexión, 662
ramas, 658
vértices, 658
hiperboloide, 808, 810
hiperesfera, 1000
hipocicloide, 629
Huygens, Christian, 625

i (número imaginario), A5
i (vector estándar de base), 774
identidades de Green, 1069
imagen de una región, 1013
imagen de un punto, 1013
incremento, 898
independencia de trayectoria, 1047
índice de temperatura-humedad, 866, 878
índice de viento-frío
patrones de viento en la zona de la bahía de San Francisco, 1027
índice térmico, 878
inercia (momento de), 983, 996, 1045
integración
de una función vectorial, 827
de una serie de potencia, 729
fórmulas, PR6-10
inversión de orden de, 962, 970
parcial, 960
término por término, 729
integración parcial, 960
integral(es)
cambio de variables en, 1011, 1016, 1019
conversión a coordenadas cilíndricas, 1002
conversión a coordenadas esféricas, 1007
conversión a coordenadas polares, 975
de línea, 1034. *Véase también* integral de línea
de superficie, 1081, 1087
definida, 827, 951
doble, 951, 953. *Véase también* integral doble
iterada, 959, 960
tabla de, PR6-10
triple, 990.Véase *también* integral triple
integral definida, 951
de una función de valor vectorial, 827
integral de flujo, 1087
integral de línea, 1034
con respecto a longitud de arco, 1037
de campos vectoriales, 1041, 1042
para una curva en el espacio, 1039
para una curva plana, 1034
teorema fundamental para, 1046
trabajo definido como, 1041
integral de superficie, 1081
de un campo vectorial, 1087
sobre una superficie paramétrica, 1081
integral doble, 951, 953
cambio de variable en, 1013, 1016
en coordenadas polares, 974, 975
propiedades de, 958, 970
regla del punto medio para, 955
sobre rectángulos, 951
sobre regiones generales, 965, 966
integral iterada, 959, 960
intersección de gráficas polares, área de, 651
intersección de planos, 799
intersección de tres cilindros, 1005
intervalo de convergencia, 725
isobaras, 854, 861
integrales múltiples.*Véase* integral doble; integral(es) triple(s)
integral(es) triple(s), 990
aplicaciones de, 995
en coordenadas cilíndricas, 1002
en coordenadas esféricas, 1007, 1008
regla del punto medio para, 998
sobre una región general acotada, 991

j (vector estándar de base), 774
Jacobi, Carl, 1015
jacobiano de la transformación, 1015, 1019

k (vector estándar de base), 774
Kepler, Johannes, 844, 848
Kondo, Shigeru

Lagrange, Joseph-Louis, 935
lámina, 980
Laplace, Pierre, 886, 1066
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 748
ley de conservación de cantidad de movimiento angular, 848
ley de conservación de energía, 1053
ley de Gauss, 1090
ley de Hooke, 1125
ley del paralelogramo, 771, 786
ley del triángulo, 771
ley de Newton de gravitación, 844, 1030
ley de Planck, 757
ley de Rayleigh-Jeans, 757
ley de un gas ideal, 891
leyes de Kepler, 844, 848
leyes de Kirchhoff, 1129
leyes de límite
para funciones de dos variables, 873
para secuencias, 678
límite
de una función de dos variables, 871
de una función de tres variables, 876
de una función vectorial, 817
de una sucesión, 677
límite superior mínimo, 682
línea isoterma, 861, 868
linealidad de una integral, 958
linealización, 894
líneas de flujo, 1033
litotripsia, 658
longitud
de una curva en el espacio, 830
de una curva paramétrica, 633
de una curva polar, 652
de un vector, 773
longitud de arco
de una curva en el espacio, 830, 831
de una curva paramétrica, 633
de una curva polar, 652

Maclaurin, Colin, 736
magnitud de un vector, 773
mapa de contorno, 860

masa
de un alambre, 1036
de una lámina, 980
de una superficie, 1083
de un sólido, 996
masa, centro de. *Véase* centro de masa
máximo y mínimo absolutos, 923, 928
media aritmética-geométrica, 686
media *X*, 987
media *Y*, 987
membrana de caucho, vibración de, 724
método de coeficientes indeterminados, 1118, 1122
método de intervalo cerrado
para una función de dos variables, 929
método de mínimos cuadrados, 932
método de multiplicadores de Lagrange, 934, 935, 938
método polar de inercia, 983
Möbius, August, 1085
modelo matemático Cobb-Douglas, para costos de
producción, 857, 887, 940
para vibración de membrana, 724
módulo, A6
momento
alrededor de un eje, 981
alrededor de un plano, 996
de inercia, 983, 996, 1045
de una lámina, 981
de un sólido, 995
polar, 983
segundo, 983
movimiento armónico simple, 1125
movimiento de un resorte, fuerza que afecta el
de amortiguamiento, 1126
de resonancia, 1129
restauradora, 1125
movimiento en el espacio, 838
movimiento planetario, 844
multiplicación, escalar, de vectores, 771, 773
multiplicación de series de potencia, 745
multiplicador de Lagrange, 934, 935, 938
múltiplo escalar de un vector, 771

Nabla (∇), 913
Newton, sir Isaac, 748, 844, 848
Nicomedes, 626
nudo de trébol, 820
número, complejo, A5
número(s) complejo(s), A5
argumento de, A7
división de, A5, A8
forma polar, A7
igualdad de, A5
módulo de, A6
multiplicación de, A5, A8
parte imaginaria de, A5
parte real de, A5
potencias de, A9
raíces de, A10
raíz cuadrada principal de, A6
números de dirección, 795

octante, 765
operador de Laplace, 1066
óptica
de Gauss, 754
de primer orden, 754
de tercer orden, 755
óptica de Gauss, 754
óptica de primer orden, 754
optimización de hidroturbina, 943
órbitas de planetas, 844, 848
orden de integración, invertido, 962, 970
orden de inversión de integración, 962, 970
Oresme, Nicole, 692
orientación
de una curva, 1039, 1055
de una superficie, 1086
orientación positiva
de una curva cerrada, 1055
de una curva de frontera, 1093
de una superficie, 1086
Ostrogradsky, Mikhail, 1099
óvalos de Cassini, 649

parábola, 655, 662
directriz, 655, 662
ecuación, 655, 662
ecuación polar, 664
eje, 655
foco, 655, 662
vértice, 655
paraboloide, 806, 810
paraboloide circular, 810
paraboloide elíptico, 806, 808
paraboloide hiperbólico, 807, 808
paralelepípedo, volumen de, 791
parametrización de una curva en el espacio, 820
con respecto a longitud de arco, 831
lisa, 831
parametrización suave, 831
parámetro, 621, 795, 818
partícula, movimiento de, 838
patrones de viento en la zona de
la bahía de San Francisco, 1027
perihelio, 667
periluna, 661
plano horizontal, ecuación de, 766
plano normal, 835
plano osculador, 835
plano(s), 797
coordenadas, 765
ecuación(es) de, 797, 798
horizontal, 766
normal, 835
osculador, 835
paralelo, 799
tangente a una superficie, 892, 917, 1074
vertical, 766
planos coordenados, sistema coordenado
cilíndrico, 1001
esférico, 1005
polar, 639
rectangular en tres dimensiones, 766
plano tangente
a una superficie de nivel, 917
a una superficie $F(x, y, z) = k$, 917
a una superficie paramétrica, 1074
a una superficie $z = f(x, y)$, 892
plano vertical, ecuación de, 766
plano *xy*, 766
plano *xz*, 766
planos no paralelos, 799
planos paralelos, 799
planos recortadores, 804
polinomio de Taylor, 737, 933
aplicaciones de, 749
polinomio de Taylor de *n* grado, 737
polo, 639
primer octante, 765
principio de Arquímedes, 1104
principio de su superposición, 1120
probabilidad, 985
problema braquistócrona, 625
problema del valor inicial, 1115
problema de valor en la frontera, 1116
problema tautócrono, 625
productividad marginal, 887
producto
cruz, 786. *Véase también* producto cruz
escalar, 779
punto, 799. *Véase también* producto punto
triple, 790
triple escalar, 790
producto cruz, 786
caracterización geométrica de, 789
dirección de, 788
magnitud de, 789
propiedades de, 790
producto escalar, 779
producto interior, 779
producto punto, 779
en forma de componentes, 779
propiedades de, 779
producto triple, 790
producto triple escalar, 790
generalización geométrica de, 791
producto triple vectorial, 791
producto vectorial, 786
propiedades del, 790
propensión marginal a consumir o ahorrar, 695

propiedad de reflexión
  de una elipse, 658
  de una hipérbola, 662
proyección, 766, 782, 783, 785
proyección escalar, 782, 783
proyección ortogonal, 785
proyección vectorial, 782, 783
proyectil, trayectoria de, 629, 841
prueba por comparación, 705
prueba de integral, 697, 699
prueba de límite de comparación, 707
prueba de raíz, 718
prueba de razón, 716
prueba de segundas derivadas, 924
prueba de serie alterna, 710
pruebas para convergencia y divergencia de series
  prueba de comparación de límite, 707
  prueba de raíz, 718
  prueba de razón, 716
  prueba de serie alterna, 710
  prueba integral, 697, 699
  prueba para divergencia, 692
  prueba por comparación, 705
  resumen de pruebas, 721
prueba para divergencia, 692
pruebas de comparación para series, 705
punto de muestra, 952
punto de silla, 924
punto inicial
  de un vector, 770
  de una curva paramétrica, 622
punto(s) crítico(s), 923, 933
punto(s) en el espacio
  coordenadas de, 765
  distancia entre, 767
  proyección de, 766
puntos estacionarios, 923
punto terminal
  de un vector, 770
  de una curva paramétrica, 622

radiación de cuerpo negro, 757
radiación de estrellas, 757
radio de convergencia, 725
radio de giro, 984
raíces de un número complejo, A10
raíz cuadrada principal de un número complejo, A6
ramas de una hipérbola, 658
rango de una función, 855
rapidez angular, 840
razón común, 689
reacomodo de una serie, 719
recta (en espacio)
  ecuación vectorial de, 794, 795
  ecuaciones paramétricas de, 795
  ecuaciones simétricas de, 795
  normal, 918
  sesgada, 797
  tangente, 824
recta normal, 919
recta tangente
  a una curva en el espacio, 824
  a una curva paramétrica, 630
  a una curva polar, 644
rectángulo polar, 974
rectas sesgadas, 797
región
  abierta, 1048
  conectada, 1048
  plana, de tipo I o II, 966, 967
  plana simple, 1056
  simplemente conectada, 1049
  sólida (tipo 1, 2 o 3), 991, 993
  sólida simple, 1099
región abierta, 1048
región conectada, 1048
región plana de tipo I, 966
región plana de tipo II, 967
región plana simple, 1056
región plana tipo I o tipo II, 966, 967
región polar, área de, 650
región simplemente conectada, 1049
región sólida, 1099
región sólida simple, 1099
región sólida tipo 1, 2 o 3, 991, 993
regla de la cadena para varias variables, 901, 903, 904
regla de la mano derecha, 765, 788
regla del punto medio
  para integrales dobles, 955
  para integrales triples, 998
relación de repetición, 1134
  representación de una función como una serie de potencia, 728
residuo de la serie de Taylor, 737
resonancia, 1129
resorte en vibración, 1125
restricción, 934, 938
Roberval, Gilles de, 633
rosa de cuatro hojas, 643
rotacional de un campo vectorial, 1062

sección cónica, 654, 662
  desplazada, 659
  directriz, 662
  ecuaciones polares para, 664
  excentricidad, 662
  foco (focos), 662
  vértice (vértices), 655
sección transversal de una superficie, 804
sector de un círculo, área de, 650
  segunda derivada de una función vectorial, 826
segunda derivada parcial, 884
segunda ley de Newton de movimiento, 840, 844, 1125
segundo momento de inercia, 983
semiespacio, 864
serie, 687
  absolutamente convergente, 714
  alterna, 710
  alterna armónica, 711, 715
  armónica, 691
  coeficientes de, 723
  condicionalmente convergente, 715
  convergente, 688
  de binomios, 742, 748
  de Gregory, 732
  de Maclaurin, 734, 736
  de Taylor, 734, 736
  divergente, 688
  estrategia para probar, 721
  geométrica, 688
  infinita, 687
  p, 699
  reacomodo de, 719
  suma de, 688
  suma parcial de, 688
  términos de, 687
  trigonométrica, 723
serie absolutamente convergente, 714
serie armónica, 691
serie armónica alternante, 711
serie binomial, 742, 748
  descubrimiento por Newton, 748
serie condicionalmente convergente, 715
serie convergente, 688
  propiedades de, 693
serie de Gregory, 732
serie de potencia, 723
  coeficientes de, 723
  derivación de, 729
  división de, 745
  integración de, 729
  intervalo de convergencia, 725
  multiplicación de, 745
  para coseno, 740
  para función exponencial, 740
  para seno, 740
  radio de convergencia, 725
  representaciones de funciones como, 728
serie de Maclaurin, 734, 736
  tabla de, 743
serie de Taylor, 734, 736
serie divergente, 688
serie geométrica, 688
serie infinita. *Véase* serie
serie *p*, 699
serie trigonométrica, 723
silla de mono, 868
silla de perro, 868
simetría en gráficas polares, 644
Simpson, Thomas, 949
sistema computarizado de álgebra, integración con, 732
sistema computarizado de álgebra, graficar con
  campo vectorial, 1029

curva en el espacio, 820
curva polar, 646
curvas a nivel, 864
derivadas parciales, 885
ecuaciones paramétricas, 624
función de dos variables, 859
para crear una escena tridimensional, 804
sucesión, 680
sistema de coordenadas cilíndricas, 1001
ecuaciones de conversión para, 1001
integrales triples en, 1001
sistema de coordenadas esféricas, 1005
ecuaciones de conversión para, 1006
integrales triples en, 1006
sistema de coordenadas polares, 639
área en, 650
coordenadas cartesianas, 640, 641
conversión de integral doble
ecuaciones de conversión para
secciones cónicas en, 662
sistema de coordenadas rectangulares
conversión a coordenadas cilíndricas, 1001
conversión a coordenadas esféricas, 1006
tridimensional, 766
sistema de coordenadas tridimensionales, 766
sistema LORAN, 661
sólido, volumen de, 991, 992
solución a estado estable, 1131
solución serie de una ecuación diferencial, 1133
soluciones linealmente independientes, 1112
Stokes, sir George, 1093, 1098
sucesión, 675
acotada, 682
convergente, 677
creciente, 681
decreciente, 681
de Fibonacci, 676
de sumas parciales, 688
divergente, 677
gráfica de, 680
leyes de límite para, 678
límite de, 677
monotónica, 681
términos de, 6745
sucesión acotada, 682
sucesión convergente, 677
sucesión creciente, 681
sucesión decreciente, 681
sucesión de Fibonacci, 676
sucesión divergente, 677
sucesión infinita. *Véase* sucesión
sucesión logística, 687
sucesión monotónica, 681
suma
de una serie geométrica, 689
de una serie infinita, 688
de vectores, 770, 773
extensible, 691
suma de vectores, 770, 773
suma doble de Riemann, 954
suma extensible, 691
suma parcial de una serie, 688
suma triple de Riemann, 990
sumas de Riemann para integrales múltiples, 954, 990
superficie(s), 766
cerrada, 1086
cuadrática, 805. *Véase también* superficie cuadrática
de nivel, 865
gráfica de, 1083
lisa, 1075
orientación positiva de, 1086
orientada, 1086
paramétrica, 1070
superficie(s) cuadrática(s), 805
cilindro, 805
cono, 808
elipsoide, 806, 808
hiperboloide, 808, 810
paraboloide, 806, 810
tabla de gráficas, 808
superficie de nivel, 865
plano tangente a, 917
superficie lisa, 1075
superficie orientada, 1085, 1086
superficie paramétrica, 1072
superficie generada, 812
superficies ortogonales, 922
superficie paramétrica, 1070
área superficial de, 1075, 1076
gráfica de, 1083
integral de superficie sobre, 1081
plano tangente a, 1974
superficie de revolución,
representación paramétrica de, 1073

tabla de fórmulas de derivación, PR5
tablas de integrales, PR6-10
tapete de Sierpinski, 696
Taylor, Brook, 736
teorema de Clairaut, 885, A3
teorema de De Moivre, A9
teorema de Fubini, 961, 991
teorema de función implícita, 906
teorema de Gauss, 1099
teorema de Green, 1055, 1098
formas vectoriales, 1066, 1067
teorema de la compresión para sucesiones, 679
teorema de la divergencia, 1099
teorema del valor extremo, 928ç
teorema de sucesión monotónica, 683
teorema de valor medio para integrales dobles, 1023
teorema fundamental de cálculo,
para funciones vectoriales, 828
para integrales de línea, 1046
versiones de dimensiones más elevadas, 1105
término de una serie, 687
término de una sucesión, 675
tetraedro, 794
Thomson, sir William (Lord Kelvin), 1056,1093, 1098
toro, 1081
torre de enfriamiento, hiperbólica, 810
Torricelli, Evangelista, 633
torsión, 791, 848
torsión de una curva en el espacio, 838
trabajo, 783
definido como una integral de línea, 1041
transformación, 1013
biunívoca, 1013
inversa, 1013
jacobiano de, 1015, 10189
transformación biunívoca, 1013
transformación C^1, 1013
transformación inversa, 1013
transformaciones T y T^{-1}, 1013
trayectoria, 1047
trayectoria, ecuaciones paramétricas para, 841
trazo de una superficie, 804
triple ordenado, 765
trocoide, 628

valor absoluto A6
valores absolutos máximo y mínimo, 923, 928
valores esperados, 987
valores locales máximo y mínimo, 923
valores máximo y mínimo, 922, 923
valor promedio de una función, 956, 1000
variable
aleatoria independiente, 986
dependiente, 855, 903
independiente, 855, 903
intermedia, 903
variable aleatoria independiente, 986
variable dependiente, 855, 903
variable independiente, 855, 903
variable intermedia, 903
variables, cambio de. *Véase* cambio de variables
variación de parámetros, método de, 1122, 1123
vector(es), 770
aceleración como, 839
algebraico, 772
ángulo entre, 779
base, 772

base estándar, 775
bidimensional, 772
binormal, 774, 775
cero, 770
componentes de, 772
coplanar, 791
desplazamiento, 770, 780
diferencia de, 771
equivalente, 770
fuerza, 1030
gradiente, 913, 915
i, j y **k,** 775
longitud de, 773
magnitud de, 773
multiplicación de, 771, 773
múltiplo escalar de, 771
n- dimensional, 774
negativo, 771
normal, 797, 834
normal unitario principal, 834
ortogonal, 781
paralelo, 771
perpendicular, 781
posición, 773
producto cruz de, 772, 786
producto triple, 790, 791
propiedades de, 774
proyección de, 782, 783
punto inicial de, 770
punto terminal de, 770
representaciones geométricas de, 772
suma de, 770, 773
sustracción de, 773
tangente, 824
tridimensional, 772
unitario, 772
unitario normal, 834
unitario tangente, 824
velocidad, 831
velocidad del viento, 764
vector binormal, 834
vector cero, 770
vector de desplazamiento, 770, 783
vectores coplanares, 791
vectores de base, 774, 775
vectores equivalentes, 770
vectores estándar base, 774, 775
vectores ortogonales, 781
vectores paralelos, 771
vectores perpendiculares, 781
vector gradiente, 913, 915
interpretaciones de, 919, 920
vector *n* dimensional, 774
vector normal, 797, 834
vector normal unitario principal. 834
vector posición, 773
vector secante, 824
vector tangente, 824
vector unitario, 775
vector unitario normal, 834
vector unitario tangente, 824
vector velocidad, 831
velocidad de una partícula, 839
velocidad promedio, 838
velocidad respecto a Tierra, 778
vértice de una parábola, 655
vértices
de una elipse, 657
de una hipérbola, 658
vibración amortiguada, 1126
vibración críticamente amortiguada, 1127
vibración de una membrana de caucho, 724
vibraciones, 1125, 1126, 1128
vibraciones forzadas, 1128
vibración sobreamortiguada, 1127
vibración subamortiguada, 1127
volumen
de una hiperesfera, 1000
de un sólido, 953
por integrales dobles, 951
por integrales triples, 995

Wren, sir Christopher, 635

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

FÓRMULAS GENERALES

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

2. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

4. $\dfrac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$

5. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regla del producto)

6. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (Regla del cociente)

7. $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regla de la cadena)

8. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ (Regla de potencias)

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

9. $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

11. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

12. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

13. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$

14. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

15. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

16. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

17. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

18. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

19. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

20. $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

25. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

26. $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

27. $\dfrac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

28. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

29. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

30. $\dfrac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

31. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

TABLA DE INTEGRALES

FORMAS BÁSICAS

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C$

FORMAS QUE INVOLUCRAN $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^4}{8}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

23. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 + u^2} - a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 + u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u^2}\,du = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

25. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

26. $\int \dfrac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

27. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2} + a}{u}\right| + C$

28. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2 + u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2 + u^2}}{a^2 u} + C$

29. $\int \dfrac{du}{(a^2 + u^2)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2 + u^2}} + C$

TABLA DE INTEGRALES

FORMAS QUE INVOLUCRAN $\sqrt{a^2 - u^2},\ a > 0$

30. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^4}{8}\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

33. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2 - u^2} - \text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2 - u^2} + C$

37. $\displaystyle\int (a^2 - u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2 - 5a^2)\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{3a^4}{8}\,\text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C$

FORMAS QUE INVOLUCRAN $\sqrt{u^2 - a^2},\ a > 0$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2 - a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2u} + C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2 - a^2}} + C$

TABLA DE INTEGRALES

FORMAS QUE INVOLUCRAN $a + bu$

47. $$\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a + bu - a\ln|a+bu|\right) + C$$

48. $$\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$$

49. $$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$$

50. $$\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

51. $$\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$$

52. $$\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$$

53. $$\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a+bu|\right) + C$$

54. $$\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a+bu)^{3/2} + C$$

55. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$$

56. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a+bu} + C$$

57. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, \quad \text{si } a > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \quad \text{si } a < 0$$

58. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

59. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$$

60. $$\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$$

61. $$\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$$

62. $$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

TABLA DE INTEGRALES

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

63. $\int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

64. $\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

65. $\int \tan^2 u\, du = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 u\, du = -\cot u - u + C$

67. $\int \operatorname{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

76. $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

77. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78. $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\, du$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

86. $\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} u \cos^m u\, du$

$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

87. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u \cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$

95. $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$

TABLA DE INTEGRALES

FORMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

96. $\int ue^{au}\,du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\,du$

98. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

99. $\int e^{au}\cos bu\,du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

100. $\int \ln u\,du = u\ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u\,du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \frac{1}{u\ln u}\,du = \ln|\ln u| + C$

FORMAS HIPERBÓLICAS

103. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C$

105. $\int \tanh u\,du = \ln\cosh u + C$

106. $\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

107. $\int \operatorname{sech} u\,du = \tan^{-1}|\operatorname{senh} u| + C$

108. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln\left|\tanh \tfrac{1}{2}u\right| + C$

109. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$

110. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$

111. $\int \operatorname{sech} u\tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$

112. $\int \operatorname{csch} u\coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$

FORMAS QUE INVOLUCRAN $\sqrt{2au-u^2}$, $a > 0$

113. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

114. $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

115. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u}\,du = \sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

116. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

117. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

118. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au-u^2} + a\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

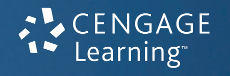
119. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

120. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

Esta obra clásica aborda de una forma accesible el Cálculo de varias variables aplicándolo en los ejercicios conceptuales, con datos del mundo real y en la asignación a proyectos. La clara orientación de las explicaciones y de la pedagogía utilizada hacia el estudiante, es una característica inherente del autor, que ha convertido esta obra en la mejor elección de maestros y estudiantes.

Características

- Se incorporan nuevos ejemplos y ejercicios que exploran el significado de las derivadas e integrales dentro de varios contextos, antes de pasar al análisis de las reglas.
- La sección "Redacción de proyecto" hace una comparación entre los métodos de hoy y los que utilizaban los fundadores del cálculo, en tanto que la sección "Proyecto de aplicación" capta la imaginación del estudiante.
- Se han agregado notas al margen para hacer más clara la exposición.
- Más del 25% de los ejercicios de cada capítulo son nuevos.



http://latinoamerica.cengage.com


ISBN-13: 978-607481318-0
ISBN-10: 607481318-3